

Math 358.83
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Tout exemplaire de cet ouvrage non revêtu de ma griffe sera réputé contrefait.

ANGERS, IMPRIMERIE BURDIN ET Cie, RUE GARNIER, 4.

COURS
DE
MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE
ANALYTIQUE
A DEUX DIMENSIONS

PAR

M. G. DE LONGCHAMPS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CHARLEMAGNE



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1884

TABLE DES MATIÈRES

PREMIER LIVRE

LA LIGNE DROITE ET LE CERCLE

Pages

PREMIÈRE LEÇON.

Les Coordonnées. Représentation des courbes. — Équations cartésiennes et polaires de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole. 1

DEUXIÈME ET TROISIÈME LEÇONS.

Etude sommaire de quelques courbes célèbres. La cissoïde droite et oblique. — La strophoïde droite et oblique. — Les conchoïdes. — Les ovales de Cassini. — La lemniscate de Bernoulli. — Les ovales de Descartes. — Les podaires. — Construction des tangentes par la méthode des transversales réciproques. . . 16

QUATRIÈME LEÇON.

Construction des expressions homogènes. Homogénéité des formules. — Construction des expressions rationnelles. — Moyenne harmonique. — Irrationnelles du second degré. — Moyenne harmonique de carrés. — Irrationnelles bi-quadratiques. — Irrationnelles d'indice 2^p. — Expressions non homogènes. 38

CINQUIÈME LEÇON.

Transformation de coordonnées. Transport des axes parallèlement à eux-mêmes. — Rotation des axes autour de l'origine. — Introduction des paramètres directeurs. — Propriété fondamentale des courbes qui correspondent à une équation du degré *m*. . . 54

SIXIÈME LEÇON.

Théorie analytique de la droite. Différentes formes de l'équation

Pages.

d'une droite. — Coefficient angulaire. — Droites parallèles et perpendiculaires. — Angle de deux directions. — Surface du triangle et du polygone. 63

SEPTIÈME LEÇON.

Formules diverses. Équations d'un segment de droite (premières formules). — Séparation du plan en régions positives ou négatives, par une courbe correspondant à une équation donnée. — Équations d'un segment de droite (secondes formules). — Équation d'une courbe rapportée à un triangle de référence. — Droites concourantes. 77

HUITIÈME LEÇON.

Formules relatives aux distances. Distance d'un point à une droite. — Bissectrices. — Bissectrices d'un faisceau. — Faisceaux harmoniques. — Points et droites imaginaires. — Droite de l'infini. — Conditions pour que l'équation générale du second degré représente deux droites sécantes, ou deux droites parallèles. . . 89

NEUVIÈME LEÇON.

Étude analytique du Cercle. Distance de deux points. — Équation du cercle. — Calcul du rayon. — Puissance d'un point. — Axes et centres radicaux. — Cercles orthogonaux. — Cercle orthotomique. 109

DEUXIÈME LIVRE

THÉORIE GÉNÉRALE DES COURBES PLANES

DIXIÈME LEÇON.

Les Tangentes. Équation de la tangente. — Formes diverses de cette équation. — Application aux courbes du second degré. — Équation générale des tangentes. — Condition pour que deux courbes soient tangentes. — Cas où l'une des courbes considérées est une droite. — Coordonnées tangentielles. — Normale. — Sous-tangente. — Sous-normale. — Tangentes communes. . . 123

ONZIÈME LEÇON.

Les Enveloppes. Cas d'un paramètre variable. — Cas de deux paramètres variables dépendants. — Cas général de p paramètres variables dépendants. — L'enveloppe est tangente aux enveloppées. — Exemples d'enveloppes. — Méthode géométrique pour trouver des enveloppes. 139

DOUZIÈME LEÇON.

Les Polaires. Centre des moyennes harmoniques. — Théorème de Côtes. — Application aux coniques. — Polaires de différents ordres.

Pages.
— Dernière polaire. — Faisceau des tangentes. — Polaires réciproques. — Idée de la transformation de *Poncelet*. 150

TREIZIÈME LEÇON.

Les Asymptotes. Directions asymptotiques. — Asymptotes parallèles à *oy*. — Propriétés générales des asymptotes. — Applications. 162

QUATORZIÈME LEÇON.

Asymptotes quelconques. Équation de l'asymptote. — Application aux coniques. — Asymptotes rejetées à l'infini. — Asymptotes imaginaires. — Directions isotropes. — Asymptotes parallèles. — Disposition relative de la branche et de l'asymptote. 174

QUINZIÈME LEÇON.

Théorèmes généraux sur les Asymptotes. Théorèmes divers. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit asymptote à une courbe. — Équation générale des courbes admettant *m* droites données pour asymptotes. — Examen des courbes qui correspondent à des équations irrationnelles ou transcendantes. — Asymptotes curvilignes. 191

SEIZIÈME LEÇON

Les points singuliers. Point simple. — Point d'inflexion et tangente inflexionnelle. — Concavité et convexité. — Équation de la Hessienne. — Espèces diverses de points doubles. — Il n'y a, dans les courbes algébriques, ni point d'arrêt, ni point anguleux. — Détermination des points doubles. 204

DIX-SEPTIÈME LEÇON.

Centres. — Diamètres. — Axes. Conditions pour que l'origine soit un centre. — Recherche du centre dans les coniques. — Diamètres. — Application aux coniques. — Diamètres singuliers. — Diamètres conjugués. — Axes. 222

DIX-HUITIÈME LEÇON.

Homothétie et similitude. Propriétés générales des figures transformées par homothétie. — Formules de transformation. — Homothétie de deux coniques. — Similitude. — Homographie. — Interprétation géométrique de la transformation homographique plane. — Transformation homologique. 239

TROISIÈME LIVRE

LES CONIQUES D'APRÈS LEUR ÉQUATION GÉNÉRALE

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

Classification des coniques. Variété des coniques. — Distinction des vraies coniques en trois genres. — Discussion d'une conique

Pages.

dont l'équation est donnée. — Courbe du genre et courbe de la variété 249

VINGTIÈME LEÇON.

Réduction de l'équation générale du second degré. Réduction des coniques à centre. — Calcul des axes. — Théorèmes d'Apollonius. — Réduction dans le cas de la parabole. — Équation en S. 262

VINGT ET UNIÈME LEÇON.

Les invariants. Définition des invariants. — Invariance des fonctions ρ, σ, τ. — Applications des invariants. — Calcul du paramètre de la parabole. — Invariants absolus, ou invariants de courbe. — Similitude de deux courbes du second ordre. — Théorèmes d'Apollonius (2e dém.). 274

VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

Équation générale des coniques; formules diverses. Rappel des formules trouvées. — Directions principales. — Équation quadratique des axes. — Équation de l'axe de la parabole. — Équation de la tangente au sommet. — Équation du cercle de Monge. 287

VINGT-TROISIÈME LEÇON.

Foyers et directrices. Définitions. — Équation générale au foyer. — Invariants de cette équation. — Calcul des axes. — Théorèmes sur les foyers et les directrices correspondantes. — Hyperboles focales. 299

VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

Foyers et directrices (*suite*). Diverses méthodes pour la détermination des foyers et des directrices. — Propriétés des foyers et des directrices relativement aux tangentes. 313

VINGT-CINQUIÈME ET VINGT-SIXIÈME LEÇONS.

Théorèmes généraux sur les coniques. Équation générale des coniques circonscrites à un quadrilatère. — Théorèmes de *Desargues*, *Mac-Laurin* et *Braikenridge*, *Pappus*, *Chasles*, *Pascal*, *Brianchon*, *Newton*, *Carnot*. — Corollaires des théorèmes de Pascal et de Brianchon. — Coniques inscrites et circonscrites à un triangle. — Théorème de Newton sur les coniques inscrites à un quadrilatère. — Parabole inscrite à deux ou à trois droites. 328

VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

Intersection de deux coniques (*Cas général.*) Le problème est du quatrième degré. — Examen des cas où il est d'un degré moindre. — Équation en λ qui ramène le cas général au troisième degré. — Couples et centres. — Discussion de l'équation en λ, dans le cas où les racines sont distinctes. 355

VINGT-HUITIÈME LEÇON.

Intersection de deux coniques. (*Cas particuliers.*) Examen des cas divers qui peuvent se présenter. — Cas où l'on peut éviter l'équation en λ. — Applications de l'équation en λ. — Cas où quatre points d'une conique sont situés sur un cercle. — Triangle conjugué à une conique. 365

QUATRIÈME LIVRE

ÉTUDE DES CONIQUES D'APRÈS LES ÉQUATIONS RÉDUITES

VINGT-NEUVIÈME LEÇON. Pages.

L'Ellipse (*tangentes et polaires*). Forme de la courbe. — Construction de l'ellipse point par point au moyen d'une équerre. — Représentations analytiques d'un point de l'ellipse. — Différentes formes de l'équation de la tangente. — Applications de ces formes diverses à des exemples. — Polaire. — Équation quadratique du faisceau des tangentes. — Construction de la tangente au moyen de la règle 379

TRENTIÈME LEÇON.

L'Ellipse. (*Normales. — Développée.*) — Différentes formes de l'équation de la normale. — Hyperbole d'*Apollonius* aux pieds des normales. — Pôle tangentiel et pôle normal. — Théorème de *Joachimsthal*. — Équation du cercle de *Joachimsthal*. — Centre de courbure. — Développée de l'ellipse. — Cercle osculateur. — Construction de ce cercle. 393

TRENTE ET UNIÈME LEÇON.

L'Ellipse. (*Diamètres et cordes supplémentaires*). Ellipse rapportée à deux diamètres conjugués. — Points conjugués. — Formules de *Chasles*. — Théorèmes d'*Apollonius* (3e dem.). — Réciproques de ces théorèmes. — Diamètres conjugués égaux. — Cordes supplémentaires. — Variation de l'angle de deux diamètres conjugués. — Construction de *Chasles* pour trouver les axes, connaissant deux diamètres conjugués. — Construction directe de l'ellipse, point par point, connaissant deux diamètres conjugués. 413

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

L'Ellipse. (*Étude élémentaire des foyers et de directrices.*) Définition élémentaire des foyers et des directrices. — Propriétés diverses de ces points et de ces droites. — Théorème de Poncelet. — Équation polaire de l'ellipse. — Propriétés qui découlent de cette équation. 429

TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

Transformation homographique de l'ellipse. Formules de transformation. — Cercle principal. — Points correspondants. — Propriété des droites correspondantes. — Applications. — A deux directions conjuguées correspondent deux directions rectangulaires. — Aire de l'ellipse. — Théorèmes d'*Apollonius* (4e dem.). — Seconde solution du problème de *Chasles*. — Interprétation géométrique de la transformation homographique considérée dans cette leçon. 446

Pages.

TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

L'Hyperbole. Forme de la courbe. — Construction de l'hyperbole, point par point, au moyen d'une équerre. — Représentations analytiques d'un point de l'hyperbole. — Formules diverses relatives à l'hyperbole. — Étude des asymptotes. — Théorèmes divers qui s'y rattachent. — Transformation homographique de l'hyperbole 460

TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.

La Parabole. Construction de la courbe, point par point, au moyen d'une équerre. — Différentes formes de l'équation de la tangente. — Polaire. — Équation de la normale. — Développée de la parabole. — Cercle de Joachimsthal. — Pôle tangentiel et pôle normal. — Centre de courbure. — Diamètres. — Parabole considérée comme limite d'une conique à centre déformée d'après une loi donnée. 475

CINQUIÈME LIVRE

CONSTRUCTION DES COURBES. — LES COORDONNÉES POLAIRES

TRENTE-SIXIÈME LEÇON.

Construction des coniques. Construire une parabole satisfaisant à des conditions élémentaires. — Différents cas. — Construire une conique connaissant trois points et le centre, ou trois tangentes et le centre. — Construire une conique connaissant cinq points ou cinq tangentes. 492

TRENTE-SEPTIÈME LEÇON.

Construction des courbes. (*Coordonnées cartésiennes.*) Cas d'une équation résoluble. — Cas d'une équation non résoluble. — Folium de Descartes. — Méthode par régions. 511

TRENTE-HUITIÈME LEÇON.

Construction des courbes (*suite*). Examen des formes diverses qui peuvent correspondre à une équation algébrique donnée. — Equations irrationnelles. — Principe algébrique qu'on utilise dans la construction de ces courbes. — Courbes transcendantes. — Propriétés caractéristiques de la strophoïde, de la cissoïde et de la lemniscate. 525

TRENTE-NEUVIÈME LEÇON.

Les Unicursales. Toute courbe du genre zéro est une unicursale. — Classe d'une unicursale. — Les coniques sont des unicursales. —

Pages.
Cas des cubiques unicursales. — Détermination des asymptotes, des points multiples et des points d'inflexion dans les unicursales. — Application à un exemple. 551

QUARANTIÈME ET QUARANTE ET UNIÈME LEÇONS.

Les coordonnées polaires. (*Formules générales.*) Équation de la droite. — Équation générale des tangentes. — Équation de l'asymptote. — Équation des coniques. — Formule donnant Tg V. — Équation de la normale. — Sous-tangente et sous-normale. — Application aux spirales. — Asymptotes parallèles. — Concavité, convexité, points d'inflexion. — Cercles et points asymptotes . . 567

QUARANTE-DEUXIÈME LEÇON.

Construction des courbes en coordonnées polaires. Cas d'une courbe n'ayant pas de points à l'infini. — Exemples de courbes ayant des bras hyperboliques ou paraboliques. . . . 595

QUARANTE-TROISIÈME LEÇON.

Sections planes du cône et du cylindre. Section du cylindre circulaire droit. — Méthode géométrique de *Dandelin.* — Section du cône circulaire droit. — Placer une conique donnée sur un cône circulaire droit donné; solution analytique et géométrique. — Examen du cas particulier où la section est parabolique. — Sections anti-parallèles du cône oblique. — Idée de la transformation des figures par la perspective. 611

NOTE.

Construction graphique des racines d'une équation donnée. Principe de la méthode. — Cas du second, du troisième et du quatrième degré. — Application aux équations transcendantes. . . 627

ERRATA

Page 14; ligne 6 (en remontant) :
remplacez : d par $2d$, et d^2 par $4d^2$.
— 153 — 13 :
au lieu de : (§ 110), lisez : (§ 120).
— 153 — 14 :
supprimez : $= 0$.
— 203 ; dernière ligne :
au lieu de : (§ 374), lisez : (§ 395).
— 218 ; ligne 7 :
au lieu de : coefficient angulaire OA, lisez : coefficient angulaire de OA.
— 218 — 11 :
au lieu de : aux équations $y - tz = 0$, lisez : à l'équation (3).
— 219 — 4.
au lieu de : h_{m-2}, lisez : h^{m-2}.
— 364 — 10 :
au lieu de : ou d'un autre genre, lisez : ou du genre hyperbole.
— 364 — 16 :
au lieu de : ne sont pas du genre elliptique, lisez : sont du genre hyperbole.
— 396 — 2 (en remontant) :
au lieu de : équilation, lisez : equilatère.
— des centres, — du centre.

COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(DEUXIÈME PARTIE)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A DEUX DIMENSIONS

PREMIER LIVRE

LA LIGNE DROITE ET LE CERCLE

PREMIÈRE LEÇON

LES COORDONNÉES. — PREMIÈRES APPLICATIONS

1. On peut dire que la géométrie analytique a pour but principal l'étude des propriétés des courbes et des surfaces, à l'aide de formules algébriques. Le moyen employé pour atteindre ce but, se résume dans la représentation du point, dans le plan et dans l'espace; et cette représentation s'effectue par le secours des *coordonnées*. Nous indiquerons d'abord les principaux systèmes de coordonnées, dans le plan.

2. **Abcisse et ordonnée**. Imaginons dans un plan deux droites indéfinies xx', yy'; se coupant au point o. Sur chacune d'elles nous adoptons une direction positive et nous

convenons que les semi-droites ox et oy représentent les directions positives des axes.

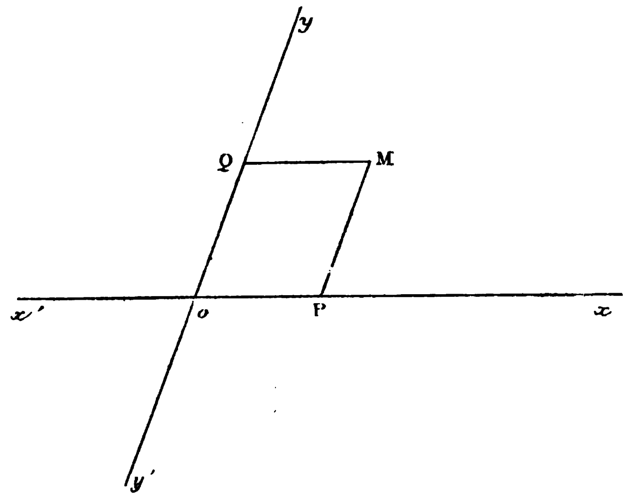


Fig. 1.

Ceci posé, soit M un point quelconque du plan des deux axes; si par M on trace une parallèle à xx' jusqu'à ce qu'elle rencontre yy' au point Q, la longueur MQ représente l'*abcisse* du point M. Cette longueur est affectée du signe $+$, lorsqu'elle se trouve du même côté que la semi-droite ox, par rapport à yy'.

De même, si par M on mène une parallèle à yy', droite limitée à xx'; la longueur MP ainsi obtenue représente l'*ordonnée* du point M : cette ordonnée est positive lorsqu'elle se trouve du même côté que la semi-droite oy, par rapport à xx'; elle est négative, dans le cas contraire.

De cette définition, il résulte 1° qu'à tout point du plan correspondent une abcisse et une ordonnée, positive ou négative; 2° que, réciproquement, à une abcisse et à une ordonnée, données de grandeur et de signe, correspond un point bien déterminé du plan.

3. Axes obliques et axes rectangulaires. L'ensemble des deux droites xx', yy' constitue *les axes de coordonnées*. Le

plus petit angle dont il faut faire tourner la semi-droite *ox* pour l'appliquer sur la semi-droite *oy* est *l'angle des axes*. Lorsque cet angle est droit, les axes sont dits *rectangulaires*; ils sont *obliques* dans tous les autres cas.

Si un point M, pris dans le plan des axes, a une abcisse qui est représentée, en grandeur et en signe, par α; et une ordonnée qui, dans les mêmes conditions, est égale à β, nous dirons que α et β sont les *coordonnées* du point M. Le point *o*, intersection des axes, se nomme l'*origine des coordonnées*.

4. Coordonnées cartésiennes. C'est à Descartes qu'est due cette représentation du point, et, pour distinguer ce système de coordonnées de ceux que nous définirons tout à l'heure, nous dirons que α et β sont les *coordonnées cartésiennes* de M.

Lorsque les coordonnées x, y d'un point sont supposées variables, on exprime ordinairement ce fait en disant que x et y sont des *coordonnées courantes*.

Par exemple, lorsqu'un point M, dont les coordonnées rectangulaires sont x et y, est mobile sur un cercle de rayon R, ayant son centre à l'origine, les nombres x, y vérifient constamment la relation :

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

5. Représentation des courbes. Imaginons, d'une façon générale, qu'un point M se déplace en restant, constamment, sur une courbe Δ, bien définie. Les coordonnées x, y de ce point sont des quantités variables, mais ces deux variables ne sont pas indépendantes. Imaginons, en effet, que x prenne une valeur numérique α : tous les points, dont l'abcisse est égale à α, se trouveront situés sur une droite Δ', parallèle à yy' et coupant l'axe xx' à une distance α de l'origine. Par suite, à l'abcisse α, correspondent des ordonnées en nombre fini, ces ordonnées étant celles des points qui sont communs à Δ et à Δ'. Il y a donc une certaine dépendance entre les variables x,y ; quand M se déplace sur la courbe Δ.

Cette dépendance peut, généralement, s'exprimer par une relation entre x et y :

$$(1) \quad f(x, y) = 0.$$

Nous dirons que la courbe Δ est représentée par cette équation, et dans le cas où $f(x, y)$ désigne une fonction entière du degré m, en x et y, nous dirons que Δ est *une courbe d'ordre m*. *Réciproquement*, à une relation donnée entre x et y, correspond une courbe. Considérons, en effet, l'équation (1) et imaginons toutes les solutions réelles x_1, y_1; x_2, y_2;... de cette équation, solutions qui, en général, sont en nombre infini. A ces solutions diverses correspondent des points M_1, M_2,...; et si l'on suppose que les points soient réunis par un trait continu, la courbe que l'on peut ainsi concevoir, et construire, est celle qui correspond à l'équation proposée.

6. Définition des lieux géométriques. Imaginons une figure fixe F et associons-lui, par une construction géométrique effectuée sur F, une seconde figure mobile F′, dans laquelle nous distinguons, particulièrement, un certain point I. Lorsque la mobilité de la figure F′ est convenablement réglée, nous verrons, dans la suite, ce qu'il faut entendre par là, le point I se déplace, avec F′, et engendre, par ce mouvement, une courbe Δ. Nous convenons de dire que Δ est *le lieu géométrique* du point I.

La recherche des lieux géométriques constitue l'un des problèmes les plus ordinaires de la géométrie analytique, et cette recherche repose sur un théorème fondamental, que nous établirons d'abord.

7. Théorème. *Lorsque les coordonnées x, y, d'un point* I, *vérifient constamment les deux équations :*

$$(1) \quad f(x, y, \lambda) = 0, \qquad \varphi(x, y, \lambda) = 0, \quad (2)$$

dans lesquelles λ représente un paramètre variable, l'équation du lieu décrit par I *s'obtient en calculant le résultant de ces deux équations, par rapport à λ.*

En effet, soit $R(x, y) = 0$, le résultant des équations (1) et (2); désignons par $x'y'$ les coordonnées d'un point I', lesquelles vérifient les équations (1) et (2). Nous avons vu, en algèbre, que les deux systèmes:

$$(A) \begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 \\ \varphi(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (B) \begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 \\ R(x, y,) = 0 \end{cases}$$

étaient équivalents et que toute solution x', y', λ', du système (A), vérifiait aussi les équations (B). On a donc, en particulier, $R(x', y') = 0$; ce qui prouve déjà que les coordonnées d'un point quelconque du lieu satisfont à l'équation : $R(x, y) = 0$.

Réciproquement, soit $x''y''$, une solution de l'équation $R(x, y) = 0$; l'équation $f(x''; y'', \lambda) = 0$, détermine pour λ des valeurs correspondantes, réelles ou imaginaires. Soit λ'' l'une de ces valeurs. Les nombres x'', y'', λ'', vérifiant le système (B) et celui-ci étant équivalent à (A) on a :

$$f(x'', y'', \lambda'') = 0,$$
$$\varphi(x'', y'', \lambda'') = 0.$$

Par suite, le point I'' qui a pour coordonnées $x''y''$ est un des points du lieu cherché, puisque x'' et y'' vérifient les équations (A), quand on donne, au paramètre variable λ, la valeur particulière λ''.

On remarquera que cette démonstration suppose que le paramètre variable peut prendre *des valeurs quelconques et même des valeurs imaginaires*. Nous aurons occasion de nous appuyer sur cette observation pour expliquer certains faits, d'apparence paradoxale, et pour distinguer, par exemple, dans un lieu géométrique, trouvé par cette méthode, les points de ce lieu qui correspondent à la construction géométrique donnée, de ceux qui proviennent des solutions réelles d'équations à coefficients imaginaires.

8. Remarque. Les coordonnées du point mobile I peuvent être liées à deux paramètres variables par trois équations; et, généralement, à p paramètres variables, par $(p + 1)$ équations.

L'équation du lieu s'obtient encore par l'élimination des paramètres, mais le résultat de cette élimination : $F(x,y) = 0$, ne représente pas toujours, uniquement, le lieu géométrique demandé. Sans doute, tous les points considérés ont des coordonnées qui vérifient l'équation $F(x, y) = 0$, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie. On ne peut pas, en général, affirmer que toute solution de l'équation obtenue représente les coordonnées d'un point du lieu. Ceci tient à ce que, comme nous l'avons signalé en algèbre, on ne sait pas, toujours, éliminer plusieurs paramètres, sans introduire *des solutions étrangères.*

Nous allons montrer, dès ces premières leçons, diverses applications du principe précédent; mais nous complèterons d'abord la notion que nous avons donnée de la représentation du point.

9. Coordonnées polaires. Imaginons une droite indéfinie xx', que nous nommerons l'*axe polaire*; sur cette droite prenons un point fixe o et adoptons la semi-droite ox, comme direction positive de l'axe polaire. Faisons tourner maintenant ox, autour du point o, d'un angle que nous désignerons

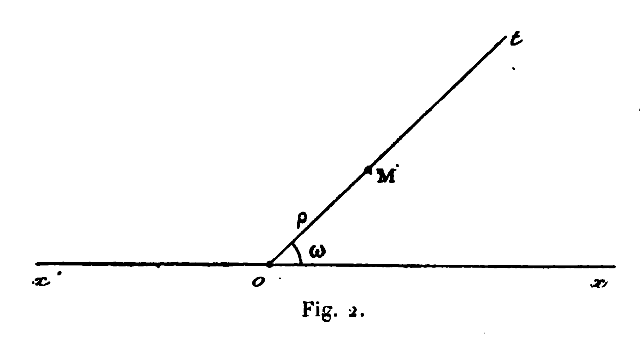


Fig. 2.

par ω; nous obtenons une position nouvelle ot de la semi-droite ox. Enfin prenons sur ot un point M et désignons par ρ la longueur oM. Les valeurs ρ et ω, ainsi définies, représentent les coordonnées polaires du point M.

Pour compléter cette définition et représenter le point M sans ambiguïté, nous ferons ici les conventions suivantes :

1° l'angle ω est pris positivement quand ox tourne autour du point o dans le sens inverse des aiguilles d'une montre; 2° la valeur de ρ est positive quand le point M est situé sur la semi-droite ox, lorsque celle-ci a tourné de l'angle ω; elle est négative quand le point M est placé sur le prolongement de cette semi-droite.

Dans ces conditions, la position d'un point est bien déterminée, c'est-à-dire qu'à des coordonnées ρ et ω, données de grandeur et de signe, correspond un point unique.

10. Coordonnées bi-polaires. — Coordonnées trilatères. Il existe beaucoup d'autres moyens pour représenter un point, mais les deux procédés que nous venons d'indiquer sont ceux que nous emploierons presque exclusivement. Nous citerons pourtant, à titre de renseignement, les *coordonnées bi-polaires* dans lesquelles la position du point est définie par ses distances u, v à deux points fixes, nommés pôles; et le système des *coordonnées trilatères.*

Dans ce système, on imagine un triangle ABC, dit *triangle de référence,* et la position d'un point M, pris dans le plan de ce triangle, se trouve déterminée par les distances x, y, z, du point M aux droites BC, CA, et AB. Ces valeurs x, y, z, dites coordonnées trilatères de M, sont prises positivement ou négativement; par exemple, x est positif si les points A et M sont situés du même côté de BC; il est négatif, s'ils sont de côtés différents.

On doit remarquer que les données x, y, z, qui déterminent le point M, sont *surabondantes* et qu'elles doivent vérifier, constamment, la relation :

$$ax + by + cz = 2S,$$

dans laquelle a, b, c désignent les côtés, et S la surface, du triangle de référence.

11. Équation cartésienne de l'ellipse. Lorsqu'un point M, mobile dans un plan, doit satisfaire constamment, dans ses positions diverses, à une certaine loi géométrique, les coordonnées x, y de ce point vérifient une relation algébrique : $f(x, y) = 0$, que nous avons déjà nommée l'équation

du lieu décrit par le point M. Nous nous proposons de rechercher quelques-unes de ces équations, en prenant pour exemples des lieux géométriques simples et connus.

Examinons d'abord le cas où le point M décrit une ellipse, dont les foyers sont F et F',

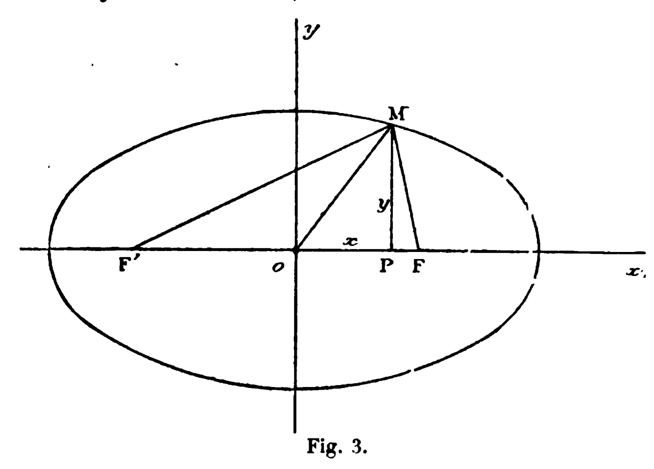


Fig. 3.

et choisissons 1° pour axe des x, la ligne des foyers, 2° pour axe des y, une perpendiculaire à FF', en son milieu.

A ce début de la géométrie analytique, la seule méthode que nous puissions indiquer, pour trouver l'équation du lieu décrit par un point, peut se résumer ainsi : traduire la propriété géométrique proposée en une égalité algébrique entre x et y, en utilisant, au besoin, les relations qui peuvent exister entre les éléments de la figure, relations qui découlent, d'ailleurs, des propriétés de cette figure.

Considérons le triangle FMF'; soit $2p$ son périmètre, et S sa surface.

On a,

$$2p = MF + MF' + 2c,$$

ou,

$$p = a + c,$$

par suite,

$$p - FF' = a - c,$$

et, par combinaison, et en posant $a^2 - b^2 = c^2$,

$$p(p - FF') = b^2.$$

D'autre part, on a :

$$(p - MF)(p - MF') = p^2 - 2ap + MF . MF',$$

ou,

$$(p - MF)(p - MF') = MF . MF' - b^2.$$

D'ailleurs, la surface du triangle peut se représenter, indifféremment, par cy, et par $\sqrt{p(p - FF')(p - MF)(p - MF')}$; on a donc :

$$(1) \quad \frac{c^2y^2}{b^2} = MF . MF' - b^2.$$

On peut maintenant observer qu'un théorème connu donne :

$$2c^2 + 2\overline{Mo}^2 = \overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2,$$

ou,

$$(2) \quad 2c^2 + 2(x^2 + y^2) = \overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2.$$

Les égalités (1) et (2), en tenant compte de la relation :

$$\overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2 + 2MF . MF' = 4a^2,$$

donnent, par combinaison,

$$2a^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2\frac{c^2y^2}{b^2} = 4a^2,$$

ou, après réduction,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

C'est l'équation que nous retrouverons plus tard, et que nous nommerons, alors, *équation de l'ellipse rapportée à ses axes*.

12. Équation polaire de l'ellipse. Prenons pour origine le foyer F', pour axe polaire F'F ; la direction positive de cet axe étant celle qu'on obtient en allant du foyer F', pris pour origine, vers l'autre foyer.

Dans le triangle F′MF, on a;

$$MF' = \rho, \quad MF = 2a - \rho, \quad FF' = 2c.$$

Des formules connues [1] donnent :

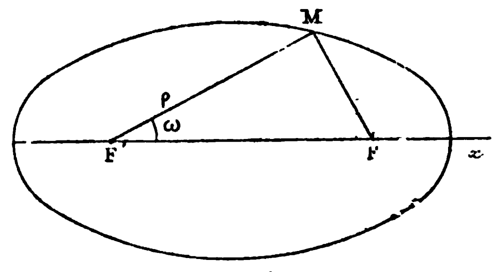


Fig. 4.

$$\cos^2 \frac{\omega}{2} = \frac{(a+c)(\rho+c-a)}{2\rho c},$$

et,

$$\sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{(a+c-\rho)(a-c)}{2\rho c};$$

puis, par combinaison,

$$\cos \omega = \frac{a\rho - b^2}{\rho c};$$

relation qu'on peut encore écrire,

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos \omega};$$

en posant :

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{c}{a}.$$

1. Les formules que nous utilisons ici sont celles qui, dans la notation ordinaire de la trigonométrie, s'écrivent sous la forme :

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

13. Équation cartésienne et équation polaire de l'hyperbole. Des considérations analogues à celles que nous venons d'exposer et des calculs semblables à ceux que nous avons développées, prouvent que, dans le cas de l'hyperbole, après avoir posé $FF' = 2c$, $MF' - MF = 2a$, et $c^2 = a^2 + b^2$; on a, pour l'équation de cette courbe,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On trouve aussi, pour l'équation polaire de la courbe,

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \omega};$$

en prenant pour direction positive de l'axe polaire celle qui est opposée à la direction obtenue en allant, du foyer choisi pour pôle, à l'autre foyer.

14. Équation cartésienne de la parabole. Nous désignerons, suivant l'usage, par p la distance du foyer F à la directrice DD'.

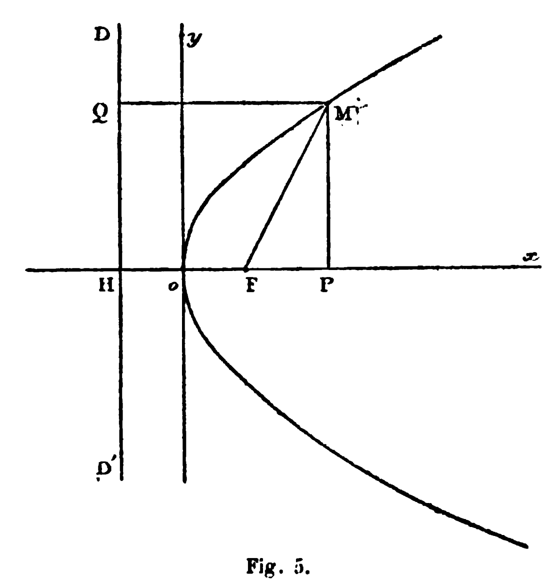


Fig. 5.

Prenons pour axe des x la perpendiculaire abaissée de F,

sur DD'; et pour axe des y une parallèle à DD', équidistante de F et de DD'; on a :

$$\overline{MF}^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2,$$

et,

$$MQ = x + \frac{p}{2}.$$

D'après la définition élémentaire de la parabole, on a :

$$MF = MQ;$$

et, par suite,

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2,$$

ou, après simplification,

$$y^2 = 2px.$$

C'est l'équation de la parabole quand on choisit les axes que nous avons indiqués.

15. Équation polaire de la parabole. Prenons pour origine le foyer, pour axe polaire la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice, la direction négative de cet axe étant celle d'un mobile se dirigeant du foyer vers la directrice.

On a :

$$FH = p, \quad MQ = MF = \rho, \quad MFx = \omega.$$

Le triangle MFP donne d'ailleurs,

$$FP = \rho \cos \omega,$$

ou,

$$PH - FH = \rho \cos \omega,$$

et, finalement,

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \omega}.$$

EXERCICES

1. *Soient* A,A′ *les extrémités du grand axe d'une ellipse,* M *un point mobile sur la couche; démontrer que si l'on pose :*

$$\text{MAA}' = x, \text{ et } \text{MA}'\text{A} = x',$$

on a:

$$\text{Tg}x \ \text{Tg}x' = \frac{b^2}{a^2}.$$

2. *Soient* F,F′ *les foyers d'une ellipse ; si l'on pose :*

$$\text{MFF}' = \beta, \ \text{MF}'\text{F} = \beta';$$

on a:

$$\text{Tg}\frac{\beta}{2} \ \text{Tg}\frac{\beta'}{2} = \frac{a-c}{a+c}.$$

3. *On considère deux cercles égaux, de rayon* R*; trouver le lieu des points tels que la somme des tangentes issues, de l'un d'entre eux, à ces circonférences, soit constante, et égale à* $2a$.

En prenant la ligne des centres pour axe des x, et l'axe radical des deux cercles pour axe des y, on trouve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\text{R}^2 + b^2}{b^2}.$$

4. *Soit* M *un point mobile sur une parabole; démontrer que si l'on joint ce point* M *au foyer* F *et au point* H, *projection de* F *sur la directrice, on a constamment :*

$$\text{cotg}^2\alpha - \text{cotg}^2 6 = 1;$$

en posant:

$$\text{MHF} = \alpha \text{ et } \text{MFH} = 6.$$

5. *Deux droites* Δ *et* Δ′ *tournent autour de deux points fixes* O *et* O′ *d'un mouvement uniforme, et dans des sens différents; trouver le lieu décrit par le point de concours* I, *de ces droites, sachant que dans la position initiale on a :*

$$\text{IOO}' - \text{IO}'\text{O} = \frac{\pi}{2}.$$

En posant $oo' = 2a$ *et en prenant pour axe des* x *la droite* oo', *pour axe des* y *la perpendiculaire à* oo' *en son milieu on trouve :*

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

6. *On considère un cercle* Δ *rapporté à deux diamètres rectangulaires* AOA′, BOB′. *Par le point* A′ *on mène une droite quelconque qui rencontre* BB′ *au point* C, *et en ce point* C *on élève à* A′C *une perpendiculaire qui rencontre* Δ *aux points* P *et* Q *: les tangentes à* Δ, *aux points* P, Q, *se coupent en un point* I *dont on demande le lieu géométrique.*

En posant $CA'A = \varphi$, H désignant le point commun aux droites PQ et OI, on a :

$$OH . OI = R^2, \quad OH = OC \sin\varphi \text{ et } OC = R \operatorname{tg}\varphi,$$

On trouve, finalement,

$$y^2 = Rx;$$

le lieu est une parabole.

7. *On considère deux droites rectangulaires* xx' *et* yy' ; *sur* xx' *deux points* A, A′ *également éloignés de l'origine. Ayant posé* $oA = oA' = d$, *démontrer que si l'on considère deux points* m, M *qui soient vus du point* A′, *sous un angle nul, et du point* A *sous un angle droit, les coordonnées de ces points* x. y ; X, Y *vérifient les relations :*

$$\frac{x}{d} = \frac{Y^2 - X^2 + d^2}{d^2 - X^2 - Y^2},$$

$$\frac{y}{d} = \frac{2Y(d - X)}{d^2 - X^2 - Y^2}.$$

Montrer que ces formules sont réciproques ; c'est-à-dire que l'on peut permuter les lettres x, X ; *et* y, Y.

8. *Démontrer que si l'on considère les deux points* m, M *de l'exercice précédent et si l'on pose :*

$$A'm = u, \quad A'M = v, \quad mA'A = \omega;$$

on a :

$$uv - d(u + v)\cos\omega + d^2 = 0.$$

9. *On considère deux droites rectangulaires* ox, oy ; *et sur* ox, *deux points fixes* o', o''. *Ayant posé :*

$$oo' = d, \quad o'o'' = d';$$

on prend deux points m, M *en ligne droite avec le point* o *et tels que les droites* $o'm$, $o''M$ *soient rectangulaires. Démontrer que les coordonnées*

x,y; X,Y de ces deux points vérifient les formules :

$$\frac{x}{d}=\frac{X(X-d-d')}{X^2+Y^2-(d+d')X},$$
$$\frac{y}{d}=\frac{Y(X-d-d')}{X^2+Y^2-(d+d')X}.$$

En déduire les formules suivantes, qui peuvent servir à effectuer la transformation inverse :

$$\frac{X}{d+d'}=\frac{x(x-d)}{y^2+x^2-dx}$$
$$\frac{Y}{d+d'}=\frac{y(x-d)}{y^2+x^2-dx}.$$

Démontrer qu'en posant:

$$om=u,\quad OM=v \quad \text{et} \quad mox=\omega;$$

on a:

$$\frac{d(d+d')}{uv}-\cos\omega\left(\frac{d}{u}+\frac{d+d'}{v}\right)+1=0.$$

10. *Démontrer que si deux équations $f(x,y)=0$ $F(x,y)=0$ représentent la même courbe, les coefficients des mêmes termes en x et y, sont proportionnels.*

Si l'on fait $y=h$, on obtient deux équations $f(x,h)=0$ $F(x,h)=0$ qui doivent avoir les mêmes racines; on sait alors que les coefficients des mêmes puissances de x doivent être proportionnels. On obtient ainsi des relations qui doivent être vérifiées, *quel que soit h*, et on voit alors que les coefficients correspondants sont proportionnels dans les deux équations proposées.

11. *On donne un point o et une droite Δ, par o on mène une transversale mobile qui rencontre une courbe donnée U, en un point m, et Δ au point A ; on prend alors AM = mA, trouver l'équation de la courbe V, lieu du point M.*

En prenant pour axe des x la perpendiculaire OH abaissée de O sur Δ, et une parallèle à Δ, pour axe des y, on trouve pour les formules de transformation, permettant de passer de l'équation de U, à celle de V :

$$x=2d-X,\quad y=\frac{Y(2d-X)}{X}.$$

Dans ces formules, on suppose oH $=d$.

DEUXIÈME ET TROISIÈME LEÇONS

ÉTUDE SOMMAIRE DE QUELQUES COURBES CÉLÈBRES.

16. Définition de l'ordre d'une courbe. On dit qu'une courbe, dont l'équation est $f(x,y) = 0$, est du degré m, lorsque le terme du degré le plus élevé en x et y, est du degré m. Il est sous-entendu que $f(x, y)$ désigne une forme entière d'x et d'y.

Nous allons, dans cette leçon, étudier sommairement quelques courbes remarquables du troisième ou du quatrième degré, mais pour faciliter la recherche de leurs équations nous indiquerons d'abord les formules générales qui servent à passer du système cartésien rectangulaire, au système polaire ; et *vice versâ*.

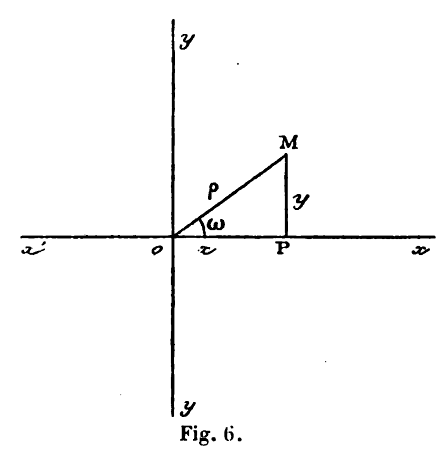


Fig. 6.

Le triangle rectangle MPO donne:

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega.$$

Ces formules sont utilisées pour passer du système cartésien rectangulaire, au système polaire :

Ces mêmes formules donnent :

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{y}{x};$$

et celles ci permettent d'effectuer le passage inverse, du système polaire au système cartésien. Ainsi, il est indifférent d'obtenir l'équation d'une courbe dans un système, ou dans l'autre, puisque l'on peut, très simplement, passer de l'un à l'autre ; on prendra donc celui de ces deux systèmes qui conduit, le plus rapidement, à l'équation cherchée.

17. La Cissoïde droite. Imaginons un cercle Δ, un diamètre AB, et la tangente Δ′ au point B ; par A, menons une

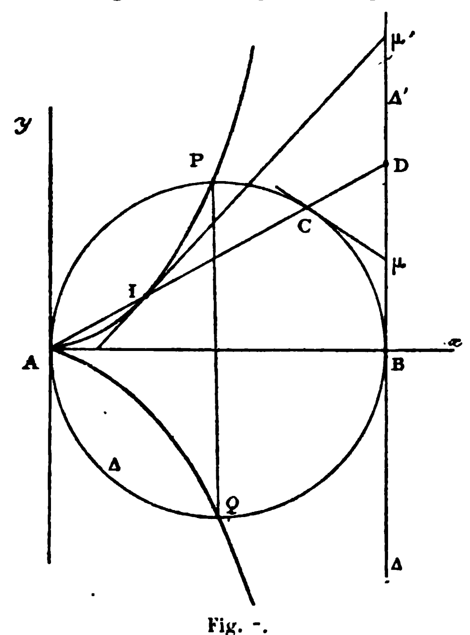


Fig. 7.

transversale quelconque et prenons AI = CD (1) ; le lieu décrit

1. Il est bien entendu qu'en écrivant AI = CD, nous voulons exprimer, non seulement que les segments AI et CD sont égaux, mais aussi qu'ils ont la *même direction*.

par le point I est une courbe qui a reçu le nom de *cissoïde*.

Posons :

$$AI = \rho, \quad IAx = \omega \quad \text{et} \quad AB = d;$$

Nous avons :

$$CD = AD - AC,$$

et, par conséquent,

$$\rho = \frac{d}{\cos \omega} - d \cos \omega,$$

ou,

$$(1) \quad \rho = \frac{d \sin^2 \omega}{\cos \omega}.$$

C'est l'équation polaire de la cissoïde. Pour obtenir son équation cartésienne, on écrit l'équation (1) sous la forme :

$$\rho \cos \omega \, . \, \rho^2 = d\rho^2 \sin^2 \omega.$$

ou,

$$x(x^2 + y^2) = dy^2,$$

ou, encore,

$$y^2 = \frac{x^3}{d - x}. \quad (2)$$

Cette courbe est comprise toute entière entre la droite Δ', et l'axe des y; elle passe par les points P et Q, extrémités du diamètre perpendiculaire à AB, et des considérations, qui seront développées plus tard, permettent de lui donner la forme générale indiquée par la figure. Nous montrerons, seulement, comment on peut construire la tangente en un point de cette courbe.

18. Transversales réciproques. Soit ABC un triangle et soit, dans son plan, une transversale quelconque Δ'. Prenons le point A″, symétrique de A′ par rapport au milieu de

BC; déterminons de même les points B″ et C″. Il résulte du théorème de Ménélaüs et de sa réciproque, que les trois points A″B″C″, ainsi obtenus, sont en ligne droite. Ces deux

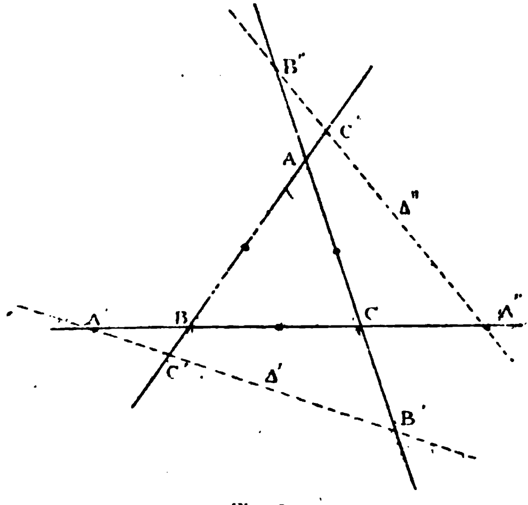


Fig. 8.

droites Δ′ et Δ″, ainsi liées l'une à l'autre, et telles que Δ″ correspondant à Δ′, *réciproquement*, à Δ″ correspond Δ′, seront nommées *transversales réciproques*.

Ces droites, ainsi associées, se rencontrent dans plusieurs questions et nous allons les utiliser pour construire les tangentes aux courbes remarquables que nous étudions en ce moment.

19. Tangente à la cissoïde. Considérons deux transversales ACD, AC′D′ et prenons sur ces droites AI = CD, AI′ = C′D′; les deux points I et I′, ainsi obtenus, sont deux points de la cissoïde. Les deux droites C′C et I′I sont deux transversales réciproques, dans le triangle ADD′; on peut donc dire que les points M et M′ sont symétriques par rapport au milieu de DD′. Si nous supposons maintenant que la transversale AC′D′ vienne se confondre avec ACD, la droite II′, par définition, a pour position limite la tangente, au point I, à

la cissoïde et, d'autre part, CC' devient, à la limite, la tangente au cercle, au point C.

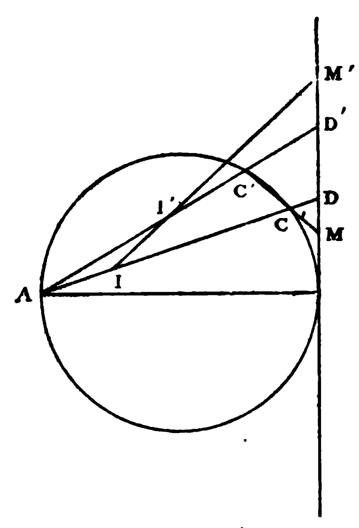


Fig. 9.

De cette remarque résulte une construction de la tangente à la cissoïde; cette construction est indiquée sur la figure 7. Pour obtenir la tangente Iμ', on a pris Dμ' = Dμ.

20. La cissoïde oblique. La cissoïde oblique est engendrée de la manière suivante. Soit A un point fixe pris sur un cercle Δ; par ce point A menons une transversale qui rencontre Δ au point C et une tangente fixe Δ', au point D. Si nous prenons, à chaque instant, AI = CD; le lieu du point I est une strophoïde oblique. Lorsque le point A est diamétralement opposé au point de contact de Δ et de Δ', le lieu du point I est la cissoïde droite, que nous avons étudiée tout à l'heure.

Des formules connues, donnent les relations :

$$AC = d\cos(\omega + x), \quad AB = d\cos x;$$

et,

$$\frac{AD}{\cos\alpha} = \frac{AB}{\cos(x - \omega)} = \frac{d\cos x}{(\cos x - \omega)}.$$

On a, d'ailleurs,

$$AI = \rho = AD - AC = \frac{d\cos^2\alpha}{\cos(\alpha-\omega)} - d\cos(\alpha+\omega);$$

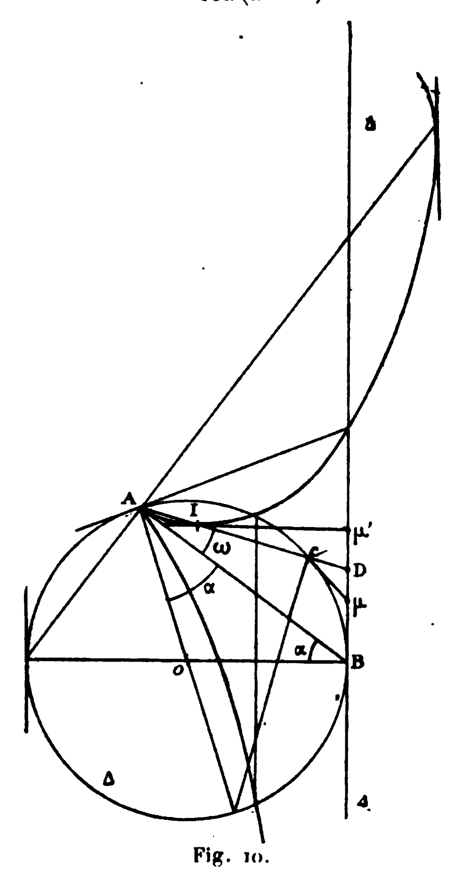


Fig. 10.

et, par conséquent,

$$\rho = d\,\frac{\cos^2\alpha - \cos(\alpha-\omega)\cos(\alpha+\omega)}{\cos(\alpha-\omega)};$$

ou, finalement,

$$\rho = d\,\frac{\sin^2\omega}{\cos(\alpha-\omega)}.$$

C'est l'équation polaire de la strophoïde oblique. Cette équation transformée dans le système cartésien, devient :

$$(x^2 + y^2)(x \cos \alpha + y \sin \alpha) = dy^2.$$

La discussion de cette équation, discussion dans le détail de laquelle nous ne voulons pas entrer encore, prouve que la courbe a la forme générale indiquée par la figure.

La tangente à cette courbe s'obtient d'ailleurs, si l'on veut, en appliquant le théorème des transversales réciproques et en prenant, comme l'indique la figure, $D\mu' = D\mu$. Lorsque le point μ s'éloigne à l'infini, on obtient la tangente parallèle à Δ.

21. Strophoïde droite. Soit Δ une droite fixe, et o un point donné; abaissons de o une perpendiculaire $oA = h$, sur Δ; et, sur une transversale quelconque menée par o, prenons $BI = BI' = BA$; le lieu du point I, ou du point I', est une courbe qu'on nomme *strophoïde droite*.

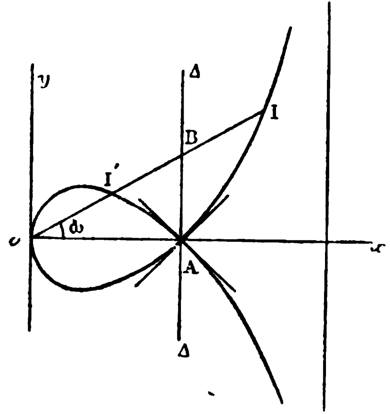


Fig. 11.

On a, en considérant le point I,

$$\rho = oB + AB = \frac{h}{\cos \omega} + h \operatorname{tg} \omega,$$

ou,

$$\rho = h \frac{1 + \sin \omega}{\cos \omega};$$

c'est l'équation polaire de la strophoïde. Dans le système cartésien, cette équation transformée, et débarrassée du facteur x, est :

$$y^2 = x\frac{(x-h)^2}{2h-x}.$$

La discussion de cette valeur de y^2 prouve que la courbe a la forme générale que nous avons indiquée sur la figure ci-dessus.

22. Seconde génération de la strophoïde. Construction de la tangente en un point. Imaginons un cercle Δ, et deux diamètres rectangulaires ; si, autour du point O, on fait tourner une transversale Δ' et que l'on prenne, à chaque instant, OI = CD ; le lieu du point I est une strophoïde.

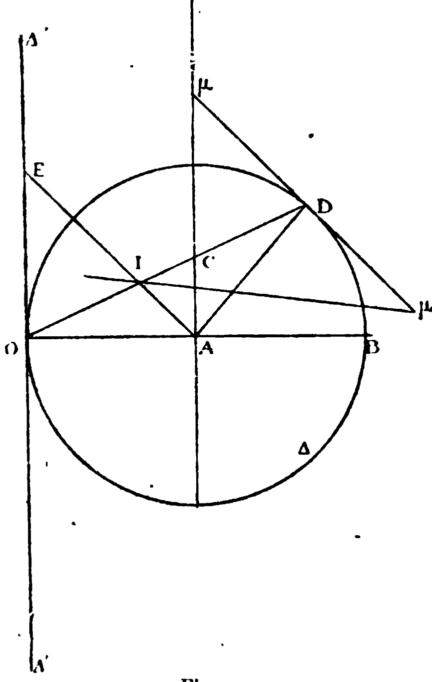


Fig. 12.

En effet la perpendiculaire abaissée du centre A, sur la transversale Δ' tombe au milieu de la corde OD, par consé-

quent, au milieu de CI, puisque l'on suppose que $OI = CD$. Le triangle IAC étant isocèle, le triangle IEO qui lui est semblable, est aussi isocèle et cette remarque prouve que le lieu du point I est une strophoïde, ayant pour sommet le point A, et pour point double le point O.

Le théorème des transversales réciproques, appliqué à cette figure, montre que si l'on prend, comme l'indique la figure $D\mu' = D\mu$, la droite $\mu' I$ est la tangente à la strophoïde au point I.

23. Strophoïde oblique. Imaginons, dans un cercle Δ (fig. 14) deux diamètres obliques OAB, PAQ ; par le point O menons une transversale sur laquelle nous prenons $OI = CD$: le lieu du point I est une courbe qu'on nomme *strophoïde oblique*. On remarquera que, dans le cas où les deux diamètres considérés deviennent rectangulaires, cette courbe coïncide avec la strophoïde droite.

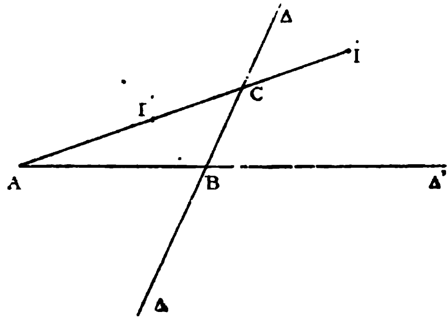


Fig. 13.

La strophoïde oblique peut être engendrée, comme l'indique la figure (13), en considérant deux droites obliques Δ, Δ' et en prenant, à chaque instant, $CI' = CI = CB$. Ces deux définitions rentrent l'une dans l'autre. On le reconnaît en observant, comme nous l'avons fait tout à l'heure pour la strophoïde droite, que le milieu de CI (fig. 14), coïncide avec le milieu de OD. On en déduit que OMI est un triangle isocèle ; les deux définitions donnent donc la même courbe.

Si l'on désigne par 2R, le diamètre du cercle Δ, on a

$$OD = 2R \cos \omega,$$

et,

$$\frac{OC}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha - \omega)}.$$

On a, d'ailleurs,

$$OI = CD = OD - OC;$$

et, par suite,

$$\frac{\rho}{R} = 2\cos\omega - \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \omega)} = \frac{2\sin(\alpha - \omega)\cos\omega - \sin\alpha}{\sin(\alpha - \omega)},$$

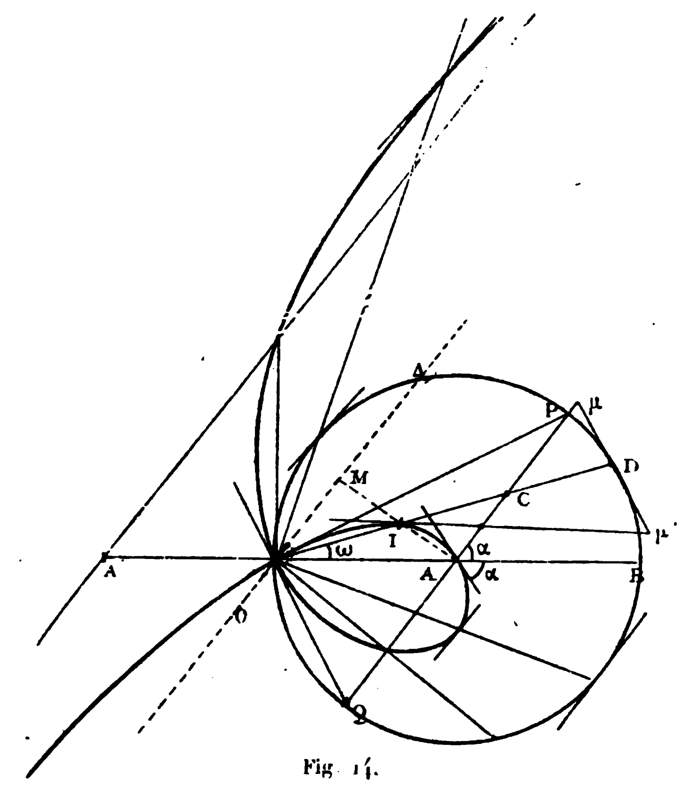


Fig. 14.

ou, enfin, en appliquant la formule connue : $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$,

$$\frac{\rho}{R} = \frac{\sin(\alpha - 2\omega)}{\sin(\alpha - \omega)}.$$

C'est l'équation polaire de la strophoïde oblique. Si on la convertit en coordonnées cartésiennes, on obtient l'équation suivante :

$$(x^2+y^2)(x\sin\alpha - y\cos\alpha) = R(x^2\sin\alpha - 2xy\cos\alpha - y^2\sin\alpha).$$

La figure (14), sur laquelle on a pris OA′ = OA, indique la forme générale de cette courbe; le tracé de cette courbe a été effectué en s'appuyant sur la définition géométrique du point I; on a enfin appliqué le théorème des transversales réciproques et, notamment, pour avoir la tangente au point I, on a pris Dμ′ = Dμ.

24. Les conchoïdes. — Construction de la tangente. Soit Δ une courbe donnée et soit O un point fixe; ayant choisi sur Δ un point M, de part et d'autre de ce point, sur le rayon vecteur OM, on prend MI = MI′ = h, h désignant une longueur fixe donnée; à chaque point M correspondent deux points I, I′. Le lieu décrit par ces points est une courbe qui est dite *une conchoïde* de la courbe donnée Δ.

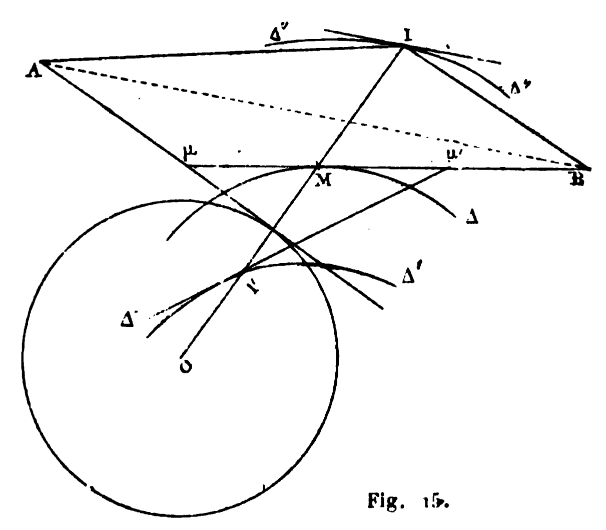


Fig. 15.

Si l'on désigne par $f(\rho, \omega) = 0$, l'équation polaire de Δ, celle de la conchoïde est donc :

$$f(\rho \pm h, \omega) = 0.$$

Nous indiquerons d'abord comment on peut construire la tangente en un point pris sur une conchoïde. Du point o comme centre, avec h pour rayon, décrivons un cercle et considérons deux points voisins sur Δ. Le théorème des transversales réciproques prouve qu'en prenant $M\mu' = M\mu$, la droite $\mu'I'$ est la tangente au point I'. Ce même théorème, appliqué au point I, montre que si l'on construit le parallélogramme μAIB, la tangente au point I, à la conchoïde, est parallèle à la diagonale AB de ce parallélogramme.

25. Conchoïdes de droite ou conchoïde de Nicomède. Examinons le cas particulier où l'on transforme une droite, par la méthode précédente. Le pôle, ou point fixe, étant O, Δ étant la droite proposée, et les axes étant ceux qu'indique la figure

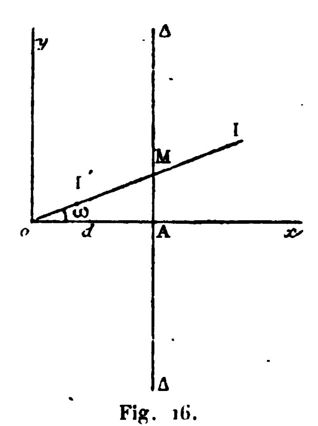


Fig. 16.

on a,

$$\rho = \frac{d}{\cos\omega} \pm h.$$

C'est l'équation polaire de la conchoïde de Nicomède.

Si l'on convertit cette équation dans le système cartésien, on trouve :

$$y^2 = \frac{x^2(h+d-x)(h-d+x)}{(x-d)^2}.$$

Les figures ci-dessous :

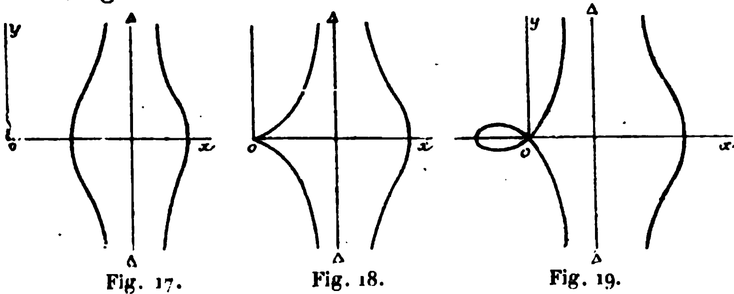


Fig. 17. Fig. 18. Fig. 19.

montrent les différentes formes affectées par la conchoïde de Nicomède, suivant que l'on suppose :

$$h < d, \quad h = d, \quad \text{ou} \quad h > d.$$

26. Conchoïde de cercle ou Limaçon de Pascal. Considérons encore la conchoïde du cercle. On a :

$$\mathrm{OM} = d \cos \omega$$

et, par conséquent,

$$\rho = d \cos \omega \pm h.$$

L'équation cartésienne est :

$$(x^2 + y^2 - dx)^2 = h^2 (x^2 + y^2).$$

La discussion de cette équation ou même, et plus simplement, la propriété géométrique des points I et I′, montre que la conchoïde du cercle peut affecter les trois formes ci-dessous.

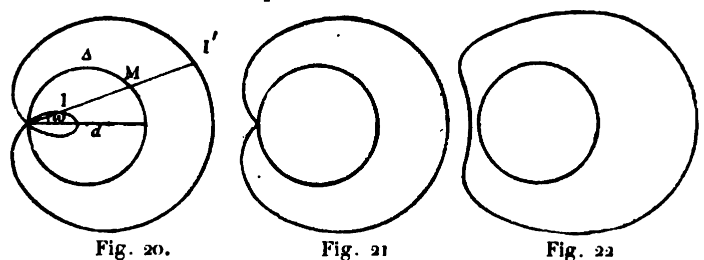


Fig. 20. Fig. 21 Fig. 22

Le cas particulier où l'on suppose $h = d$, celui qui correspond à la figure (21), donne un limaçon d'un genre remarquable, présentant à l'origine un point singulier, que nous nommerons plus tard point de rebroussement. Cette courbe est la *cardioïde*.

27. Ovales de Cassini. L'ovale de Cassini est une courbe qui jouit de cette propriété que le produit des distances d'un point pris sur elle, à deux points fixes, dits foyers de la courbe, est constant, quelque soit le point de l'ovale.

Dans le système bipolaire, F, F' étant les foyers, R et R les coordonnées d'un point I de la courbe, et a désignant une constante, l'équation est :

$$a^2 = rr'.$$

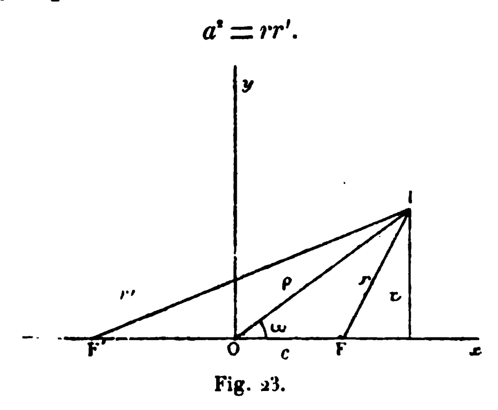


Fig. 23.

Si l'on prend pour axe des x la ligne des foyers et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite, en son milieu O, en posant FF' $= 2c$, on a :

$$r^2 = y^2 + (x-c)^2, \quad r'^2 = y^2 + (x+c)^2;$$

d'où l'on tire,

$$a^4 = (y^2 + x^2 + c^2 - 2cx)(y^2 + x^2 + c^2 + 2cx).$$

C'est l'équation cartésienne des ovales de Cassini.

Enfin, si l'on pose OI $= \rho$, et IO$x = \omega$, on a :

$$r^2 = c^2 + \rho^2 + 2c\rho\cos\omega,$$
$$r'^2 = c^2 + \rho^2 - 2c\rho\cos\omega;$$

d'où l'on déduit :

$$\rho^4 - 2\rho^2c^2\cos 2\omega + c^4 - a^4 = 0.$$

Cette équation polaire des ovales de Cassini met en évidence un cas singulier remarquable, celui où l'on suppose $a = c$.

Dans cette hypothèse, l'équation peut être simplifiée, et l'on a :

$$\rho^2 = 2c^2 \cos 2\omega.$$

Cette courbe est la *Lemniscate de Bernoulli*; nous reviendrons tout à l'heure sur une génération particulière qu'elle comporte.

28. Tangente aux ovales. Considérons deux points I, I', sur un ovale de Cassini ; nous avons, d'après la définition même,

$$FI \cdot F'I = FI' \cdot F'I'.$$

De cette relation, nous déduisons :

$$\frac{FI}{FI'} = \frac{F'I'}{F'I}.$$

Les bissectrices des angles IFI', IF'I' coupent donc II', en des points A, A' symétriques, par rapport au milieu de II'. Cette remarque s'applique aux droites FB, F'B' qui sont perpendiculaires, respectivement, à FA et FA'.

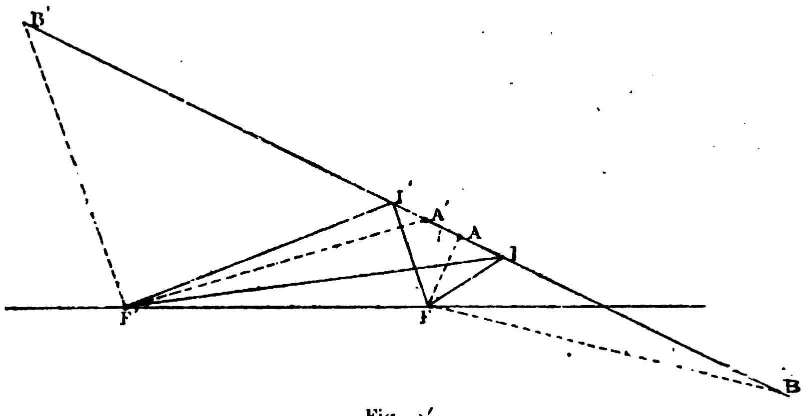


Fig. 24.

Imaginons maintenant que le point I' vienne se confondre avec le point I ; les droites FA, F'A' ont pour position limite, l'une FI, l'autre F'I. D'après cette remarque la tangente à l'ovale de Cassini, au point I, s'obtient en menant par I,

une droite partagée en deux parties égales par les perpendiculaires élevées : la première au point F, perpendiculairement à FI ; l'autre au point F', perpendiculairement à F'I.

29. Lemniscate de Bernoulli. Nous indiquerons maintenant une nouvelle génération de cette courbe remarquable, génération à laquelle nous avons fait allusion tout à l'heure.

Imaginons un cercle Δ et un point extérieur O, point tellement choisi que les tangentes issues de O à Δ soient rectangulaires. Menons par O une transversale quelconque OCD et prenons OI = OI' = CD ; le lieu du point I, et celui du point I'. est une lemniscate de Bernoulli.

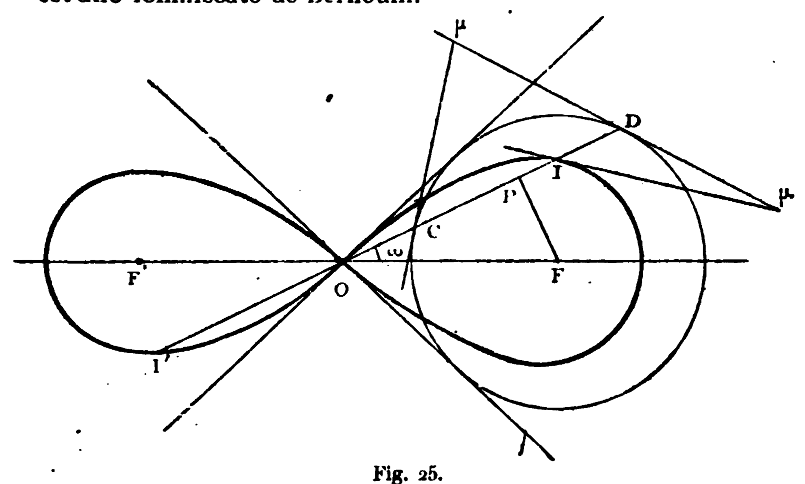


Fig. 25.

En effet soit F le centre du cercle Δ ; abaissons de F une perpendiculaire FP sur Δ ; nous avons

$$\overline{CP}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{PF}^2 = \frac{\overline{OF}^2}{2} - \overline{OF}^2 \sin^2 \omega = \frac{\overline{OF}^2}{2} \cos 2\omega,$$

ou, en posant OF = c, et en remarquant que $CP = \frac{\rho}{2}$,

$$\rho^2 = 2c^2 \cos 2\omega.$$

C'est l'équation que nous avons trouvée plus haut, pour la lemniscate de Bernoulli.

Le théorème des transversales réciproques, prouve que, en menant les tangentes en C et D, à Δ, et en prenant $D\mu' = D\mu$, $\mu' I$ est la tangente, à la lemniscate, au point I.

30. Ovales de Descartes. Ces courbes sont définies, dans le système bipolaire, par une relation du premier degré entre les coordonnées r, r'. Les ovales de Descartes ont donc pour équation, dans ce système de coordonnées,

$$\alpha r + \beta r' + \gamma = 0.$$

On doit à Chasles une description, point par point, de ces courbes. Soient Δ et Δ' deux cercles de centres O, O' et soit pris, sur cette ligne, un point S : par ce point menons une transversale quelconque SA'A ; les rayons OA, O'A' se coupent en un point I qui décrit un ovale de Descartes, quand la transversale tourne autour de S.

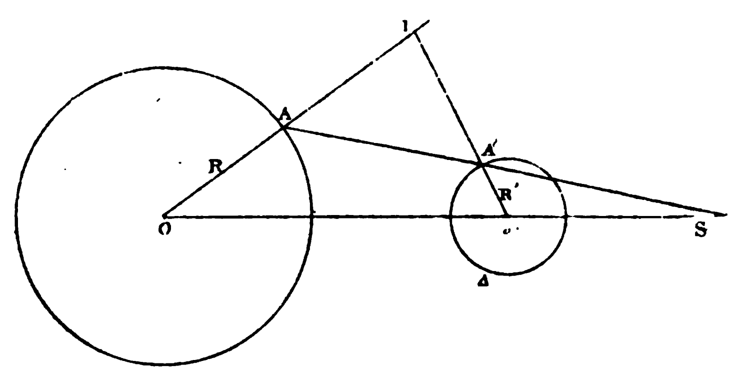


Fig. 26.

En effet, le théorème de Ménélaüs donne

$$\frac{OA}{AI} \cdot \frac{A'I}{O'A'} \cdot \frac{SO'}{SO} = 1,$$

ou, en posant,

$$OA = R, \quad O'A' = R', \quad OI = r, \quad O'I = r' \quad \text{et} \quad \frac{SO'}{SO} = \alpha \frac{R'}{R};$$

$$\alpha . \frac{R}{r - R} . \frac{r' - R'}{R'} . \frac{R'}{R} = 1.$$

Cette relation peut s'écrire encore,

$$\alpha r' - r = \alpha R' - R.$$

Le lieu du point I est donc un ovale de Descartes. On remarquera que dans le cas particulier où $\alpha = 1$, quand le point fixe considéré est le centre de similitude externe des deux cercles, l'ovale devient une hyperbole : on obtient une ellipse en plaçant le point S au centre de similitude interne.

31. Les Podaires. Considérons une courbe quelconque F, et, d'un point fixe O, abaissons une perpendiculaire OI, sur une tangente Δ, de F. Le lieu de ce point I, quand Δ roule sur la courbe proposée F, est une podaire de cette courbe.

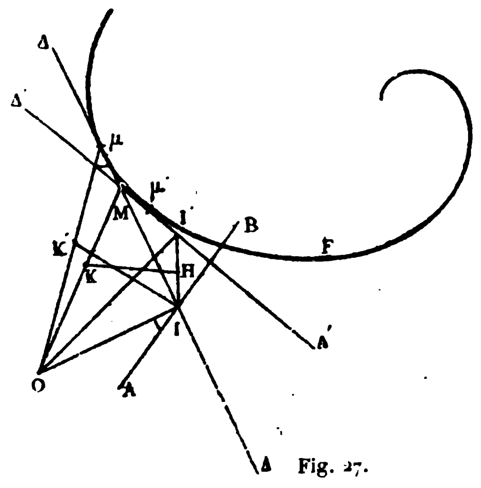


Fig. 27.

Pour citer un exemple d'une pareille courbe, on peut remarquer que la podaire d'un cercle, par rapport à un point quelconque O, pris dans son plan, est un limaçon de Pascal. Ce limaçon devient une cardioïde dans le cas particulier où l'on suppose que le point O est placé sur le cercle.

La tangente en un point d'une podaire se construit très simplement, en utilisant la remarque suivante.

Considérons deux tangentes Δ, Δ', à la courbe F, et soient I et I' les pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur ces droites que nous supposons sécantes. Soit M leur

point commun; le quadrilatère OMII′ est inscriptible et le centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère est le milieu de OM. La perpendiculaire HK élevée au milieu de la corde II′ passe donc par le point K, milieu de OM.

Supposons maintenant que Δ' vienne se confondre avec Δ, le point M a pour position limite le point de contact μ, de Δ avec F; le point K a pour limite le point K′, milieu de Oμ; enfin la droite KH, a pour limite K′I. Nous pouvons conclure de là que la tangente au point I, à la podaire, est la droite AB, droite qui fait, avec le rayon vecteur OI, un angle égal à celui que Oμ fait avec Δ.

32. Lieux géométriques; méthode du paramètre variable. Dans un grand nombre de cas une figure de géométrie dépend d'un paramètre variable α (angle ou longueur) et si l'on distingue, dans cette figure, un point particulier I, ce point I est mobile quand on fait varier α; on peut alors demander le lieu géométrique décrit par ce point.

Ayant choisi des axes des coordonnées, si l'on appelle x, y les coordonnées de I, dans ce système, on peut remarquer que x et y sont déterminés, quand on connaît α; il existe donc deux relations, entre les constantes données et les quantités x, y et α. Désignons ces relations par :

$$(1) \quad f_1(x, y, \alpha) = 0, \quad (2) \quad f_2(x, y, \alpha) = 0.$$

D'après ce qui a été dit plus haut (§ 7), l'équation du lieu décrit par le point I s'obtiendra en éliminant α entre (1) et (2).

Tel est, en quelques mots, le principe de cette méthode qui est fréquemment employée dans la géométrie analytique. Nous ferons encore observer que cette méthode est susceptible d'une généralisation à laquelle nous aurons souvent recours. Cette généralisation consiste à introduire deux paramètres variables α, β; il faut alors établir, entre eux et les coordonnées du point I, trois relations :

$$f_1(x, y, \alpha, \beta) = 0; \quad f_2(x, y, \alpha, \beta) = 0; \quad f_3(x, y, \alpha, \beta) = 0$$

Si l'on a trois paramètres variables, ils devront être liés aux coordonnées x et y, par quatre équations, et ainsi de suite.

33. Application. *On considère deux points fixes* A,A', *situés sur une perpendiculaire à une droite donnée* Δ; *soit* M *un point mobile sur* Δ, *on demande le lieu décrit par le point de concours de* A'M *et de la perpendiculaire élevée à* AM, *au point* A.

La figure proposée est déterminée quand on donne α; appelons x et y les coordonnées du point dont on cherche la figure géométrique. En posant $OA = OA' = a$; et $AP = d$, nous avons :

$$(1) \quad y = (a - x)\operatorname{cotg}\alpha,$$

$$MP = d \operatorname{tg}\alpha,$$

et,

$$\frac{y}{MP} = \frac{a + x}{2a + d},$$

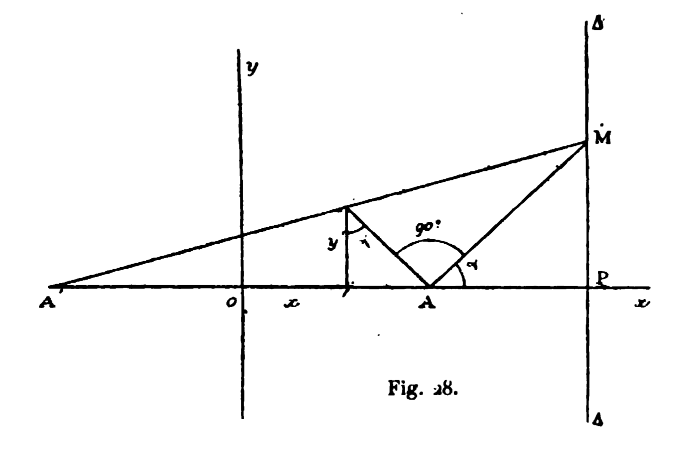


Fig. 28.

ou,

$$(2) \quad \frac{y}{d} = \frac{a + x}{2a + d}\operatorname{tg}\alpha.$$

Si, entre (1) et (2), nous éliminons α, nous avons l'équation :

$$y^2 \frac{2a+d}{d} + x^2 = a^2.$$

Le lieu cherché est donc une ellipse; nous reviendrons, plus tard, sur cette génération remarquable de l'ellipse; nous avons seulement voulu montrer ici, sur un exemple très simple, une application de la méthode indiquée dans le paragraphe précédent; méthode élémentaire, qui permet de trouver de nombreux lieux géométriques, en appliquant les seuls principes établis jusqu'ici.

EXERCICES

1. *On donne une parabole* P *dont le sommet est le point* O, *et l'axe, la droite ox ; soit* M *un point mobile sur* P, *on joint* OM *et par* M *on mène une parallèle à ox. Cette dernière droite rencontre la perpendiculaire élevée à* OM, *au point* O, *en un point* I *dont on demande le lieu géométrique.*

On trouve, soit par la méthode du paramètre variable, soit par des considérations géométriques prenant pour base la relation $y^2 = 2px$, que le lieu du point I est la droite $x = -2p$. On peut déduire de là un procédé commode pour construire la parabole, point par point, au moyen d'une équerre, connaissant 1° le sommet, 2° l'axe, 3° un point de la courbe.

2. *La droite m*M, *limitée aux points m et* M *est vue sous un angle droit du point* A *et du point* A′, *trouver le lieu décrit par le point* M, *connaissant celui du point mobile m.*

En prenant pour axe des x la droite AA′, et pour axe des y la perpendiculaire au milieu de AA′, on trouve pour formules de transformation :

$$x + X = 0, \quad -Yy + x^2 = d^2;$$

$2d$ désignant la distance AA′.

3. *On considère un cercle et un diamètre fixe* AB ; *soit* CD *un diamètre mobile : du point* C *on abaisse sur* AB *une perpendiculaire qui rencontre* AD *en un point* I. *Démontrer que le lieu de ce point est une cissoïde.*

4. *Soit* AB *un diamètre fixe d'un cercle* Δ, *et soit* CD *une corde mobile, perpendiculaire à* AB *; prenons le point* C′ *diamétralement opposé au point* C, *la droite* C′A *rencontre* CD *en un point* I; *le lieu de ce point est une cissoïde.*

5. *On donne un cercle* Δ *et une tangente fixe* Δ′ *; soit* Δ″ *une tangente mobile rencontrant* Δ *au point* A, *et* Δ′ *au point* B *; si l'on prend* BI = BA, *le lieu du point* I *est une cissoïde.*

6. *Le lieu des foyers des paraboles ayant un sommet fixe et passant par un point fixe est une cissoïde.*

7. *Un cercle de rayon invariable roule sur une droite donnée* Δ *; par un point* O, *fixe et pris sur* Δ, *on mène au cercle une tangente ; le lieu des points de contact est une strophoïde.*

8. *Dans un cercle* Δ, *on considère un rayon fixe* OA *et un rayon mobile* OB *; démontrer que le lieu du point de rencontre des hauteurs du triangle* AOB, *est une strophoïde.*

9. *Soit* A *un point fixe pris sur un cercle* Δ *et soit* Δ′ *la tangente au point* A′, *diamétralement opposé au point* A *; par* A *on mène une transversale qui rencontre* Δ *en* B, *et* Δ′ *en* C *: démontrer que si l'on prend* BI = CB, *le lieu de* I *est une strophoïde.*

10. *Sur un cercle* Δ, *on prend un point fixe* A *; un angle droit* BOC *tourne autour du centre, on joint* A *et* B *; la droite ainsi obtenue rencontre* OC *en un point qui appartient constamment à une strophoïde.*

11. *Soit* A *un point fixe pris sur une courbe du centre* O *; par* A *on mène une corde mobile* AB *: la perpendiculaire élevée au rayon* OB, *au point* O, *rencontre* AB *en un point, dont le lieu géométrique est une strophoïde.*

12. *On considère un angle droit yox et sur oy un point fixe A ; on mène par* A *une transversale* Δ *qui rencontre ox en* B *; trouver le lieu décrit par le point* I, *pris sur* Δ, *et tellement choisi que l'on ait* AI = OB.

La courbe que l'on trouve est la courbe de contour apparent dans l'épure de la vis à filets triangulaires. (V. Poncelet. *Applications de l'analyse à la géométrie*, t. I ; p. 447.) Si l'on prend BI′ = IA, le lieu du point I′ est une strophoïde ; la méthode des transversales réciproques permet de construire la tangente au point I′, à la strophoïde ; cette méthode s'applique donc aussi à la courbe proposée.

13. *Le lieu des points tels que les rapports de leurs distances à deux circonférences soit constant, est un ovale de Descartes.* (Newton)

14. *Démontrer que les tangentes aux points* A, A′ (fig. 26), *et les tangentes au point* I, *à l'ovale de Descartes, sont des droites concourantes.*

(Chasles)

QUATRIÈME LEÇON.

CONSTRUCTION DES EXPRESSIONS HOMOGÈNES

34. Théorème. *Les formules ou relations de la géométrie sont des expressions homogènes, quand aucune ligne de la figure n'est prise pour unité.*

Imaginons qu'entre des longueurs a, b, c, on ait trouvé une relation que nous représenterons par :

$$(1) \quad f(a, b, c) = 0;$$

nous allons montrer que $f(a, b, c)$ est une fonction homogène ou que, s'il n'en est pas ainsi, la relation trouvée peut être remplacée par des relations homogènes.

En effet, a, b, c représentant des longueurs qui ont été évaluées avec une certaine ligne t, prise pour terme de comparaison, changeons d'unité et prenons une nouvelle ligne θ, pour lui comparer les lignes de la figure proposée. Celles-ci ont des longueurs qui sont alors a', b', c'; les nombres a', b', c'; a, b, c vérifiant les égalités :

$$a = \lambda a', \quad b = \lambda b', \quad c = \lambda c', \quad \text{et } \lambda = \left(\frac{\theta}{t}\right).$$

On a donc,

$$f(\lambda a', \lambda b', \lambda c') = 0.$$

Si f est une fonction homogène, du degré μ, on peut poser :

$$f(\lambda a', \lambda b', \lambda c') = \lambda^{\mu} f(a', b', c'),$$

et la relation (1) devient,

$$f(a', b', c') = 0.$$

C'est la même relation que (1), seulement les lettres a, b, c, sont changées, respectivement, en a', b' et c'.

Supposons au contraire que $f(a, b, c)$ soit une expression non homogène et admettons, d'abord, qu'elle soit une fonction entière. Nous pourrons la mettre sous la forme d'une somme de fonctions entières et homogènes, $\varphi(a, b, c), \psi(a, b, c) \ldots$ et nous avons :

$$f(a, b, c) = \varphi(a, b, c) + \psi(a, b, c) + \ldots;$$

par conséquent,

$$f(\lambda a', \lambda b', \lambda c') = \lambda^{\mu'} \varphi(a', b', c') + \lambda^{\mu''} \psi(a', b', c') + \ldots$$

Le rapport λ est une quantité variable, puisque θ est une longueur que l'on peut arbitrairement choisir. Le second membre de cette égalité étant nul, *quel que soit* λ, on a donc :

$$\varphi(a', b', c') = 0, \quad \psi(a', b', c') = 0, .$$

Dans ce cas, la relation proposée donne donc lieu à plusieurs relations homogènes entre les lignes de la figure.

Si l'équation $f(a, b, c) = 0$ renferme des quantités irrationnelles, on peut toujours, comme nous l'avons indiqué en algèbre, obtenir une relation $U = 0$ ne renfermant plus de radicaux, et la fonction U doit être homogène ou, pour la raison que nous avons donnée tout à l'heure, se décomposer en relations homogènes.

Il faut encore observer que les fonctions transcendantes de la trigonométrie représentant *des rapports de deux lignes*, restent invariables quand on change l'unité. Elles doivent être considérées comme des *nombres*, quand on cherche à vérifier l'homogénéité des formules.

Nous nous bornons à constater l'homogénéité des formes algébriques fournies par les propriétés géométriques d'une figure, dans les trois cas que nous venons d'examiner successivement et qui correspondent aux fonctions entières, irrationnelles, ou transcendantes; ces dernières renfermant seu-

lement les transcendantes de la trigonométrie élémentaire. Ces expressions sont en effet les seules que nous rencontrerons dans ce cours, si l'on en excepte pourtant quelques courbes transcendantes, comme celles que nous avons trouvées en algèbre,

$$y = a^x, \quad y = \mathrm{L}x;$$

et, aussi, comme quelques spirales, que nous étudierons dans le système des coordonnées polaires.

L'équation d'un lieu géométrique étant une relation entre les lignes données et les lignes variables x, y qui représentent les distances d'un point à deux droites, on peut donc dire :

Lorsqu'aucune ligne de la figure n'est prise pour unité, l'équation du lieu géométrique, et toutes celles qui ont servi à la trouver, doivent être homogènes.

35. Remarque. *Lorsqu'une figure ne renferme que des angles, les lieux géométriques que peut engendrer cette figure sont formés par une ou plusieurs droites.*

En effet, si l'on désigne les angles par φ, ψ, ... l'équation du lieu est :

$$(1) \quad f(x, y, \varphi, \psi, \ldots) = 0.$$

Les constantes données, φ et ψ, entrent sous forme de lignes trigonométriques et, par conséquent, on peut dire que l'équation (1) est une fonction homogène en x et y. La propriété qui nous occupe est alors la conséquence immédiate du théorème suivant.

36. Théorème. *Toute fonction homogène d'x et d'y, du degré m, représente un faisceau de m droites, réelles ou imaginaires, passant par l'origine ; et réciproquement.*

Considérons d'abord le cas le plus simple, celui où l'on suppose $m = 1$. L'équation proposée est alors :

$$(1) \quad \mathrm{A}x + \mathrm{B}y = 0,$$

A et B n'étant pas nuls à la fois. Si l'on a $\mathrm{A} = 0$, cette équa-

tion se réduit à $By = 0$, ou à $y = 0$, puisque l'on suppose $B \neq 0$. Dans ce cas particulier, l'équation représente donc l'axe ox. On voit de même qu'elle représente l'axe oy, quand on a $B = 0$. Enfin, dans le cas où A et B sont, l'un et l'autre, différents de zéro, la relation peut être écrite sous la forme :

$$\frac{x}{B} = \frac{y}{-A}.$$

Il existe un point M dont les coordonnés x', y', sont : $x' = B$, $y' = -A$. L'équation devient alors :

$$(2)\ \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}.$$

Les propriétés des triangles semblables prouvent : 1° qu'à toute solution de l'équation (2), correspond un point M' placé sur la droite OM ; et que, réciproquement, les coordonnées d'un point quelconque de OM vérifient la relation proposée. En résumé l'équation (1) représente une droite passant par l'origine.

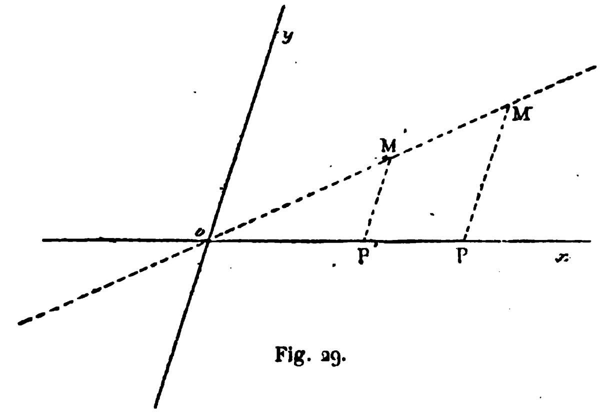


Fig. 29.

Lorsque le rapport des coefficients A et B est une expression imaginaire, nous dirons, conventionnellement, que l'équation (1) représente *une droite imaginaire* et il est facile de vérifier que, dans cette hypothèse, l'équation (1) n'admet aucune solution réelle, en dehors de la solution zéro.

Considérons maintenant une équation homogène, et du degré m, en x et y, $\varphi(x, y) = 0$; on a, par le théorème de d'Alembert (Alg. § 357),

$$\varphi(x, y) \equiv (A_1 x + B_1 y)(A_2 x + B_2 y) \ldots (A_m x + B_m y).$$

Pour que $\varphi(x, y)$ soit nul, il est nécessaire et suffisant que l'un ou l'autre des m facteurs réels ou imaginaires du second membre, soit nul. On a donc, pour le lieu proposé, toutes les solutions des équations :

$$A_1 x + B_1 y = 0, \quad A_2 x + B_2 y = 0, \ldots \; A_m x + B_m y = 0.$$

Ainsi, le lieu considéré est constitué par l'ensemble de m droites, qui sont réelles, quand les coefficients A et B sont eux-mêmes réels, et que nous nommerons imaginaires, dans le cas contraire.

La réciproque est vraie et s'établit, sans difficulté, par des considérations toutes semblables.

37. Construction des expressions rationnelles, homogènes. Les expressions que nous voulons considérer d'abord sont celles qui correspondent à la formule,

$$(1) \quad x = \Sigma a_1 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p}.$$

En posant,

$$(2) \quad x_1 = a_1 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p},$$

on voit qu'on obtiendra la longueur x, en ajoutant les longueurs $x_1, x_2, \ldots$ et tout revient à construire x_1. Posons encore,

$$(3) \quad X_1 = a_1 \frac{\alpha_2 \ldots \alpha_p}{\beta_2 \ldots \beta_p},$$

et admettons que l'on sache construire X_1. La formule (2) donne,

$$x_1 = X_1 \frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

et nous voyons ainsi que x_1 peut être obtenu par la construc-

tion connue de la quatrième proportionnelle. En raisonnant sur X_1, comme nous l'avons fait sur x_1, et ainsi de suite x_1 peut se construire par une série de quatrièmes proportionnelles.

Le cas le plus général des expressions rationnelles, correspond à la formule :

$$x = c \frac{\Sigma a_1 \frac{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\beta_1 \ldots \beta_p}}{\Sigma b_1 \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_q}{\delta_1 \ldots \delta_q}}.$$

En posant :

$$y = \Sigma a_1 \frac{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\beta_1 \ldots \beta_p},$$

et,

$$z = \Sigma b_1 \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_q}{\delta_1 \ldots \delta_q};$$

on peut construire y et z, comme nous venons de l'indiquer, et la longueur x s'obtient, finalement, par une quatrième proportionnelle, laquelle correspond à la formule,

$$x = c \frac{y}{z}.$$

28. Moyenne harmonique (1).La construction indiquée au paragraphe précédent est celle que l'on peut appliquer, d'une façon générale, sans avoir recours à des artifices particuliers, aux expressions rationnelles. Il va, sans dire, que dans beaucoup de cas, on pourra profiter de la forme algébrique donnée pour construire l'inconnue, par des procédés rapides. Nous donnerons, comme exemple de ces procédés particuliers, une construction de la *moyenne harmonique*.

On dit qu'une longueur X est une moyenne harmonique

1. Cette dénomination est due à *Mac-Laurin*. — Aperçu historique, p. 147.

entre les m longueurs a, b, c, ...l, lorsque l'on a la relation,

$$\frac{m}{X} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{l}.$$

Considérons un trapèze dont les bases soient a et b, et par le point de concours des diagonales, menons une parallèle aux bases. On voit facilement que cette droite est partagée,

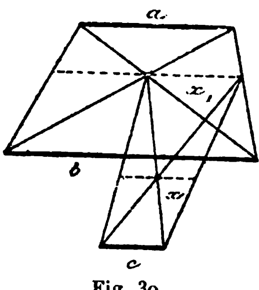


Fig. 30.

par les diagonales et les côtés du trapèze, en deux parties égales, et que l'inverse de chacune de ces parties est égale à $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Ayant fait la construction qu'indique la figure, on a donc :

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b};$$

on a, de même,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{c}$$

et ainsi de suite. Pour nous borner au cas de trois lignes a, b, c; on a :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

et, par conséquent,

$$X = 3x.$$

On a donc la moyenne harmonique des lignes a, b, c, en triplant la longueur x, obtenue par la construction précédente.

39. Irrationnelles du second degré. Nous nous occuperons d'abord des irrationnelles qui correspondent à la formule :

$$x^2 = \Sigma ab \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_p}.$$

Considérons l'un des termes du second membre, et posons :

$$x_1^2 = ab \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_p}.$$

Construisons, par la méthode indiquée plus haut, une ligne X_1, ligne déterminée par la formule :

$$X_1 = b \frac{\alpha_1 \dots \alpha_p}{\beta_1 \dots \beta_p},$$

nous aurons finalement x_1, par une moyenne proportionnelle entre a et X_1.

Pour revenir maintenant à la ligne x, on voit qu'en appliquant la construction précédente, aux différents termes qui constituent le second membre, on a,

$$x^2 = X_1^2 + \dots + X_h^2 - Y_1^2 \dots - Y_k^2.$$

En posant, alors,

$$y^2 = X_1^2 + \dots + X_h^2,$$

et,

$$z^2 = Y_1^2 + \dots + Y_k^2;$$

ces lignes y et z peuvent se construire en ayant recours à une suite de triangles rectangles et l'on obtient la ligne x par une moyenne proportionnelle entre $y + z$ et $y - z$.

on voit que y peut s'obtenir au moyen d'un triangle rectangle. Connaissant la ligne $x \pm \alpha$, on en déduit la ligne inconnue x.

La construction élémentaire qui est relative au partage d'une droite donnée, en moyenne et extrême raison, n'est qu'une application particulière de l'idée que nous venons d'exprimer. En effet, si l'on désigne par a, la ligne proposée, et par x le plus grand segment de cette longueur, partagée en moyenne et extrême raison, on sait que l'on a, par définition,

$$x^2 = a(a - x),$$

ou,

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Cette relation peut s'écrire,

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4},$$

et, sous cette forme, on voit que $x + \frac{a}{2}$ est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont les côtés sont a et $\frac{a}{2}$. C'est de cette remarque que découle la construction élémentaire connue, mais que nous avons voulu rappeler, pour la rapprocher de l'idée générale qui préside à la construction des racines de l'équation du second degré.

42. Construction des irrationnelles bi-quadratiques. Supposons d'abord que la ligne x, que l'on veut construire, soit liée aux lignes données par l'égalité,

$$x^4 = abcd \frac{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p}.$$

En posant :

$$y^2 = cd \frac{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p},$$

et,

$$z^2 = ab;$$

on a,

$$x^2 = yz;$$

et la ligne inconnue x, est donnée par une moyenne proportionnelle entre les lignes y et z, que l'on sait construire.

Supposons maintenant que l'on ait,

$$x^4 = \Sigma abcd \frac{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p}.$$

En appliquant, à chacun des termes qui constituent le second membre, la construction précédente, on est ramené à construire les expressions de la forme

$$x^4 = \Sigma y^4.$$

Il nous reste donc à indiquer comment on peut, avec la règle et le compas, construire une ligne x, déterminée par l'égalité précédente.

Prenons d'abord des exemples simples. Soit

$$x^4 = a^4 + b^4.$$

Posons,

$$b^2 = ay, \quad \text{et} \quad a^2 + y^2 = z^2.$$

Nous avons alors,

$$x^4 = a^4 + a^2y^2,$$

ou,

$$x^4 = a^2z^2,$$

ou, enfin,

$$x^2 = az.$$

D'après cette égalité, x est une moyenne géométrique entre les lignes connues a et z.

Cette méthode est susceptible d'une généralisation évidente. Si l'on veut construire la ligne x, déterminée par la formule,

$$x^4 = a^4 + b^4 + c^4,$$

on posera,

$$b^2 = ay, \quad c^2 = az, \quad \text{et} \quad t^2 = a^2 + y^2 + z^2;$$

et l'on aura,

$$x^2 = at.$$

43. Irrationnelles d'indice 2^p. Pour montrer que l'on peut construire, avec la règle et le compas, les irrationnelles de ce genre, nous allons indiquer comment on ramène la construction d'une irrationnelle d'indice 2^p, à celle d'une irrationnelle d'indice 2^{p-1}.

Soit proposé, par exemple, de construire la ligne x, déterminée par l'égalité,

$$x^{2^p} = a^{2^p} + b^{2^p} + c^{2^p}.$$

Nous poserons,

$$b^2 = ay, \quad c^2 = az, \quad \text{et} \quad t^{2^{p-1}} = a^{2^{p-1}} + y^{2^{p-1}} + z^{2^{p-1}};$$

et nous aurons,

$$x^{2^p} = a^{2^{p-1}} t^{2^{p-1}};$$

ou, enfin,

$$x^2 = at.$$

44. Construction des racines d'une équation bicarrée. L'équation bicarrée, homogène, peut toujours être ramenée à la forme

$$x^4 \pm 2a^2x^2 \pm b^4 = 0,$$

a, b, désignant des lignes données, ou des lignes que l'on a construites au moyen de celles-ci.

L'équation précédente peut s'écrire :

$$(x^2 \pm a^2)^2 = a^4 \pm b^4,$$

et, en posant,

$$y^4 = a^4 \pm b^4,$$

on a,

$$x^2 \pm a^2 = \pm y^2.$$

On est ainsi ramené à des constructions connues.

On peut aussi poser $x^2 = by$, et l'équation bicarrée devient

$$y^2 \pm 2\frac{a^2}{b}y \pm b^2 = 0.$$

On revient ainsi à l'équation du second degré.

45. Expressions non homogènes. Lorsque la formule proposée n'est pas homogène, il faut donner, en même temps, la ligne qui a été prise pour unité. En désignant celle-ci par t, on remplace dans l'expression donnée les lettres x, a, b, ... par $\frac{x}{t}, \frac{a}{t}, \frac{b}{t}$; ... et, après avoir chassé le dénominateur, on a une expression homogène.

Proposons-nous, par exemple, de construire l'expression :

$$x = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}},$$

les radicaux étant pris avec le signe explicite qu'ils ont dans cette formule. Celle-ci prend la forme homogène, si on l'écrit :

$$x = t\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}. \quad (t = 1)$$

Soit Δ le cercle dont le rayon est égal à l'unité. La corde AB étant tracée perpendiculairement au rayon OP, en son milieu, on a :

$$AB = \sqrt{3};$$

ayant mené le rayon OC perpendiculairement à OA, on a

$$BD = \sqrt{3} - \sqrt{2},$$

et, par suite,

$$x = t\sqrt{BD},$$

ou,

$$x^2 = tBD,$$

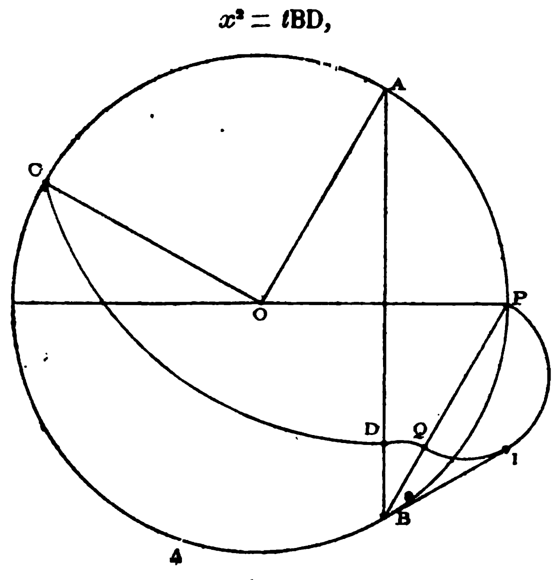


Fig. 32.

puisque $t^2 = t$. On a donc enfin,

$$x^2 = BQ.BP,$$

et, par conséquent,

$$BI = x.$$

EXERCICES

1. *Trouver par des constructions rapides les lignes déterminées par les formules suivantes :*

$$(1)\quad x = a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{p}.$$

$$(2)\quad x^{2^p} = a^{2^p-1}b.$$

$$(3)\quad x = a\sin^{p}\varphi.$$

$$(4)\quad x = a\,\mathrm{tg}^{p}\varphi.$$

2. *Construire les lignes qui correspondent aux formules*

$$x = \sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}},$$

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}}.$$

3. *Trouver, par une construction rapide, la ligne x, qui correspond à la formule :*

$$xb^{2^p-1} = a^{2^p}.$$

4. *Trouver un angle x, déterminé par la relation :*

$$\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}^{3^p}\varphi,$$

φ, désignant un angle donné.

On considère un rectangle ABCD, dont les côtés $CD = a$, $CB = b$ forment un triangle, rectangle et dans lequel $CDB = \varphi$. On projette C sur DB, au point C_1. et celui-ci sur AB et AD aux points A_1 et B_1. On reconnait sans difficulté qu'en posant :

$$C_1D_1B_1 = \varphi_1,$$

on a,

$$\mathrm{tg}\,\varphi_1 = \mathrm{tg}^3\varphi.$$

CINQUIÈME LEÇON

TRANSFORMATION DE COORDONNÉES

Le problème que nous allons traiter peut être défini ainsi : *$f(x, y) = 0$ étant l'équation d'une courbe rapportée aux axes* Ox, Oy ; *trouver l'équation* $F(X, Y) = 0$, *de cette même courbe, rapportée à de nouveaux axes* $O'X$, $O'Y$.

On peut distinguer trois cas dans la transformation des coordonnées : 1° la direction des axes reste la même, mais l'origine se déplace ; 2° l'origine reste fixe, mais les axes tournent autour de ce point ; 3° l'origine et la direction des axes sont, simultanément, modifiées.

Ce dernier cas rentre évidemment dans les deux autres; on peut, en effet, déplacer d'abord l'origine, la direction des axes restant invariable ; puis les faire tourner autour de la nouvelle origine, celle-ci étant supposée fixe.

46. Transport des axes parallèlement à eux-mêmes. — Soient Ox, Oy les actes proposés, et soit O' la nou-

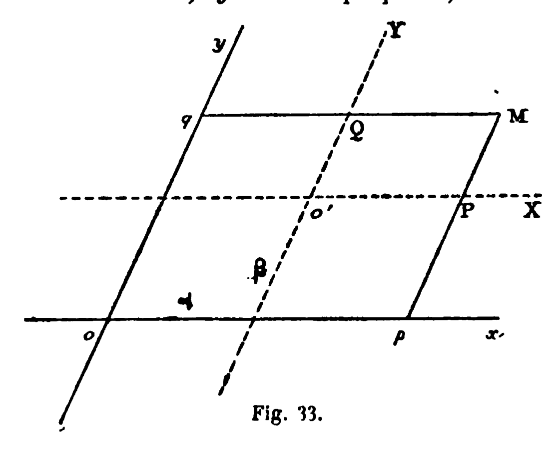


Fig. 33.

velle origine. Pour déterminer la position de ce point, nous

supposons que l'on donne ses coordonnées α, β. Soit M un point quelconque du plan yOx ; x, y désignant les coordonnées du point M dans le système yOx ; X, Y les coordonnées du même point, dans le nouveau système YO'X, on a :

$$\text{(A)} \quad x = \alpha + X,$$
$$\text{(B)} \quad y = \beta + Y.$$

Ces formules sont générales : c'est-à-dire, qu'en tenant compte du signe des quantités $\alpha, \beta, x, y, X, Y$, elles sont toujours vérifiées. Elles constituent donc les formules de transformation, quand on transporte des axes donnés, parallèlement à eux-mêmes.

47. Rotation des axes autour de l'origine. — Soient Ox et Oy les axes donnés ; pour définir les directions positives des nouveaux axes OX et OY nous supposerons que l'on donne les coordonnées de deux points P, Q situés sur ces semi-droites, à l'unité de distance. Nous donnerons à ces points le nom de *points directeurs* et, en désignant par α, β ; α', β' ; leurs coordonnées dans le système yOx, nous dirons que ces nombres sont les *paramètres directeurs de la transformation.*

Ayant fait la construction indiquée par la figure ci-après, on a :

$$\frac{BC}{\beta} = \frac{OB}{OP},$$

ou,

$$BC = \beta X.$$

D'autre part, les triangles semblables OQD, MBE donnent :

$$\frac{ME}{\beta'} = \frac{MB}{OQ},$$

ou,

$$ME = \beta' Y ;$$

et, si l'on remarque que l'on a :

$$y = ME + BC,$$

on trouve, finalement,

$$(A') \quad y = \beta X + \beta' Y.$$

Des considérations toutes semblables donnent aussi :

$$(B') \quad x = \alpha X + \alpha' Y.$$

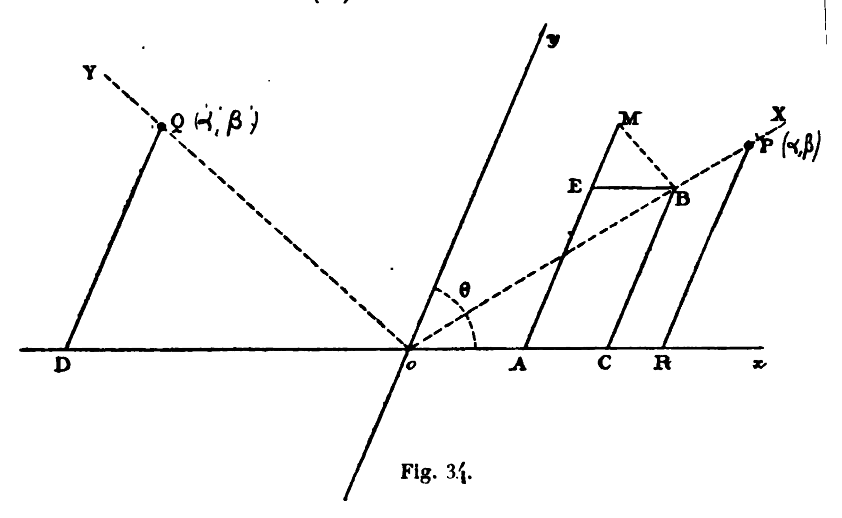


Fig. 34.

Ces formules sont générales, elles sont vérifiées pour un point quelconque du plan, quand on tient compte, bien entendu, du signe des quantités α, β; α', β'; x, y; X, Y ; elles constituent par conséquent les formules de transformation, quand on passe d'un système yOx, à un système YOX, de même origine.

48. Cas des axes rectangulaires. On rencontre assez fréquemment le cas particulier où les angles yOx, YOX, sont droits, l'un et l'autre. Cette transformation dépend d'un seul paramètre φ, que nous devons d'abord définir.

A cet effet, nous imaginons que la semi-droite Ox, tourne autour du point O, dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre, d'un angle φ ; elle représente alors et la position et la direction positive du nouvel axe OX. Supposons maintenant que l'on fasse tourner OX, dans le même sens, d'un

angle de 90°, on obtient une semi-droite OY qui représente la position et la direction positive du nouvel axe OY.

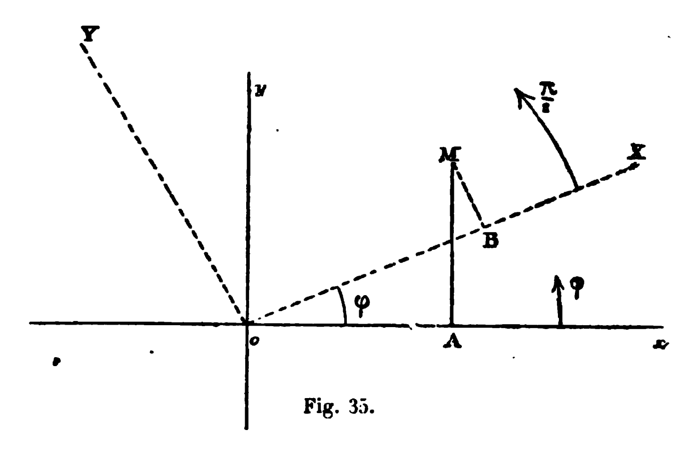


Fig. 35.

Dans ces conditions, les formules de transformation sont :

$$x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi,$$
$$y = X\sin\varphi + Y\cos\varphi.$$

Elle sont générales et peuvent, ou se déduire des formules démontrées dans le paragraphe précédent, ou s'établir directement en utilisant le théorème des projections qui a été vu dans la trigonométrie élémentaire.

49. Relation entre les paramètres directeurs. Les coordonnées α, β du point directeur ne sont pas des quantités indépendantes, quand on passe d'un système donné yOx, à un autre système YOX. En désignant par θ, l'angle des semi-droites Ox, Oy, on a, dans le triangle ORP (fig. 34),

$$\overline{OP}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{RP}^2 - 2OR.RP.\cos ORP,$$

ou,

$$1 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta.$$

C'est la relation que doivent vérifier les paramètres α, β, dans le système d'axes dont l'angle est égal à θ.

50. Calcul de l'angle des nouveaux axes. Le triangle OMA (fig. 34), donne :

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta,$$

Si nous désignons par θ', l'angle YOX, nous avons, de même :

$$\overline{OM}^2 = X^2 + Y^2 + 2XY \cos \theta' ;$$

et, par comparaison,

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta = X^2 + Y^2 + 2XY \cos \theta'.$$

Les formules (A) et (B), établies plus haut, donnent l'identité :

$$(\alpha X + \alpha' Y)^2 + (\beta X + \beta' Y)^2 + 2(\alpha X + \alpha' Y)(\beta X + \beta' Y) \cos \theta$$
$$= X^2 + Y^2 + 2XY \cos \theta'.$$

En égalant les coefficients de X^2 et de Y^2, on retrouve la relation entre les paramètres directeurs ; mais cette identité donne encore l'égalité :

$$\cos \theta' = \alpha\alpha' + \beta\beta' + (\alpha\beta' + \beta\alpha') \cos \theta.$$

Cette formule permet de calculer l'angle des nouveaux axes.

51. Théorème. *L'ordre d'une courbe n'est pas changé par la transformation des coordonnées.* Soit $f(x, y) = 0$, l'équation d'une courbe d'ordre m, en supposant que $f(x, y)$ désigne une forme algébrique entière, du degré m en x et y. Les formules (A) et (B), (§ 46) ; et les formules (A' et B'), (§ 47) prouvent qu'une forme algébrique, entière, du degré m en x et y, ne peut pas être d'un degré supérieur à m, après la transformation.

Il reste à reconnaître que cette transformation ne peut pas abaisser le degré de la forme considérée.

En effet, si cet abaissement pouvait se produire, en effectuant la transformation inverse, en revenant du système X, Y

au système ancien x, y, l'ordre ne pouvant pas s'élever par cette transformation, au lieu de retrouver la forme proposée, laquelle est du degré m, on aboutirait à une forme algébrique d'un degré inférieur à m. Ceci implique une contradiction, et, en résumé, l'ordre d'une courbe ne peut être ni élevé, ni abaissé, par un changement d'axes.

52. Théorème. *Une courbe d'ordre m est coupée par une droite quelconque en m points, réels ou imaginaires.*

Soit U la courbe donnée, et soit :

$$(1) \quad f(x, y) = 0,$$

son équation. Considérons une droite quelconque Δ, dans le plan de U, droite ayant pour équation,

$$(2) \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Nous dirons que U et Δ ont m points communs, réels ou imaginaires, pour exprimer que les équations (1) et (2) admettent, pour x et y, m solutions de la forme $\alpha + \beta i$.

Pour démontrer la propriété énoncée, prenons, sur Δ, un point dont nous désignerons les coordonnées par x_0, y_0 et transportons les axes, parallèlement à eux-mêmes, en ce point. L'équation (1) devient :

$$(1') \quad f(x_0 + X, y_0 + Y) = 0,$$

et l'équation (2) représentant une droite, passant par l'origine, prend la forme (§ 36) :

$$(2') \quad AX + BY = 0.$$

En développant l'équation (1'), on obtient un résultat qui peut être écrit de la manière suivante :

$$(1'') \quad \varphi_m(X, Y) + \varphi_{m-1}(X, Y) + \ldots + \varphi_0 = 0.$$

Dans cette notation, que nous emploierons dans plusieurs circonstances, $\varphi_k(X, Y)$ désigne une forme algébrique entière, homogène, et du degré k par rapport aux lettres X et Y. On

doit remarquer, d'ailleurs, que φ_m (X, Y) n'est pas identiquement nul, puisque $f(x, y)$ est du degré m et que la transformation de coordonnées ne peut pas modifier l'ordre de la courbe.

Cherchons le nombre des solutions communes aux équations (2') et (1").

Nous ne pouvons pas supposer que A et B soient nuls simultanément ; faisons donc l'hypothèse suivante : $B \neq 0$. L'équation (2') donne :

$$(2'') \quad Y = tX;$$

en posant $t = -\frac{A}{B}$.

Transportons cette valeur de Y dans l'équation (1"); celle-ci devient :

$$(A) \quad X^m \varphi_m(1, t) + X^{m-1} \varphi_{m-1}(1, t) + \dots + \varphi_0 = 0.$$

Le polynôme $\varphi_m(1, t)$ n'est pas identiquement nul ; nous l'avons fait remarquer tout à l'heure. L'équation (A) est donc du degré m, quand on ne prend pas pour t, une des racines de l'équation :

$$\varphi_m(1, t) = 0.$$

Il y a donc, *en général*, m solutions, réelles ou imaginaires, à l'équation (A) ; et, par suite, m points communs (dans le sens que nous avons attaché à cette expression) à la courbe du degré m, et à une droite située dans son plan.

53. Remarque. Les formules que nous avons données, plus haut, pour effectuer la transformation du système d'axes yOx, au système YOX, exigent que l'on connaisse les coordonnées des points directeurs. Dans la plupart des cas, ces paramètres ne sont pas donnés ; leur connaissance dépend de la situation des nouveaux axes, relativement aux anciens, et ils doivent être calculés, avant que l'on puisse appliquer les formules que nous avons démontrées.

Prenons, par exemple, un système d'axes yOx, les directions positives Ox, Oy faisant un angle de 60°, et supposons que l'on fasse tourner, dans le sens positif (§ 9), la semi-droite Ox d'un angle de 30°, et la semi-droite Oy, d'un angle égal à 60°. Nous obtenons ainsi deux nouveaux axes OX, OY bien déterminés, de position, et de direction. Si nous prenons sur OX et sur OY :

$$OP = OQ = 1,$$

nous trouvons pour les coordonnées du point P :

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{1}{3}},$$

et, pour celle du point Q,

$$-\alpha' = \beta' = 1.$$

Les formules de transformation sont donc :

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}}X - Y,$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{3}}X + Y.$$

SIXIÈME LEÇON

THÉORIE ANALYTIQUE DE LA LIGNE DROITE

54. Théorème. *Lorsque les coordonnées d'un point mobile* M, *vérifiant constamment l'équation du premier degré, en x et y,*

$$(1) \quad Ax + By + C = 0,$$

Ce point M *se meut sur une ligne droite.*

Cette proposition est évidente lorsque l'un des coefficients A, ou B, est nul. Mais prenons le cas général ; supposons $A \gtrless 0$ et $B \gtrless 0$, et soient :

$$x_1, y_1 ; \quad x_2, y_2 ; \quad x_3, y_3$$

trois solutions différentes de l'équation (1). Nous allons montrer que les points correspondants M_1, M_2, M_3, sont placés en ligne droite.

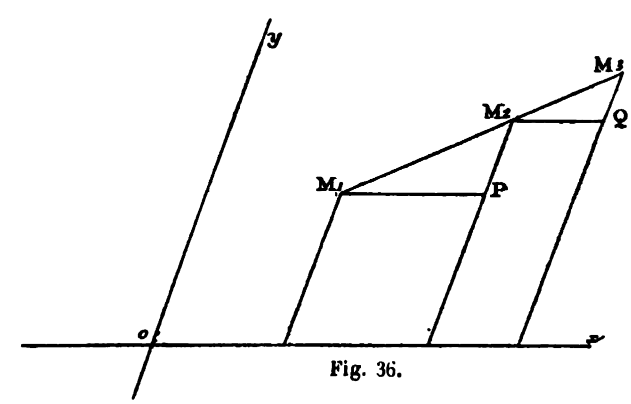


Fig. 36.

Des relations :

$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0,$$
$$Ax_3 + By_3 + C = 0 ;$$

on déduit :

$$A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) = 0,$$

et,

$$A(x_2 - x_3) + B(y_2 - y_3) = 0.$$

On a donc, puisque A et B sont différents de zéro,

$$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2}.$$

Les deux triangles M_1PM_2, M_2QM_3 sont donc semblables, comme ayant un angle égal, compris entre côtés proportionnels. Ainsi les angles M_2M_1P, M_3M_2Q sont égaux et ceci prouve que les trois points M_1, M_2, M_3 sont en ligne droite.

En supposant $B \neq 0$, l'équation (1) détermine y, quand on donne à la variable x une valeur arbitraire. Il y a donc une infinité de solutions réelles pour l'équation (1), et toutes ces solutions donnent des points qui, d'après ce que nous venons de montrer, sont placés sur une droite bien déterminée, droite qui joint les deux points qui correspondent à deux solutions particulières de l'équation donnée.

55. Théorème. *Lorsqu'un point est mobile sur une droite donnée, ses coordonnées sont des nombres variables, qui vérifient constamment une équation du premier degré :*

$$Ax + By + C = 0.$$

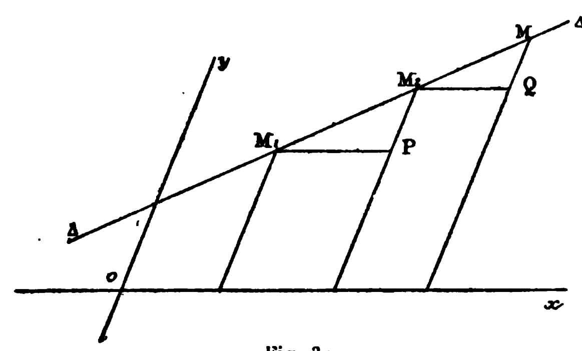


Fig. 37.

Cette proposition est évidente lorsque le point est supposé mobile sur une droite parallèle à l'un des axes de coordonnées.

Considérons le cas général, celui où la droite donnée Δ n'est parallèle ni à Ox, ni à Oy. Supposons qu'elle soit déterminée par deux points M_1 et M_2 et soit M un point quelconque de Δ; x, y désignant ses coordonnnées, les triangles semblables M_1PM_2, M_2QM_1 donnent :

$$\frac{x_2 - x_1}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y - y_2},$$

ou,

$$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) = y_1x_2 - x_1y_2.$$

Cette relation est générale, c'est-à-dire qu'elle est vérifiée, quelle que soit la position du point M, sur Δ. On remarquera d'ailleurs que les coefficients d'x et d'y sont différents de zéro puisque l'on suppose que Δ n'est parallèle ni à Ox, ni à Oy.

56. Différentes formes de l'équation d'une droite. Nous venons de voir que les coordonnées d'un point mobile sur une droite vérifiaient constamment l'équation :

$$(1) \quad Ax + By + C = 0,$$

que nous nommerons *équation générale de la droite.*

En faisant usage de la *notation abrégée*, nous la représenterons aussi quelquefois par :

$$(2) \quad U = 0;$$

en supposant,

$$U \equiv Ax + By + C.$$

Mais il existe encore pour l'équation, d'une droite, d'autres formes que nous emploierons fréquemment et que nous établirons ici.

1re Forme. Supposons que l'on ait $B \not\equiv 0$, l'équation (1) peut être écrite ainsi :

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

En posant :

$$m = -\frac{A}{B}, \quad n = -\frac{C}{B},$$

on a,

$$(3) \quad y = mx + n.$$

Cette équation représente toutes les droites du plan, excepté celles qui sont parallèles à oy.

2° Forme. Supposons que A, B, C, soient différents de zéro. L'équation (1) peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1,$$

ou,

$$(4) \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

en posant,

$$p = -\frac{C}{A}, \quad q = -\frac{C}{B}.$$

Dans la formule (4), p et q désignent des quantités qui ne sont ni nulles, ni infinies.

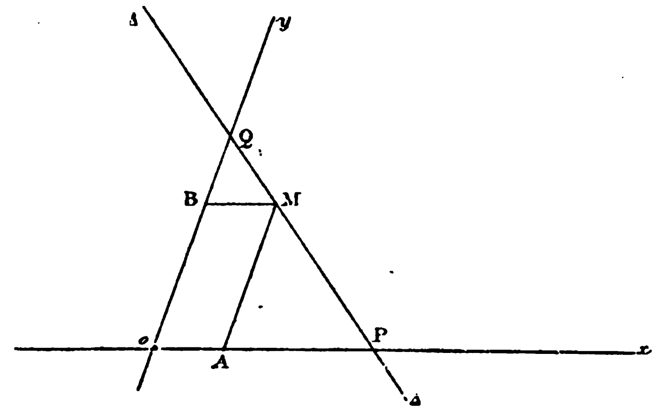


Fig. 38.

Si la droite donnée Δ rencontre l'axe Ox au point P, et l'axe Oy au point Q, on remarquera que l'on a :

$$OP = p, \quad OQ = q.$$

On peut d'ailleurs établir directement l'équation (4) en remarquant que l'on a :

$$\frac{x}{p} = \frac{MQ}{PQ}, \quad \frac{y}{q} = \frac{MP}{PQ};$$

mais $MP + MQ = PQ$, et l'on trouve, finalement :

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

Cette formule est d'ailleurs générale ; elle est vérifiée par les coordonnées du point M, quelle que soit la position de ce point sur la droite donnée.

La forme (4) représente toutes les droites du plan, excepté celles qui passent par l'origine.

3e Forme. Abaissons de l'origine une perpendiculaire OH sur la droite Δ; posons $OH = h$ et projetons sur OH le contour brisé OAMH ; nous avons, par une formule connue,

$$(5) \quad x \cos \alpha + y \cos (\theta - \alpha) = h.$$

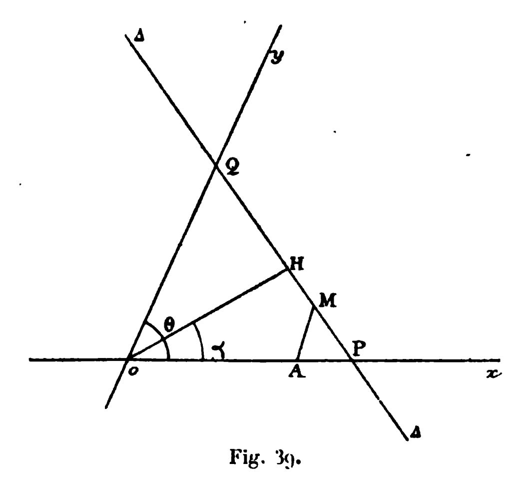


Fig. 39.

Cette équation est d'ailleurs vérifiée par les coordonnées du point M, quelle que soit la position de ce point sur Δ ; c'est une nouvelle forme de l'équation de la droite.

On peut remarquer que, dans le cas où les axes donnés sont rectangulaires, cette équation prend la forme suivante :

$$(5') \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha = h.$$

57. Définition du coefficient angulaire. Lorsque l'équation d'une droite est mise sous la forme :

$$y = mx + n,$$

nous dirons que *m est le coefficient angulaire de la droite.* Pour justifier cette dénomination, nous allons montrer que la valeur de ce paramètre détermine la direction de la droite.

Disons d'abord comment nous fixerons la direction positive d'une droite Δ. Lorsque Δ est parallèle à l'un des axes de coordonnées, sa direction positive est celle de l'axe même auquel elle est supposée être parallèle. Si Δ est une droite quelconque, elle coupe l'axe Ox en un point A, et nous prendrons pour direction positive de $\Delta\Delta'$ celle de la semi-droite, qui a pour extrémité le point A, et qui est située dans la même région du plan, par rapport à xx', que la semi-droite Oy.

Cette convention étant faite, l'inclinaison d'une droite Δ avec xx' est l'angle α, angle bien déterminé, que fait la direction positive de Δ avec la semi-droite Ox.

Si nous cherchons les points d'intersection de la droite Δ avec les axes, nous avons :

$$OB = n, \text{ et } OA = -\frac{n}{m}.$$

Nous cherchons $m \neq o$; si m était nul, la droite Δ serait parallèle à Ox, son équation se réduisant à la forme $y = n$, on aurait donc, dans ce cas, $\alpha = o$.

Revenons au cas général. Le triangle OAB donne la relation :

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)}$$

Sur la figure, OB représente une quantité négative ; il faut donc observer que, dans la relation précédente, qui a lieu pour les valeurs absolues des lignes OA et OB, l'on doit remplacer OB par — n. Ainsi, l'on a :

$$m = \frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)}.$$

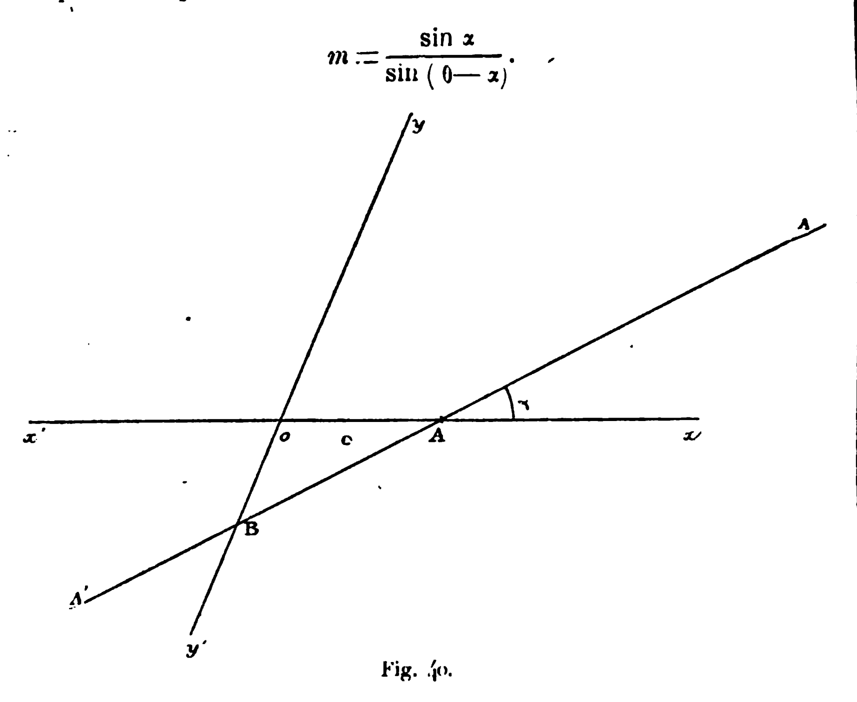


Fig. 40.

On déduit de cette relation,

$$\text{(A)} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \sin \theta}{1 + m \cos \theta}.$$

Si l'on suppose que la valeur de m soit donnée, cette formule détermine, entre 0 et π, un certain angle ; cet angle est bien déterminé et l'expression de *coefficient angulaire*, que nous avons appliquée au paramètre m, se trouve ainsi expliquée.

58. Droites parallèles. Il résulte de ce qui précède que si deux droites sont parallèles, leurs coefficients angulaires sont égaux, et réciproquement.

Si l'on considère une droite passant par l'origine et dont le coefficient angulaire soit égal à m ; son équation est :

$$y = mx.$$

Toute droite parallèle à celle-ci a donc pour équation,

$$y = mx + \lambda;$$

et, quand on suppose que λ varie, cette équation représente toutes les droites parallèles à la direction donnée.

59. Droites perpendiculaires. Lorsque deux droites Δ, Δ' sont perpendiculaires, les angles α et α', formés par leurs directions positives, avec Ox, vérifient la relation :

$$\alpha - \alpha' = \frac{\pi}{2}.$$

On sait d'ailleurs que,

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha'}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'}.$$

On a donc, dans le cas particulier qui nous occupe,

$$1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha' = 0.$$

Désignons par m et m' les coefficients angulaires de Δ et de Δ', la formule (A) donne :

$$(1 + m\cos\theta)(1 + m'\cos\theta) + mm'\sin^2\theta = 0,$$

ou,

$$\text{(B)} \quad 1 + (m + m')\cos\theta + mm' = 0.$$

C'est la condition de perpendicularité de deux droites ; cette condition est d'ailleurs nécessaire et suffisante.

On doit remarquer que *dans le cas où les axes sont rectangulaires, les coefficients angulaires de deux directions rectangulaires ont un produit égal à* -1.

60. Angle de deux directions. Soient deux droites Δ, Δ', ayant pour équation, respectivement,

$$(1) \qquad ax + by + c = 0,$$
$$(2) \qquad a'x + b'y + c' = 0.$$

Menons par l'origine deux semi-droites δ, δ', parallèles aux directions positives de Δ et de Δ' et désignons par V l'angle de ces deux semi-droites, angle qui est bien déterminé.

Lorsque la semi-droite Ox tourne, dans le sens positif, autour de l'origine, elle vient coïncider successivement avec les semi-droites δ, δ' ; nous supposerons qu'elle rencontre d'abord δ', puis δ.

Dans ces conditions, on a toujours,

$$V = \alpha - \alpha',$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tg} V = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha'}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'}.$$

Les équations (1) et (2) donnent d'ailleurs, pour les coefficients angulaires des droites Δ, Δ' :

$$m = -\frac{a}{b}, \quad m' = -\frac{a'}{b'}.$$

On a donc :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-a \sin\theta}{b - a\cos\theta}, \quad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{-a'\sin\theta}{b' - a'\cos\theta};$$

et, finalement,

$$(C) \quad \operatorname{tg} V = \frac{(ba' - ab')\sin\theta}{aa' + bb' - (ab' + ba')\cos\theta}.$$

En appliquant cette formule, on doit observer que le coefficient a' désigne le coefficient du terme en x, dans l'équation de celle des deux droites données qui fait, avec la semi-droite Ox, le plus petit angle.

Si les directions proposées sont celles des deux droites qui correspondent à l'équation :

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy = 0\,;$$

en appliquant la formule (C), puis en tenant compte de l'identité :

$$(ax + by)(a'x + b'y) = Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy,$$

on trouve

$$\operatorname{tg} V = \pm \frac{2 \sin \theta \sqrt{B''^2 - AA'}}{A + A' - 2B'' \cos \theta}.$$

Remarque I. Il résulte de cette formule que si l'on veut exprimer que l'équation :

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy = 0,$$

représente deux droites rectangulaires, on écrira la relation suivante :

$$A + A' - 2B'' \cos \theta = 0.$$

Remarque II. Lorsqu'on cherche à exprimer que deux droites ont des directions rectangulaires, on peut appliquer l'égalité (B), si les coefficients angulaires sont en évidence. Dans le cas contraire, on emploie la condition :

$$AA' + BB' - (AB' + BA') \cos \theta = 0,$$

qui découle, soit de la formule (C), soit de la relation (B), lorsqu'on remplace, dans celle-ci, m et m', respectivement par $-\frac{A}{B}$ et $-\frac{A'}{B'}$.

61. Droite passant par un point x', y'. L'équation générale des droites étant prise sous la forme :

$$Ax + By + C = 0,$$

si l'on exprime que cette équation est vérifiée par $x = x'$ $y = y'$, on a :

$$Ax' + By' + C = 0,$$

et, par suite,

$$A(x - x') + B(y - y') = 0.$$

C'est l'équation générale des droites passant par le point dont les coordonnées sont x' et y'.

Remarque. Lorsque le point donné est déterminé par l'intersection de deux droites correspondant aux équations $P = 0$, $Q = 0$, l'équation générale des droites passant par le point commun est $\alpha P + \beta Q = 0$; α et β étant arbitraires.

Cette formule, facile à vérifier, s'applique encore au cas particulier où le point est à l'infini, ce qui arrive lorsque les droites proposées sont parallèles.

62. Droite passant par deux points x', y' ; x'', y''. L'équation générale des droites passant par le premier point est, comme nous venons de le montrer :

$$A(x - x') + B(y - y) = 0.$$

Exprimons que cette équation admet la solution : $x = x''$ $y = y''$, nous avons :

$$A(x'' - x') + B(y'' - y') = 0.$$

Les coefficients A et B n'étant pas nuls, à la fois, nous avons donc :

$$\begin{vmatrix} x'' - x', & y'' - y' \\ x - x', & y - y' \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation donne :

$$(1) \quad \frac{x - x'}{x' - x''} = \frac{y - y'}{y' - y''},$$

ou encore,

$$(2) \quad \frac{x - x''}{x'' - x'} = \frac{y - y''}{y'' - y'}.$$

De ces deux égalités, on peut encore déduire la suivante :

$$(3) \quad \frac{x - x'}{x'' - x} = \frac{y - y'}{y'' - y}.$$

63. Points en ligne droite. Il résulte de ces formules que si les trois points x', y' ; x'', y'' ; x''', y''' ; sont en ligne droite, on a la relation :

$$(1) \quad (x''' - x'')(y'' - y') = (y''' - y'')(x'' - x'),$$

Réciproquement, si cette égalité a lieu, les trois points considérés sont en ligne droite.

Mais on peut établir plus directement cette condition et la donner sous une forme plus symétrique, comme nous allons le montrer.

Soit :

$$Ax + By + C = 0,$$

l'équation de la droite qui passe par les trois points donnés. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} Ax' + By' + C &= 0, \\ Ax'' + By'' + C &= 0, \\ Ax''' + By''' + C &= 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons considérer ces équations comme étant linéaires et homogènes, par rapport aux lettres A, B, C ; elles sont d'ailleurs vérifiées par des valeurs de A, B et C, qui ne sont pas toutes nulles, et nous avons (Alg., § 105),

$$\begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est, sous une autre forme, la relation (1).

64. Surface du triangle x', y' ; x'', y'' ; x''', y'''. La condition que nous venons de trouver et qui exprime que trois points donnés sont en ligne droite, est susceptible d'une interprétation géométrique remarquable. Nous allons, à cet effet, démontrer que la surface S, du triangle formé par les trois points x', y' ; x'', y'' ; x''', y''' ; est donnée par la formule :

$$S = -\frac{1}{2}\sin\theta \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix}.$$

Soient M′, M″, M‴ les points donnés, on a :

$$2S = M'P'M''P'' + M''P''M'''P''' - M'P'M'''P''',$$

et, par conséquent,

$$\frac{2S}{\sin\theta} = (y''+y')(x''-x') + (y''+y''')(x'''-x'') - (y'+y''')(x'''-x').$$

En développant les calculs, on trouve :

$$\frac{2S}{\sin\theta} = x'(y'''-y'') + x''(y'-y''') + x'''(y''-y'),$$

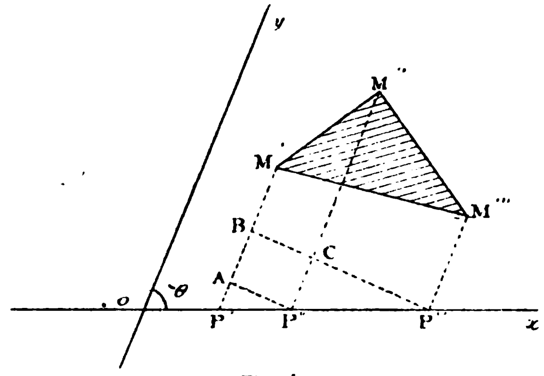


Fig. 41.

ou, enfin,

$$(M) \quad S = -\frac{1}{2}\sin\theta \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix}.$$

Cette formule est générale, elle est vérifiée par les coordonnées de trois points quelconques pris dans le plan yOx ; il faut pourtant, pour éviter l'ambiguïté du signe, convenir que si l'on imagine le cercle circonscrit au triangle M′, M″, M‴, puis un mobile parcourant cette circonférence, dans le sens des aiguilles d'une montre, et partant du point dont les coordonnées sont désignées par x', y' ; on prendra pour x'', y'' les coordonnées du point qui sera rencontré, le premier, par ce mobile.

65. Surface du polygone $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots x_n, y_n$. La formule que nous venons de trouver peut s'écrire :

$$-\frac{2S}{\sin\theta} = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x''' & y''' \\ x' & y' \end{vmatrix}.$$

Cette forme remarquable donnée à l'expression de S s'applique à un polygone de n sommets ; c'est ce que nous allons montrer.

Nous admettons que la formule ait été vérifiée pour un polygone convexe de $(n-1)$ sommets et nous allons reconnaitre qu'elle est encore applicable à un polygone convexe de n sommets. Si nous établissons ce point, la formule sera généralisée.

Prenons donc n points $A_1, A_2, \dots A_{n-1}, A_n$; et désignons les coordonnées de ces points par $x_1, y_1; \dots x_n, y_n$.

Les $(n-1)$ points $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$, forment un polygone fermé dont la surface S' est donnée, nous le supposons, par la formule :

$$(1) \quad -\frac{2S'}{\sin\theta} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}.$$

Le polygone $A_1, A_2, \dots A_n$ étant convexe et les sommets étant rencontrés par un point mobile, parcourant son périmètre, dans l'ordre marqué par les indices, nous voyons que le mobile qui est supposé décrire la circonférence circonscrite au triangle A_1, A_{n-1}, A_n rencontre ces points dans l'ordre où nous venons de les écrire. En désignant par S'' la surface du triangle A_1, A_{n-1}, A_n, nous avons donc :

$$(2) \quad -\frac{2S''}{\sin\theta} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_{n-1} & y_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}.$$

Les formules (1) et (2) donnent, par combinaison, et en désignant par S la surface $A_1 A_2 \dots A_n$,

$$-\frac{2S}{\sin\theta} = \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 y_2 \\ x_3 y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{n-1} y_{n-1} \\ x_n \ y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n y_n \\ x_1 y_1 \end{vmatrix}$$

66. Si nous revenons à la formule (M) (§ 64), et si nous observons que trois points en ligne droite forment un triangle de surface nulle, nous avons :

$$\begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous retrouvons ainsi la condition, précédemment établie, et qui exprime que trois points donnés sont situés en ligne droite.

SEPTIÈME LEÇON

THÉORIE ANALYTIQUE DE LA LIGNE DROITE (*Suite*).

67. Équations d'un segment de droite. (*Premières formules.*) Soient A et B, deux points donnés ; x_0, y_0 ; x_1, y_1 leurs coordonnées : soient enfin x, y celles d'un point M, supposé mobile sur la droite AB. Les formules (3) (§ 62), donnent :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x} = \frac{y - y_0}{y_1 - y}.$$

Si nous désignons par λ la valeur commune de ces rapports, nous obtenons, pour x et y, les valeurs suivantes :

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}.$$

Mais on donne à ces expressions une forme plus symétrique en employant les *coordonnées homogènes*, que nous allons définir.

Lorsque x et y désignent les coordonnées cartésiennes d'un point M, on peut, sans inconvénient, les représenter par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$; pourvu que l'on convienne que z soit égal à l'unité. Nous dirons alors que x, y, z, sont les coordonnées homogènes du point M.

Les formules que nous venons de trouver peuvent s'écrire, sous la forme symétrique :

$$(1) \quad \frac{x}{x_0 + \lambda x_1} = \frac{y}{y_0 + \lambda y_1} = \frac{z}{z_0 + \lambda z_1},$$

en supposant,

$$z = z_0 = z_1 = 1.$$

Ces formules offrent l'avantage d'exprimer les coordonnées d'un point, mobile sur une droite, au moyen d'un seul paramètre variable λ. A chaque valeur de λ, correspond un point M, bien déterminé sur AB, et si l'on veut limiter la mobilité du point M sur cette droite, si l'on veut que ce point parcoure seulement un segment donné M'M" ; en désignant par λ' et λ'' les valeurs de λ qui correspondent à ces points M', M", on fera varier λ dans l'intervalle λ', λ''.

Le paramètre λ est susceptible d'une interprétation géométrique qu'il est utile de connaître. Il représente, abstraction faite du signe, le rapport des distances du point M aux points A et B, et l'on a $\lambda = \frac{MA}{MB}$, A désignant celui des deux points qui a pour coordonnées $x_0\ y_0\ z_0$. Si l'on suppose que le point M soit situé entre les deux points donnés, les différences $x - x_0$, $x_1 - x$ ont le même signe ; par conséquent, λ est positif. En précisant davantage, on voit que λ varie, de 0 à $+\infty$, quand le point M parcourt le segment AB ; de $-\infty$ à -1, quand il est mobile sur le segment indéfini qui a pour extrémité le point B, et dont la direction est opposée à celle de BA ; enfin, de 0 à -1, quand il décrit le troisième segment.

68. Théorème. *Soit $f(x, y, z) = 0$, l'équation d'une courbe Δ ; si l'on considère deux points* M', M" *dans le plan de Δ, points dont les coordonnées homogènes sont respectivement x', y', z' ; x'', y'', z'' si le segment* M'M" *contient un seul point de Δ, le rapport $\frac{f(x', y', z')}{f(x'', y'', z'')}$ est négatif ; il est, au contraire, positif, si le segment* M'M", *ne renferme aucun point de Δ.*

Considérons en effet un point M, sur le segment M'M", soient $x, y\ z$, ses coordonnées ; $f(x, y, z) = 0$ est l'équation de la courbe Δ, quand on a remplacé x et y, respectivement, par

$\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, et quand on a chassé les dénominateurs; de telle sorte que $f(x,y,z)$ représente une forme entière et homogène des lettres x,y,z. Nous désignerons par m le degré de cette forme.

Cherchons l'intersection de la droite M'M" avec Δ; les formules U donnent, pour la déterminer, l'équation :

$$f(x_0 + \lambda x_1, y_0 + \lambda y_1, z_0 + \lambda z_1) = 0,$$

équation dans laquelle l'inconnu est le paramètre λ. Si nous développons cette équation par la formule de Taylor (Alg. § 311), le terme indépendant de λ est $f(x_0, y_0, z_0)$. On voit aussi, en effectuant le développement de :

$$f(\lambda x_1 + x_0, \lambda y_1 + y_0, \lambda z_1 + z_0),$$

que le terme du degré le plus élevé en λ est :

$$f(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1),$$

ou,

$$\lambda^m f(x_1, y_1, z_1),$$

D'après cette double remarque, l'équation en λ est :

$$(1) \quad \lambda^m f(x_1, y_1, z_1) + \dots + f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Dans cette équation, les termes extrêmes qui, seuls, ont été mis en évidence, sont d'ailleurs différents de zéro, car nous ne supposons pas que les points M' et M", que nous considérons, soient situés sur Δ.

Ceci posé, s'il existe un seul point de Δ sur le segment M'M", l'équation (1) doit avoir une seule racine positive et son premier membre doit présenter un nombre impair de variations; $f(x_1, y_1, z_1)$ et $f(x_0, y_0, z_0)$ ont donc des signes contraires. Au contraire, s'il n'existe aucun point réel de Δ sur le segment M'M", l'équation (1) n'admet aucune racine positive réelle; le nombre de ses variations est un nombre pair ; par suite, $f(x_1 y_1 z_1)$ et $f(x_0 y_0 z_0)$ ont le même signe.

69. Il résulte du théorème précédent que la fonction $F(x,y)$ ne peut changer de signe que si l'on traverse là courbe Δ, qui correspond à l'équation :

$$F(x,y) = 0 :$$

car l'on a :

$$f(x,y,z) = F(x,y), \quad (\text{pour } z = 1).$$

Ainsi, Δ sépare le plan en diverses régions ; mais si l'on imagine un point M mobile dans l'une d'elles, la fonction $F(x,y)$ conserve un signe invariable, tant que M ne quitte pas la région considérée. Il y a donc, dans le plan d'une courbe, des régions pour lesquelles la fonction $F(x,y)$ est constamment positive et que l'on peut nommer les *régions positives* du plan de la courbe ; et d'autres régions pour lesquelles $F(x,y)$ a, au contraire, une valeur constamment négative et que, par opposition, nous nommerons *régions négatives*.

Pour distinguer les régions positives et négatives, on donne à x et à y, des valeurs très simples : $x = 0$, $y = 0$; ou $x = y = t$; t étant très grand ; ou, encore, $x = \varepsilon$ $y = \lambda$; ε étant très petit, et λ très grand ; de telle sorte enfin, que, pour le point considéré, le signe de $F(x, y)$ apparaisse nettement. Une fois que l'on a reconnu le signe d'une région, on détermine immédiatement le signe des autres régions, en supposant un mobile décrivant le plan et traversant successivement les différents bras de la courbe.

Par exemple, si l'on considère l'équation $f(x, y) = 0$,

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy, \quad (a > 0).$$

Cette courbe qui est le *folium de Descartes*, et que nous étudierons plus loin, a la forme indiquée par la figure ci-dessous.

Dans cette figure, les régions ombrées sont les régions négatives.

Nous ferons, à ce propos, une dernière remarque pour faire observer que la démonstration que nous avons donnée au paragraphe précédent, exige qu'entre les points M', M'', il

n'existe qu'*un seul point de la courbe* Δ. Lorsque la droite M'M" est tangente à Δ au point M, la démonstration que nous venons de rappeler prouve que l'équation en λ que nous avons considérée ayant deux racines égales, la fonction a le même signe aux points M' et M". De même, si, dans la

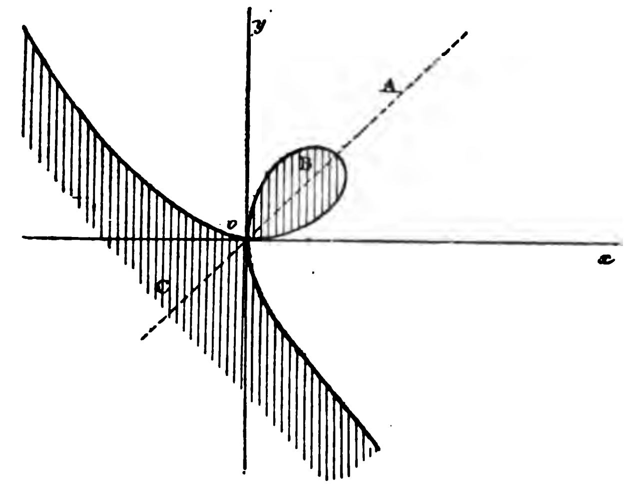


Fig. 42.

figure précédente, on passe de la région B à la région C, en franchissant le point O, quoique l'on ait, réellement, traversé la courbe au point O, la fonction $f(x, y)$, n'a pas changé de signe parce qu'on a coupé deux bras de la courbe et l'équation en λ dont nous avons parlé plus haut a, dans ce cas, deux racines égales, pour $x = 0$ et $y = 0$.

Remarques. — Lorsqu'on applique le théorème précédent à une droite Δ, on voit que celle-ci partage le plan seulement en deux régions, l'une positive, l'autre négative.

70. Equation d'un segment de droite. (*Secondes formules.*) Dans les formules (U), établies plus haut, nous avons imaginé que la droite considérée était déterminée par deux points ; dans celles que nous allons donner maintenant, nous supposerons que la droite est définie par un point M_0 (x_0, y_0) et par ses paramètres directeurs (α, β).

Prenons sur Δ un point M et désignons par x, y ses coordonnées; soit P le point directeur de Δ, et soient α, β ses coordonnées. En posant $M_0M = \rho$, et en remarquant que $OP = 1$, les triangles semblables MM_0A, OPB donnent :

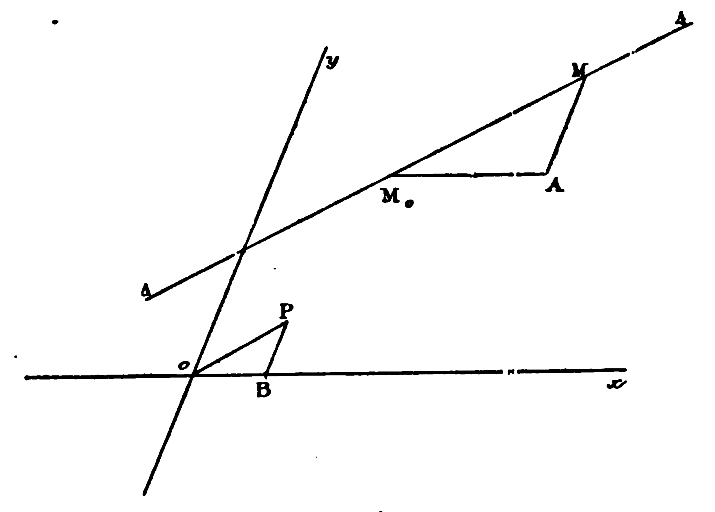


Fig 43.

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{\rho}{1};$$

On a donc :

$$\text{(V)} \quad \begin{aligned} x &= x_0 + \alpha\rho, \\ y &= y_0 + \beta\rho; \end{aligned}$$

et ces formules expriment les coordonnées d'un point mobile sur une droite, en fonction du seul paramètre variable ρ. Elles sont générales et conviennent à toutes les positions des points M, M_0 ; mais en convenant, comme nous le faisons ici, de considérer ρ comme positif ou négatif suivant que le segment M_0M a la direction positive ou négative de la droite.

Si l'on veut que le point M parcoure, sur la droite donnée, un segment $M'M''$; en posant $M_0M' = \rho'$, et $M_0M'' = \rho''$, on fera varier ρ, depuis ρ' jusqu'à ρ'', et l'on aura ainsi les valeurs

d'x et d'y, pour tous les points du segment M'M'', et seulement pour ces points.

71. Équations générales. — Lorsqu'une courbe mobile doit vérifier constamment certaines conditions géométriques, si l'équation :

$$(1)\quad f(x, y, \alpha, \beta, \ldots) = 0,$$

dans laquelle α, β, ... désignent des paramètres variables, est telle que toute courbe du réseau proposé puisse être représentée par cette équation, pour des valeurs particulières et convenablement choisies des paramètres, et si, réciproquement, à toute équation (1) correspond une courbe vérifiant les conditions imposées, nous dirons que (1) est *l'équation générale des courbes du réseau proposé.*

72. Théorème. *Si* $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, *représentent les équations de trois droites particulières d'un plan, non concourantes, toute droite du plan peut être représentée par l'équation :*

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0.$$

Posons :

$$(1)\quad \begin{aligned} P &= ax + by + cz, \\ Q &= a'x + b'y + c'z, \\ R &= a''x + b''y + c''z\,; \end{aligned}$$

et soit :

$$mx + ny + pz = 0,$$

une droite Δ, dans le plan considéré. Nous allons montrer que l'on peut disposer des paramètres α, β, γ de façon que l'on ait :

$$\alpha(ax + by + cz) + \beta(a'x + b'y + c'z) + \gamma(a''x + b''y + c''z) \\ = mx + ny + pz.$$

Pour que cette identité soit vérifiée, il est nécessaire et suffisant que l'on ait :

$$(2)\quad \begin{aligned} a\alpha + a'\beta + a''\gamma &= m, \\ b\alpha + b'\beta + b''\gamma &= n, \\ c\alpha + c'\beta + c''\gamma &= p. \end{aligned}$$

Posons :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

et remarquons que l'on a $\Delta \gtrless 0$. En effet, si nous supposions $\Delta = 0$, les équations linéaires et homogènes $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, admettraient une infinité de solutions, z étant arbitraire, (Alg. § 106).

Alors, pour $z = 1$, on trouverait des valeurs d'x et d'y vérifiant les équations (1) ; les droites (1) seraient donc concourantes ; ce que nous ne supposons pas.

Cette remarque étant faite, si l'on observe que Δ est précisément le déterminant des équations (2), on voit donc que celles-ci admettent pour α, β, γ des valeurs bien déterminées, non infinies, et qui ne sont pas toutes nulles ; si m, n, p ne sont pas, eux-mêmes, tous nuls.

Nous allons généraliser ce théorème dans le paragraphe suivant.

73. Théorème. *Toute courbe du degré m, située dans le plan du triangle dont les côtés ont pour équation, respectivement,*

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$

peut être représentée par l'équation :

$$F(P, Q, R) = 0,$$

$F(P, Q, R)$ *désignant une forme entière, et homogène, par rapport aux lettres* P, Q, R.

Les notations précédentes étant conservées, les équations (1) peuvent être résolues par rapport aux lettres x, y, z ; parce que le déterminant Δ n'est pas nul. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} x &= AP + BQ + CR, \\ y &= A'P + B'Q + C'R, \\ z &= A''P + B''Q + C''R. \end{aligned}$$

L'équation de la courbe étant :

$$f(x, y, z) = 0,$$

ces formules donnent bien, après substitution, une fonction entière, homogène, par rapport aux lettres P, Q, R.

74. Droites concourantes. Soient :

$$ax + by + cz = 0,$$
$$a'x + b'y + c'z = 0,$$
$$a''x + b''y + c''z = 0,$$

les équations des droites proposées ; si ces droites concourent au point dont les coordonnées sont x' et y', ces équations linéaires et homogènes admettent une solution non nulle :

$$x = x', \quad y = y', \quad z = 1.$$

On sait que, dans ce cas, le déterminant général Δ, est nul. La condition $\Delta = 0$ est donc nécessaire.

Nous avons d'ailleurs fait remarquer tout à l'heure que si l'on avait $\Delta \neq 0$, les droites (1), (§ 73), ne concouraient pas ; ainsi la condition $\Delta = 0$ est à la fois nécessaire et suffisante. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Pour que trois droites ayant pour équation, respectivement,

$$P = 0, \; Q = 0, \; R = 0,$$

soient concourantes, il est nécessaire et suffisant que le déterminant général Δ *des formes linéaires* P, Q, R, *soit nul.*

Nous ferons pourtant remarquer, qu'en appliquant le théorème précédent, il n'est pas toujours nécessaire de calculer Δ, calcul qui peut, dans certains cas, présenter quelques difficultés. En effet, si l'on a $\Delta = 0$, on sait (Alg. § 111) qu'il existe des paramètres λ, μ, ν, qui ne sont pas tous nuls et qui vérifient l'identité :

$$\lambda P + \mu Q + \nu R = 0.$$

Ainsi, pour constater que trois droites concourent, il suffit de reconnaître que l'on peut former, avec leurs équations,

une combinaison linéaire, homogène, identiquement nulle.

Par exemple, si l'on considère le triangle $M_1M_2M_3$ dont les côtés ont pour équation, respectivement,

$$\begin{aligned} P_1 &= A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ P_2 &= A_2x + B_2y + C_2 = 0, \\ P_3 &= A_3x + B_3y + C_3 = 0 ; \end{aligned}$$

on trouve facilement que la perpendiculaire abaissée du point M_1 sur la droite M_2M_3 a pour équation :

$$Q_1 = P_2(A_1A_3 + B_1B_3) - P_3(A_1A_2 + B_1B_2) = 0.$$

En permutant les indices, on obtient les équations des deux autres hauteurs,

$$Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0.$$

Pour vérifier que ces droites concourent, il suffit de remarquer que l'on a :

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 \equiv 0.$$

EXERCICES

1. *Démontrer qu'en posant :*

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \; D_1 = \begin{vmatrix} A_2B_2 \\ A_3B_3 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} A_3B_3 \\ A_1B_1 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix};$$

la surface S *du triangle dont les côtés ont pour équation, respectivement,*

$$\begin{aligned} P_1 &= A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ P_2 &= A_2x + B_2y + C_2 = 0, \\ P_3 &= A_3x + B_3y + C_3 = 0 ; \end{aligned}$$

est donnée par la formule :

$$\frac{2S}{\sin\theta} = \frac{D^2}{D_1D_2D_3}.$$

On suppose, bien entendu, que les droites concourent deux à deux, mais qu'elles ne concourent pas au même point.

Les quantités D, D_1, D_2, D_3 sont donc différentes de zéro. On prendra pour point de départ, dans ce calcul, la formule connue,

$$\frac{2S}{\sin\theta} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

et l'on remplacera les éléments de ce déterminant au moyen des formules :

$$\frac{x_3}{B_1C_2 - B_2C_1} = \frac{y_3}{C_1A_2 - C_2A_1} = \frac{z_3}{A_1B_2 - B_1A_2}, \text{ etc...}$$

2. *On considère une droite Δ, ayant pour équation :*

$$P = Ax + By + Cz = 0,$$

et deux points M_0, M_1 *ayant pour coordonnées, respectivement,* x_0, y_0, z_0 *;* x_1, y_1, z_1 *; la droite* M_0M_1 *rencontre Δ en un point M, démontrer que l'on a :*

$$\frac{MM_0}{MM_1} = -\frac{P_0}{P_1}.$$

En appelant x, y, z les coordonnées de M, on a (§ 67):

$$\frac{x}{x_0 + \lambda x_1} = \frac{y}{y_0 + \lambda y_1} = \frac{z}{z_0 + \lambda z_1},$$

et, par conséquent,

$$P_0 + \lambda P_1 = 0,$$

par suite,

$$\lambda = \frac{MM_0}{MM_1} = -\frac{P_0}{P_1}.$$

On peut déduire de cette relation diverses conséquences et notamment la démonstration analytique du théorème de Ménélaüs.

3. *Démontrer qu'en désignant par a, b, c, les longueurs des côtés d'un triangle et par* $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$ *les coordonnées de ses sommets, les coordonnées du centre du cercle inscrit peuvent se calculer par les formules :*

$$\frac{x}{ax' + bx'' + cx'''} = \frac{y}{ay' + by'' + cy'''} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Ces formules peuvent se trouver en remarquant : 1° que le pied de la bissectrice partage la base dans le rapport des côtés adjacents, 2° que le centre du cercle inscrit partage la bissectrice dans le rapport $\frac{r}{h}$, r étant le rayon du cercle inscrit et h la hauteur. On a d'ailleurs $\frac{r}{h} = \frac{a}{a+b+c}$ et on applique les formules (U), (§ 67).

4. *On considère un angle droit yox et l'on prend sur ox un point fixe* A, *sur oy un point fixe* B ; *soit* Δ *la perpendiculaire abaissée de* O *sur* AB *et soit* M *un point mobile sur* Δ ; *on joint* MA *et* MB *et à ces droites aux points* A *et* B *on élève des perpendiculaires qui se coupent en un point* I.

Démontrer que le lieu de ce point est une droite perpendiculaire sur AB.

5. *Démontrer que les perpendiculaires élevées au milieu des bissectrices des angles d'un triangle rencontrent les côtés opposés en trois points en ligne droite.*

HUITIÈME LEÇON

THÉORIE ANALYTIQUE DE LA LIGNE DROITE

(Suite et fin.)

75. Distance d'un point à une droite. Nous désignerons par θ l'angle des axes et nous déterminerons, d'abord, la distance de l'origine à la droite Δ, dont l'équation est :

$$(1) \quad Ax + By + C = 0.$$

Nous avons vu (§ 56), que l'équation d'une droite pouvait s'écrire encore sous la forme :

$$(2) \quad x \cos \alpha + y \cos (\theta - \alpha) = h,$$

h désignant la distance de l'origine, à la droite.

Les équations (1) et (2) représentant la même droite, on a :

$$\frac{A}{\cos \alpha} = \frac{B}{\cos (\theta - \alpha)} = \frac{-C}{h}.$$

Ces relations donnent :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B - A \cos \theta}{A \sin \theta}$$

et,

$$\cos \alpha = -\frac{Ah}{C}.$$

Appliquons, à ces formules, l'identité :

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

et nous avons

$$(1)\quad 1+\frac{(B-A\cos\theta)^2}{A^2\sin^2\theta}=\frac{C^2}{A^2h^2}$$

ou, finalement,

$$(2)\quad h=\pm\frac{C\sin\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}$$

Cette expression de h, bien que renfermant un double signe, donne pour h une valeur qui est toujours bien déterminée, pour les raisons que nous allons développer.

Remarquons d'abord que la quantité placée sous le radical pouvant se mettre sous la forme : $A^2\sin^2\theta+(B-A\cos\theta)^2$, indiquée d'ailleurs par l'égalité (1), cette quantité est une valeur qui ne peut être égale à zéro, si A et B ne sont pas nuls à la fois. Cette condition est évidemment remplie par toutes les droites du plan. Ainsi, la valeur de h est toujours réelle et finie et nous allons montrer qu'elle est bien déterminée. D'abord, le dénominateur ne pouvant pas être nul, h ne se présente jamais sous la forme $\frac{0}{0}$; enfin, h étant un nombre absolu, positif, on choisit, dans la formule (2), le signe $+$ quand l'origine est dans la région positive et le signe $-$ quand, au contraire, elle est placée dans la région négative qui correspond à la droite donnée.

Cherchons maintenant la distance du point $M(x_0y_0)$, à la droite Δ.

Menons par le point M une parallèle à Δ, cette parallèle a pour équation :

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

ou,

$$Ax+By-Ax_0-By_0=0.$$

Supposons, pour fixer les idées, que l'origine soit placée dans la région positive et que le point M soit dans la région

négative. Ayant abaissé de O une perpendiculaire sur les deux parallèles, nous avons :

$$OH = \frac{C \sin \theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}}$$

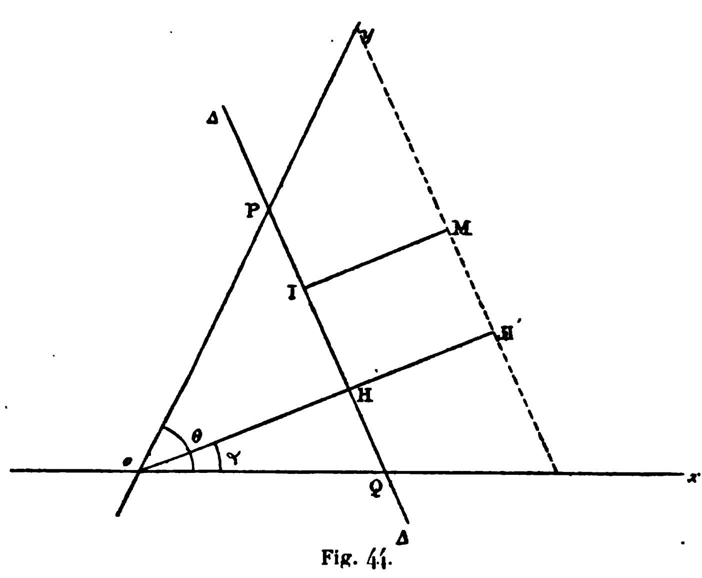


Fig. 44.

et,

$$OH' = \frac{(-Ax_0 - By_0) \sin \theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}}$$

Dans cette dernière formule on doit observer, pour vérifier son exactitude, que le point $x_0\ y_0$ étant dans la région négative, on a :

$$Ax_0 + By_0 + C < 0,$$

et comme C est positif, il faut nécessairement que $(Ax_0 + By_0)$ soit négatif.

En posant :

$$MI = OH' - OH = \delta,$$

les formules précédentes donnent :

$$(A) \quad \delta = \frac{-P_0 \sin \theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}}$$

Cette formule est générale et se trouve vérifiée pour toutes les positions respectives du point, de la droite et des axes ; il faut seulement changer le signe du numérateur quand on suppose $P_0 > o$, de façon à obtenir pour δ un résultat toujours positif.

76. Équation de la bissectrice. Soient :

$$P = ax + by + c = o,$$
$$Q = a'y + b'y + c' = o;$$

les équations de deux droites données. Leurs bissectrices Δ, Δ' partagent le plan en quatre régions et l'origine est située dans l'une de ces régions que nous distinguerons des autres et que nous désignerons par A. Des droites Δ et Δ' une seule pénètre dans la région A et nous nous proposons de trouver l'équation de cette droite Δ, droite qui, d'après ces explications, est bien déterminée.

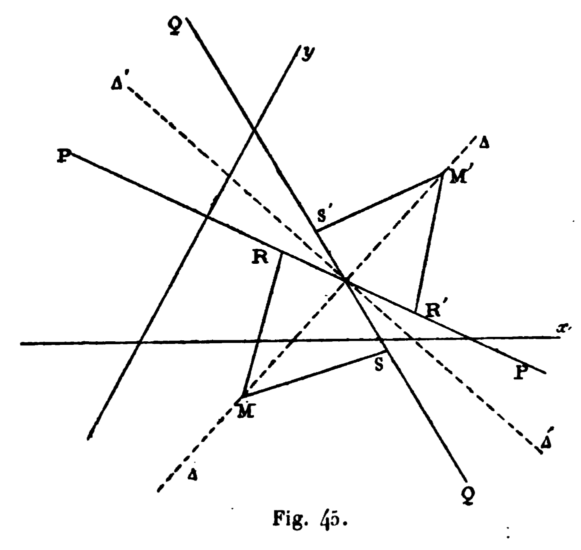


Fig. 45.

On peut toujours, dans une équation donnée, disposer du signe d'un terme ; on peut donc toujours supposer $c > o$, et $c' > o$. D'après cela, l'origine est située dans la région positive, pour la droite P, et aussi pour la droite Q.

Soient x, y les coordonnées d'un point M pris sur la semi-droite Δ, qui est située dans la région A ; les distances du point M aux droites P et Q sont données par les formules

$$MR = \frac{P \sin \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}},$$

$$MS = \frac{Q \sin \theta}{\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos \theta}};$$

on a donc :

$$\frac{P}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} = \frac{Q}{\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos \theta}}.$$

Si l'on prend maintenant un point M' sur la semi-droite Δ opposée à la précédente, ce point M' étant placé dans la région négative, pour les droites P et Q, on a :

$$M'R' = \frac{-P \sin \theta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}},$$

et,

$$M'S' = \frac{-Q \sin \theta}{\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos \theta}};$$

on a donc encore :

$$\frac{P}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} = \frac{Q}{\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos \theta}}.$$

C'est l'équation de la bissectrice qui pénètre dans la région du plan où est placée l'origine. Un raisonnement semblable montre que la seconde bissectrice a pour équation :

$$\frac{P}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} = \frac{-Q}{\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos \theta}}.$$

Il est facile de déduire de ces formules, entre autres conséquences, que les six bissectrices des angles d'un triangle, sont, trois à trois, concourantes.

77. Théorème. *Étant donnée l'équation :*

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$

qui représente un faisceau de deux droites P, Q, *passant par l'origine ; l'équation :*

$$bx^2 - (a - c)\,xy - by^2 = 0$$

est celle du faisceau de deux bissectrices Δ, Δ' *des droites* P et Q.

Nous supposons que l'on ait $b^2 - ac > 0$, et, dans cette hypothèse, nous avons :

$$(1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 = (u'x + v'y)(u''x + v''y),$$

u', v' ; u'', v'' étant des coefficients réels qui vérifient les relations :

$$(2) \qquad \begin{aligned} u'u'' &= a, \\ v'v'' &= c, \\ u'v'' + v'u'' &= 2b. \end{aligned}$$

Prenons sur la bissectrice Δ un point M ; x et y étant les coordonnées de ce point, ses distances aux droites P et Q sont, au signe près :

$$\frac{u'x + v'y}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}, \quad \frac{u''x + v''y}{\sqrt{u''^2 + v''^2}}.$$

Les coordonnées x, y vérifient donc la relation :

$$(3) \quad \frac{(u'x + v'y)^2}{u'^2 + v'^2} = \frac{(u''x + v''y)^2}{u''^2 + v''^2}.$$

En considérant maintenant un point de la seconde bissectrice Δ', on voit, de même, que ses coordonnées vérifient la relation précédente. Celle-ci a donc lieu pour toutes les valeurs d'x et d'y représentant les coordonnées d'un point pris, soit sur Δ, soit sur Δ'. Réciproquement, si l'on imagine une solution $x'y'$ de (3), on a :

$$\frac{u'x' + v'y'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} = \pm \frac{u''x' + v''y'}{\sqrt{u''^2 + v''^2}},$$

le point $x'y'$ est donc situé sur l'une, ou sur l'autre, des bissectrices.

En résumé, l'équation (3) représente l'ensemble des deux bissectrices.

Cette relation peut s'écrire :

$$(4)\quad x^2(u'^2v''^2 - v'^2u''^2) + 2xy(u'u'' - v'v'')(v'u'' - u'v'') + y^2(v'^2u''^2 - u'^2v''^2) = 0.$$

Les égalités (2) donnent d'ailleurs, par combinaison,

$$(u'v'' - v'u'')^2 = 4(b^2 - ac)$$

et cette égalité montre que $u'v'' - v'u''$ n'est pas nul, $b^2 - ac$ étant supposé positif.

Nous pouvons donc diviser les deux membres de l'égalité (4) par $u'v'' - v'u''$, et nous obtenons le résultat suivant :

$$x^2(u'v'' + v'u'') - 2xy(u'u'' - v'v'') - y^2(u'v'' + v'u'') = 0\,;$$

ou, finalement,

$$bx^2 - (a - c)xy - by^2 = 0.$$

78. Problème. *Abaisser d'un point donné x_0, y_0; un faisceau perpendiculaire sur un faisceau quadratique, donné.*

Les notations du paragraphe précédent étant conservées, on voit que les deux perpendiculaires que nous cherchons ont pour équations, respectivement.

$$u'(y - y_0) - v'(x - x_0) = 0,$$
$$u''(y - y_0) - v''(x - x_0) = 0.$$

Le faisceau de ces deux perpendiculaires est donc :

$$[u'(y - y_0) - v'(x - x_0)][u''(y - y_0) - v''(x - x_0)] = 0,$$

ou,

$$u'u''(y - y_0)^2 - (u'v'' + v'u'')(y - y_0)(x - x_0) + v'v''(x - x_0)^2 = 0:$$

ou, enfin,

$$a(y - y_0)^2 - 2b(y - y_0)(x - x_0) + c(x - x_0)^2 = 0.$$

79. Faisceaux harmoniques. Théorème. *Pour que le faisceau des* OP, OQ; *faisceau qui correspond à l'équation :*

$$(1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0;$$

soit conjugué harmonique du faisceau des droites OI, OJ; *correspondant à l'équation :*

$$(2) \quad a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = 0;$$

il est nécessaire et suffisant que la relation :

$$(3) \quad ac' + ca' - 2bb' = 0,$$

soit vérifiée.

Prenons sur OP un point M; soit $x_0\, y_0$ ses coordonnées; on sait que si par ce point M on mène AB parallèle à OQ, cette droite est partagée par le faisceau OI, OJ, et par M, en deux parties égales.

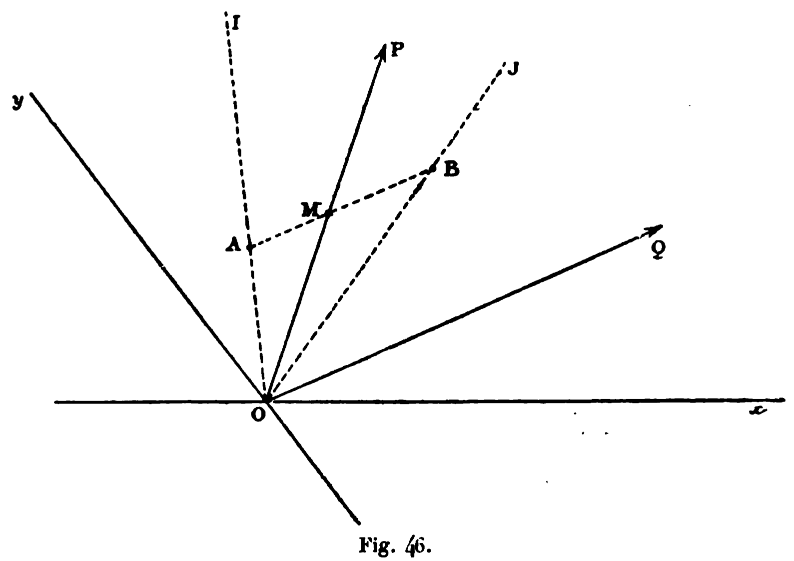


Fig. 46.

L'équation de OQ étant : $u''x + v''y = 0$; celle de AB est :

$$(4) \quad u''x + v''y = u''x_0 + v''y_0.$$

Cherchons l'intersection de cette droite avec le faisceau,

OI, OJ ; nous avons, pour déterminer y, l'équation suivante, obtenue en éliminant x entre (2) et (4) :

$$y^2(a'v''^2 - 2b'u''v'' + c'u''^2) - 2y(a'v'' - b'u'')(u''x_0 + v''y_0) + a'(u''x_0 + v''y_0)^2 = 0.$$

Le point M étant le milieu du segment AB, la somme des racines de cette équation est égale à $2y_0$. Nous avons donc la relation :

$$y_0(a'v''^2 - 2b'u''v'' + c'u''^2) = (a'v'' - b'u'')(u''x_0 + v''y_0),$$

ou, après réductions,

$$(5) \quad y_0(c'u'' - b'v'') = x_0(a'v'' - b'u'').$$

Le point x_0, y_0 appartenant à la droite OP, nous avons d'ailleurs,

$$(6) \quad u'x_0 + v'y_0 = 0;$$

et, par combinaison des relations (5) et (6),

$$u'(c'u'' - b'v'') + v'(a'v'' - b'u'') = 0,$$

ou, enfin,

$$a'v'v'' - b'(u'v'' + v'u'') + c'u'u'' = 0.$$

En tenant compte des égalités (2), (§ 77); on trouve la relation annoncée :

$$(7) \quad ca' - 2bb' + ac' = 0.$$

80. Théorème. *Les droites qui ont pour équation :*

$$P + \lambda Q = 0, \quad P - \lambda Q = 0$$

forment un faisceau qui est conjugué de celui des droites qui correspondent aux équations : $P = 0$, $Q = 0$.

Il suffit, évidemment, de vérifier que les parallèles menées par l'origine aux droites qui ont pour équation :

$$(1) \quad ax + by = 0, \qquad (2) \quad a'x + b'y = 0;$$

forment un faisceau qui est conjugué de celui des deux droites qui correspondent, respectivement, aux équations :

$$(3) \quad (a + \lambda a')x + (b + \lambda b')y = 0,$$

$$(4) \quad (a - \lambda a')x + (b - \lambda b')y = 0.$$

Le faisceau formé par les droites (1) et (2), a pour équation :

$$(5) \quad aa'x^2 + (ab' + ba')xy + bb'y^2 = 0 ;$$

et celui des droites (3) et (4),

$$(6) \quad (a^2 - \lambda^2 a'^2)x^2 + 2(ab - \lambda^2 a'b')xy + (b^2 - \lambda^2 b'^2)y^2 = 0.$$

En appliquant, aux équations (5) et (6), la condition (7), trouvée au paragraphe précédent, on voit que cette condition se trouve vérifiée, en vertu de l'identité :

$$aa'(b^2 - \lambda^2 b'^2) - (ab' + ba')(ab - \lambda^2 a'b') + bb'(a^2 - \lambda^2 a'^2) \equiv 0.$$

81. Problème. *Mener, par un point donné* (x_0, y_0), *un faisceau parallèle à un faisceau donné.*

Soit,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$

l'équation du faisceau proposé ; une droite de ce faisceau ayant pour équation,

$$ux + vy = 0,$$

la parallèle menée par le point (x_0, y_0) a pour équation,

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0.$$

Mais on a :

$$av^2 - 2buv + cu^2 = 0,$$

et, par conséquent,

$$a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2 = 0.$$

C'est l'équation du faisceau cherché.

Cette formule, comme celle qui a été établie plus haut (§ 78), est susceptible d'une généralisation évidente, et en appliquant le raisonnement précédent au faisceau qui correspond à l'équation :

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + \dots + A_m y^m = 0,$$

on voit que le faisceau parallèle, issu du point (x_0, y_0), a pour équation :

$$A_0 (x-x_0)^m + A_1 (x-x_0)^{m-1} (y-y_0) + \dots + A_m (y-y_0)^m = 0.$$

82. Problème. *Etant données deux courbes Δ, Δ', ayant pour équations :*

$$(1) \quad f(x,y,z) = 0, \qquad \varphi(x,y,z) = 0;$$

trouver l'équation du faisceau des droites qui vont de l'origine aux points communs à ces deux courbes.

Entre les équations (1) et (2), éliminons z, par l'une des méthodes indiquées en algèbre et qui n'introduisent pas de facteurs étrangers. Si nous désignons par $R(x,y)$, le résultant ainsi obtenu, l'équation :

$$(3) \quad R(x, y) = 0,$$

dont le premier membre est une fonction homogène en x et y, représente un faisceau de droites ayant pour sommet l'origine. C'est l'équation cherchée.

En effet, soit M' un point commun aux courbes Δ et Δ'; et soient x', y' ses coordonnées ; on a donc :

$$f(x', y', z) = 0, \quad \varphi(x', y', z) = 0;$$

et ces deux équations en z admettent une racine commune, savoir $z = 1$. Le résultant de f et de φ est donc nul et l'on a, par suite,

$$R(x', y') = 0.$$

La droite OM' fait donc partie du faisceau des droites représentées par l'équation (3).

Réciproquement. Toute droite du faisceau (3) représente une droite sur laquelle se trouve un point commun aux deux courbes.

Considérons, en effet, une droite U de ce faisceau et soient

$x''y''$ les coordonnées d'un point M″ de cette droite. Nous avons donc :

$$R(x'', y'') = 0,$$

et l'on peut dire que les deux équations en z :

$$f(x'', y'', z) = 0,$$
$$\varphi(x'', y'', z) = 0;$$

admettent, au moins, une racine commune ; soit z'' cette racine qui vérifie les deux relations :

$$f(x'', y'', z'') = 0,$$
$$\varphi(x'', y'', z'') = 0.$$

Considérons maintenant un point M_1, dont les coordonnées soient calculées par les formules :

$$(4) \quad x_1 = \frac{x''}{z''}, \quad y_1 = \frac{y''}{z''};$$

nous aurons :

$$f(z''x_1, z''y_1, z'') = 0,$$
$$\varphi(z''x_1, z''y_1, z'') = 0;$$

ou,

$$f(x_1, y_1, 1) = 0,$$
$$\varphi(x_1, y_1, 1) = 0.$$

Ces deux dernières relations prouvent que les équations des courbes Δ et Δ' sont vérifiées par :

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = 1;$$

le point M_1 est donc commun à Δ et à Δ'. D'ailleurs les formules (4) donnent la proportion :

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y''}{x''},$$

et l'on voit ainsi que M_1 est situé sur la droite OM″. La réciproque est donc démontrée.

83. Points et droites imaginaires. Le problème précédent conduit, assez naturellement, à la considération des points et des droites imaginaires. Nous nous sommes déjà servi de cette expression (§ 36), en traitant une question du genre de celle qui vient de nous occuper; mais il nous faut entrer maintenant dans des détails plus circonstanciés sur les équations à coefficients imaginaires.

L'équation linéaire renfermant le signe symbolique i, peut toujours s'écrire sous la forme :

$$(1) \quad P + Qi = 0,$$

P et Q désignant deux formes linéaires, à coefficients réels et Q n'étant pas identiquement nul. Nous convenons ici de dire que l'équation (1) représente une droite imaginaire.

En adoptant ce langage, les équations :

$$P + Qi = 0,$$
$$P - Qi = 0;$$

représentent des droites dites *imaginaires conjuguées.*

Lorsque les coordonnées d'un point sont données par des expressions imaginaires :

$$x = \alpha + \alpha' i, \quad y = \beta + \beta' i:$$

nous dirons qu'à ces formules, correspond *un point imaginaire.*

Aux formules :

$$X = \alpha - \alpha' i, \quad Y = \beta - \beta' i$$

correspond un point imaginaire, que nous nommerons *conjugué* du précédent.

Lorsque l'équation $U = 0$, à coefficients réels ou imaginaires, est vérifiée par des valeurs imaginaires d'x et d'y, nous dirons, pour rappeler ce fait algébrique, que la courbe passe par le point (x,y), sans attacher d'ailleurs à cette expression un sens autre que celui que nous venons de préciser.

Ces conventions étant faites, on vérifie facilement les propositions suivantes :

1° *Une droite imaginaire passe toujours par un point réel.*

2° *Lorsqu'une droite est réelle, si elle passe par un point imaginaire, elle passe aussi par le point conjugué.*

3° *Une droite qui passe par deux points imaginaires conjugués est réelle.*

4° *Deux droites imaginaires conjuguées ont un point commun réel.*

5° *Une droite* Δ *qui passe par deux points imaginaires quelconques* P, Q ; *et la droite* Δ' *qui passe par les points* P', Q' *conjugués de ceux-ci, sont deux droites imaginaires conjuguées.*

83 *bis.* **Points à l'infini.** Lorsque les coordonnées d'un point M croissent indéfiniment, l'une et l'autre, mais en restant proportionnelles à des quantités fixes α, β, ou à des quantités variables mais ayant pour limites des valeurs bien déterminées α, β; si l'on désigne par P le point qui a pour coordonnées α et β, on dit que M s'est éloigné à l'infini dans la direction obtenue en joignant l'origine au point P.

Lorsque plusieurs points M_1, M_2, ... sont supposés mobiles sur des droites parallèles ayant pour équation, respectivement ;

$$(\Delta)\quad\begin{cases} Ax + By + C_1 z = 0, \\ Ax + By + C_2 z = 0. \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Si leurs coordonnées croissent au-delà de toute limite, ces points s'éloignent à l'infini dans la même direction.

En effet, les équations précédentes étant écrites sous la forme :

$$A + B\frac{y}{x} + C_1\frac{z}{x} = 0,$$

$$A + B\frac{y}{x} + C_2\frac{z}{x} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

et x croissant au-delà de toute limite, le rapport $\frac{y}{x}$ a, dans toutes ces équations, la même valeur limite, savoir celle de $-\frac{A}{B}$. Les coordonnées du point P sont donc :

$$\alpha = -A, \beta = B; \quad \text{ou} \quad \alpha = A, \beta = -B;$$

pour toutes ces droites parallèles. Ainsi, on peut dire que tous les points M_1, M_2, ... s'éloignent à l'infini dans la direction positive ou négative de la droite OP qui a pour équation :

$$Ax + By = 0.$$

On remarquera que cette droite est une parallèle menée par l'origine à l'une quelconque des droites proposées Δ.

Si l'on précise la direction suivie par le mobile en s'éloignant à l'infini sur une droite Δ, la position du point P se trouve elle-même bien déterminée ; et, en supposant, par exemple, $A < 0$ et $B > 0$, si l'on veut rappeler que le mobile s'est éloigné à l'infini en parcourant la partie positive de Δ, on prendra : $\alpha = -A$ et $\beta = B$.

Ces différentes remarques s'appliquent, évidemment, aux points rejetés à l'infini dans la direction de l'un ou de l'autre des axes de coordonnées.

Remarque. Lorsqu'une égalité est constamment vérifiée par les coordonnées x_1, y_1, d'un point qui s'éloigne à l'infini, dans la direction α, β; on peut chercher ce que devient cette relation, à la limite. Dans le cas d'une relation algébrique entière, le résultat s'obtient immédiatement. Soit :

$$\varphi_m(x_1, y_1) + \varphi_{m-1}(x_1, y_1) + \dots + \varphi_0 = 0$$

l'équation qui est constamment vérifiée par les coordonnées x_1, y_1 du point mobile; φ_m, φ_{m-1} ... désignant des fonctions entières, homogènes, dont les degrés respectifs sont : m, $m-1$, ... L'égalité précédente peut s'écrire :

$$\varphi_m\left(1, \frac{y_1}{x_1}\right) + \frac{1}{x_1}\varphi_{m-1}\left(1, \frac{y_1}{x_1}\right) + \dots + \frac{1}{x_1^m}\varphi_0 = 0;$$

A la limite, on a donc :

$$\varphi_m\left(1, \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0,$$

ou,

$$\varphi_m(\alpha, \beta) = 0.$$

Ainsi, la relation cherchée s'obtient, dans le cas des équations algébriques rationnelles, *en prenant le groupe homogène du degré le plus élevé et en y remplaçant x_1 par α, y_1 par β.*

Droite de l'infini. Lorsqu'une droite Δ passe constamment par deux points M_1, M_2, si ces points s'éloignent à l'infini, dans des directions différentes, Δ s'éloigne elle-même toute entière à l'infini ; c'est-à-dire qu'elle ne passe par aucun point situé à distance finie. Soient x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; les coordonnées des points M_1, M_2. L'équation de Δ est,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & \frac{y_1}{x_1} & \frac{z_1}{x_1} \\ 1 & \frac{y_2}{x_2} & \frac{z_2}{x_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Posons :

$$\lim \frac{y_1}{x_1} = m_1, \quad \text{et} \quad \lim \frac{y_2}{x_2} = m_2;$$

on a, à la limite,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & m_1 & 0 \\ 1 & m_2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou,

$$z(m_1 - m_2) = 0.$$

Cette équation n'est vérifiée par aucune valeur finie d'x et d'y, quand on suppose $m_1 - m_2 \neq 0$; elle est, au contraire, identique dans l'hypothèse $m_1 = m_2$. Cette dernière indétermination s'explique, d'ailleurs, en remarquant que toutes les droites du plan, parallèles à la direction commune des droites données, passent par les points M_1 et M_2, quand ils sont rejetés à l'infini, dans cette direction.

Ainsi toutes les droites du plan, rejetées à l'infini, ont pour équation $z = 0$.

Pour rappeler ce fait, nous imaginerons que ces droites sont confondues, à l'infini, en une seule et même droite, que nous nommerons *la droite de l'infini du plan*.

84. Condition pour que l'équation générale du second degré représente un système de deux droites. L'équation générale du second degré, homogène en x, y, z est,

$$f(x,y,z) = 0;$$

en posant :

$$f(x,y,z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

Pour qu'elle représente deux droites il faut que l'on ait :

$$(1)\quad f(x,y,z) = (\alpha x + \beta y + \gamma z)(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z);$$

par conséquent, la forme quadratique $f(x,y,z)$ est décomposable en une somme de deux carrés. Mais nous avons vu en algèbre (§ 348) que dans ce cas, le discriminant de la forme était nul. Réciproquement, si le discriminant est nul, la décomposition de la forme en une somme des deux carrés et, par suite, sa décomposition en deux facteurs linéaires, est possible.

Ainsi la condition cherchée, condition nécessaire et suffisante, est $\Delta = 0$, en posant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}.$$

On peut observer que si l'une des droites est rejetée à l'infini, si l'on a :

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = 0\,;$$

on a aussi :

$$A = 0 \quad A' = 0 \quad B'' = 0,$$

et, par conséquent, $\Delta = 0$; cette condition exprime donc que $f = 0$ représente deux droites, à distance finie ou infinie.

85. Conditions pour que l'équation générale du second degré représente deux droites parallèles.

On a d'abord, comme tout à l'heure, $\Delta = 0$; de plus les droites qui ont pour équation :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0\,;$$

étant parallèles, on a :

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'},$$

ou,

$$\beta\alpha' - \alpha\beta' = 0.$$

D'autre part, l'identité (1) donne :

$$A = \alpha\alpha',$$
$$A' = \beta\beta',$$
$$B'' = \alpha\beta' + \beta\alpha'.$$

De ces égalités, on déduit :

$$B''^2 - AA' = (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2.$$

On trouve aussi la condition nouvelle :

$$\delta = AA' - B''^2 = 0.$$

Les conditions : $\Delta = 0$, et $\delta = 0$, sont donc vérifiées quand l'équation du second degré représente un système de deux droites parallèles.

Réciproquement. Si les conditions ont lieu, l'équation représente un système de deux droites parallèles, ces droites pouvant être réelles, imaginaires ou coïncidentes.

Les conditions données sont :

$$(1) \quad \Delta = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B''^2 - A''B''^2 = 0,$$
$$(2) \quad \delta = AA' - B''^2 = 0.$$

Nous ferons remarquer d'abord que A et A' ne peuvent être nuls simultanément. En effet, si l'on avait $A = 0$ et $A' = 0$, on aurait aussi $B'' = 0$ et l'équation proposée serait du premier degré par rapport aux lettres x et y. Nous supposerons $A' \neq 0$.

Les relations (1) et (2) donnent d'abord, pour combinaison,

$$AB^2 + A'B''^2 - 2BB'B'' = 0 ;$$

ou en multipliant par A', et en remplaçant AA' par B''^2,

$$(BB'' - A'B')^2 = 0.$$

Ainsi les relations données peuvent être remplacées par celles-ci :

$$B''^2 = AA',$$
$$BB'' = A'B'.$$

D'autre part, en utilisant ces deux égalités, on a :

$$A'f(x, y, z) = B''^2x^2 + A'^2y^2 + A'A''z^2 + 2A'Byz + 2BB''xz + 2A'B''xy,$$

ou,

$$A'f(x, y, z) = (B''x + A'y + Bz)^2 - z^2(B^2 - A'A'').$$

Sous cette forme, on reconnait que l'équation $f(x, y, z) = 0$, représente deux droites parallèles, réelles, imaginaires ou coïncidentes, suivant que la quantité $B^2 - A'A''$ est positive, négative, ou nulle.

EXERCICES

1. *Sur les trois côtés d'un triangle, considérés comme étant des diagonales, on construit des parallélogrammes dont les côtés sont parallèles aux mêmes directions; démontrer que les trois autres diagonales concourent au même point.*

2. *Étant donné un quadrilatère* ABCD, *trouver le lieu d'un point* I *tel que la somme des surfaces des triangles* IAB, ICD *soit égale à la moitié de celle du quadrilatère donné.*

On trouve que le lieu demandé est la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère.

3. *On considère un quadrilatère* ABCD ; *sur* AB *on prend un point* P, *et sur* CD *un point* Q. *Les droites* BQ, CP *se coupent en un point* M *et les droites* AQ, DP *en un point* N ; *démontrer que la droite* MN *passe par un point fixe quand les points* P *et* Q *sont mobiles.*

4. *On donne deux droites fixes* Δ, Δ' *et trois points en ligne droite* A, B, C ; *par* A *on mène une transversale mobile qui rencontre* Δ *en* P *et* Δ' *en* Q ; *les droites* BP, CQ *se coupent en un point* I ; *le lieu de* I *est une droite.*

(Porisme d'Euclide.)

5. *On donne un triangle* ABC *et deux points fixes* O, O' ; *soit* M *un point mobile sur* BC, OM *rencontre* AB *au point* R *et* O'M *rencontre* AC *au point* S ; *les droites* O'R *et* OS *se coupent en un point* I ; *le lieu de ce point est une droite.*

(Porisme d'Euclide.)

NEUVIÈME LEÇON

ÉTUDE ANALYTIQUE DU CERCLE

86. Distance de deux points. Soient M′ et M″ les deux points donnés; soient x', y'; x'', y'' leurs coordonnées et d leur distance.

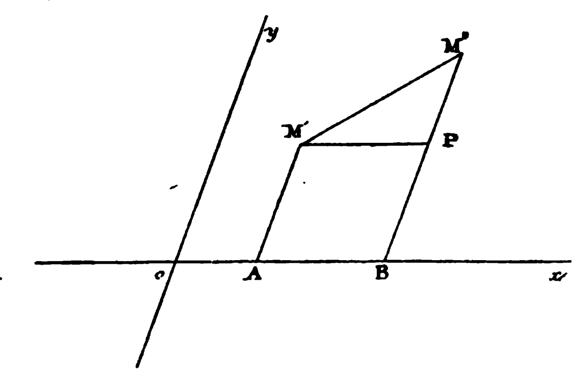


Fig. 4.

Le triangle M′PM″ donne,

$$d^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 - 2(x'' - x')(y'' - y') \cos M'PM'',$$

ou,

$$\text{(A)} \quad d^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y') \cos \theta.$$

Cette formule est générale; elle est vérifiée quelles que soient les situations respectives des axes des coordonnées et des points proposés.

87. Equation du cercle. Soit C le centre du cercle, et soient $x_0\ y_0$ les coordonnées de ce point. Prenons sur la cir-

conférence un point quelconque D, ses coordonnées x, y, d'après (A), vérifient constamment la relation :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 2(x - x_0)(y - y_0)\cos\theta = R^2,$$

Fig. 48.

égalité dans laquelle R désigne le rayon de la circonférence donnée.

Si l'on pose :

$$U = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 2(x - x_0)(y - y_0)\cos\theta - R^2,$$

on voit que l'on a :

$$U < 0, \quad \text{ou} \quad U > 0$$

suivant que le point (x, y) est situé à l'intérieur ou à l'extérieur de la circonférence proposée. Enfin, on a $U = 0$, lorsque le point est placé sur la circonférence.

88. Conditions pour que l'équation générale du second degré représente un cercle.

L'équation générale du second degré, prise sous la forme homogène, étant :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0.$$

En y faisant $z = 1$, nous obtenons l'équation générale des courbes du second degré qui, ordonnée par rapport aux lettres x et y, peut s'écrire :

$$(K) \quad Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'' = 0.$$

Nous allons chercher les conditions qui doivent exister entre les coefficients de cette équation, pour qu'elle représente un cercle.

L'équation $U = 0$, trouvée tout à l'heure, devient, après développement,

$$\text{(H)} \quad x^2+y^2+2xy\cos\theta-2x(x_0+y_0\cos\theta)-2y(y_0+x_0\cos\theta) \\ +x_0^2+y_0^2+2x_0y_0\cos\theta-R^2=0.$$

En identifiant les équations (H) et (K), on a d'abord :

$$\text{(I)} \quad A = A' = \frac{B''}{\cos\theta};$$

on peut donc dire déjà que : *si une équation du second degré représente un cercle : 1° les termes en x^2 et en y^2 ont des coefficients égaux et différents de zéro ; 2° le rapport des coefficients des termes en xy et en x^2 est égal au double du cosinus de l'angle des axes.*

L'objet du calcul qui suit est de montrer que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes et que, si on les suppose vérifiées, l'équation proposée représente un cercle, dans le sens général et analytique du mot.

89. Calcul du rayon. Nous supposons donc que les coefficients de l'équation générale vérifient les conditions (I) et nous allons montrer que cette équation représente un cercle dont nous nous proposons de calculer le rayon.

L'identification des équations (H) et (K) donne, outre les conditions (I), les suivantes :

$$\text{(J)} \begin{cases} (1) & x_0+y_0\cos\theta+\dfrac{B'}{A}=0, \\ (2) & x_0\cos\theta+y_0+\dfrac{B}{A}=0, \\ (3) & x_0^2+y_0^2+2x_0y_0\cos\theta-R^2-\dfrac{A''}{A}=0. \end{cases}$$

Les deux premières permettent de calculer les coordonnées du centre; le déterminant des inconnues étant $\sin^2\theta$, quantité

différente de zéro. Il nous reste à montrer comment on peut calculer R^2.

Multiplions les équations J, respectivement par x_0, y_0, et -1 ; puis, ajoutons ces résultats. Nous avons :

$$(4)\quad \frac{B'}{A}x_0 + \frac{B}{A}y_0 + R^2 + \frac{A''}{A} = 0.$$

Les équations linéaires (1), (2) et (4) admettant une solution, nous pouvons écrire :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \frac{B'}{A} \\ \cos\theta & 1 & \frac{B}{A} \\ \frac{B'}{A} & \frac{B}{A} & \frac{A''}{A} + R^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Les deux premiers éléments de la troisième colonne sont respectivement égaux à $\frac{B'}{A} + 0$, et à $\frac{B}{A} + 0$, et nous obtenons, par application d'une règle connue,

$$(5)\quad R^2 \sin^2\theta + \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \frac{B'}{A} \\ \cos\theta & 1 & \frac{B}{A} \\ \frac{B'}{A} & \frac{B}{A} & \frac{A''}{A} \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant qui entre dans cette expression est lié au discriminant du polynôme proposé d'une façon simple et que nous allons mettre en évidence.

Nous avons posé précédemment (§ 84),

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix},$$

Δ est le discriminant de l'équation générale du second degré, à trois variables, et homogène.

Dans le cas où $f(x, y, z)$, égale à zéro, représente un cercle, nous désignerons par Δ_0 le discriminant de la forme f, pour le distinguer du discriminant Δ de la forme ternaire [1].

Les relations (I) prouvent que l'on a :

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} A & A\cos\theta & B' \\ A\cos\theta & A & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix},$$

ou,

$$\Delta_0 = A^3 \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \frac{B'}{A} \\ \cos\theta & 1 & \frac{B}{A} \\ \frac{B'}{A} & \frac{B}{A} & \frac{A''}{A} \end{vmatrix}.$$

D'après cette observation, l'égalité (5) peut s'écrire :

$$A^3R^2 \sin^2\theta + \Delta_0 = 0.$$

De cette formule, on conclut le théorème suivant :

Théorème. *Si* A *désigne le coefficient du terme en* x^2 (*ou du terme en* y^2) *d'une équation* $U = 0$, *qui représente un cercle, et si l'on représente par* Δ_0, *le discriminant du polynôme* U, *mis sous sa forme homogène : le cercle est réel si* $A\Delta_0$ *est négatif, et son rayon peut se calculer par la formule :*

$$R^2 = -\frac{\Delta_0}{A^3 \sin^2\theta}.$$

On doit encore remarquer que si $A\Delta_0$ est positif, l'expression du rayon est imaginaire ; on exprime ce résultat algébrique en disant que la courbe proposée, celle qui correspond à l'équation $U = 0$, est *un cercle imaginaire*.

1. On appelle *forme ternaire* la forme quadratique générale à trois variables.

On vérifie aisément que l'équation $U = 0$, dans l'hypothèse où $A\Delta_0$ est positif, n'admet aucune solution réelle : la courbe est donc imaginaire ; et pour rappeler que les coefficients A, A', B'' satisfont aux conditions (I), qui caractérisent les cercles, quand la courbe est réelle, nous lui donnerons le nom de cercle imaginaire, sans attacher à ce mot un sens autre que celui que nous venons de préciser.

Enfin si $\Delta_0 = 0$, on a $R = 0$: on peut vérifier que l'équation $U = 0$, n'a donc d'autre solution que la suivante : $x = x_0$, $y = y_0$; pour rappeler ce fait nous dirons que, dans le cas où l'on suppose $\Delta_0 = 0$, *le cercle est évanouissant.*

90. Puissance d'un point par rapport à un cercle. On sait, et nous allons d'ailleurs le vérifier tout à l'heure, que le produit des segments MA, MB interceptés par le cercle est un produit constant, quelle que soit la transversale considérée, pourvu que celle-ci passe constamment par le point M. Nous nous proposons de montrer que ce produit constant s'obtient en remplaçant dans le premier membre de l'équation du cercle $U = 0$, les coordonnées courantes, par les coordonnées particulières du point donné, et en divisant le résultat obtenu par le coefficient du terme en x^2.

Considérons d'abord l'équation générale du second degré :

$$(1) \quad f(x, y) = Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'' = 0,$$

et soient x_0, y_0 les coordonnées du point M (fig. 48). Par M menons une transversale Δ, et désignons par α, β ses paramètres directeurs; les formules (§ 71) :

$$x = x_0 + \alpha\rho,$$
$$y = y_0 + \beta\rho,$$

font connaître les coordonnées d'un point quelconque de cette droite Δ et si nous voulons déterminer l'intersection de Δ et de la courbe (1), nous aurons, pour déterminer ρ, l'équation :

$$f(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho) = 0$$

ou,

$$(1)\quad f(x_0,y_0)+\rho\left(\alpha f'_{x_0}+\beta f'_{y_0}\right)+\rho^2\left(\frac{\alpha^2}{2}f''_{x_0^2}+\alpha\beta f''_{x_0y_0}+\frac{\beta^2}{2}f''_{y_0^2}\right)=0.$$

Mais on a :

$$f''_{x_0^2}=2\mathrm{A}\quad f''_{x_0y_0}=2\mathrm{B}''\quad f''_{y_0^2}=2\mathrm{A}',$$

et la formule (1) devient :

$$(\mathrm{R})\quad f(x_0,y_0)+\rho\left(\alpha f'_{x_0}+\beta f'_{y_0}\right)+\rho^2(\mathrm{A}\alpha^2+\mathrm{A}'\beta^2+2\mathrm{B}''\alpha\beta)=0.$$

Cette relation remarquable est susceptible, dans le cas du cercle, d'une simplification notable, et qui résulte des conditions : $\mathrm{A}=\mathrm{A}'=\frac{\mathrm{B}''}{\cos\theta}$. L'égalité (R) s'écrit alors :

$$f(x_0,y_0)+\rho\left(\alpha f'_{x_0}+\beta f'_{y_0}\right)+\mathrm{A}\rho^2(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta)=0.$$

Mais on a (§ 49) :

$$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta=1,$$

et, par suite,

$$\mathrm{A}\rho^2+\rho\left(\alpha f'_{x_0}+\beta f'_{y_0}\right)+f(x_0,y_0)=0.$$

Cette relation prouve que le produit des segments MA et MB, est égal à $\frac{f(x_0,y_0)}{\mathrm{A}}$; c'est une quantité indépendante de la direction donnée à la transversale Δ ; elle est donc constante, quand Δ tourne, comme nous l'avons supposé, autour du point (x_0, y_0).

91. Axes radicaux. — Théorème. *Le lieu géométrique des points qui ont la même puissance par rapport à deux cercles Δ_1, Δ_2, est une droite ; cette droite est nommée l'axe radical des deux circonférences.*

Soient, en adoptant la notation abrégée,

$$\mathrm{U}=0,\quad \mathrm{V}=0,$$

les équations des deux circonférences proposées ; A_1 et A_2 les coefficients de x^2 dans ces équations; soient enfin x_0, y_0 les coordonnées d'un point M d'égale puissance par rapport à Δ_1, et Δ_2. Nous venons de reconnaître que la puissance de M par rapport à Δ_1 était égale à $\frac{U_0}{A_1}$, en désignant par U_0 ce que devient U quand on y remplace x et y, par x_0 et y_0. Nous avons donc l'égalité,

$$\frac{U_0}{A_1} = \frac{V_0}{A_2}.$$

En rendant les coordonnées courantes, nous obtenons l'équation du lieu :

$$\frac{U}{A_1} = \frac{V}{A_2}.$$

C'est l'équation d'une droite, parce que les termes du second degré disparaissent dans les deux membres.

92. Centre radical. — Théorème. *Les axes radicaux de trois cercles, considérés deux à deux, concourent en un même point; ce point est nommé le centre radical des trois circonférences.*

Soient :

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0;$$

les équations des trois cercles donnés; celles des axes radicaux sont, d'après ce qui précède,

$$\frac{U}{A_1} - \frac{V}{A_2} = 0,$$
$$\frac{V}{A_2} - \frac{W}{A_3} = 0,$$
$$\frac{W}{A_3} - \frac{U}{A_1} = 0.$$

Ces trois droites sont concourantes ; car, en ajoutant les trois équations précédentes, on a une identité.

93. Théorème. *Deux cercles situés dans le même plan n'admettent que deux points communs, à distance finie.*

Soient :

$$(1) \quad U = 0, \quad V = 0,$$

les équations des deux cercles considérés. Ces deux équations sont l'une et l'autre du second degré : nous avons montré, en algèbre, qu'un pareil système admettait, en général, quatre solutions. Mais, le système (1) est équivalent au suivant :

$$(2) \quad U = 0, \quad \frac{U}{A_1} - \frac{V}{A_2} = 0;$$

et celui-ci étant constitué par deux équations, l'une du premier, l'autre du second degré, on voit qu'il n'admet que deux solutions.

Deux circonférences ont donc seulement deux points communs, réels, imaginaires, ou coïncidents, à distance finie, points situés sur l'axe radical. Nous ferons valoir plus tard (§ 266) les considérations qui ont fait admettre que toutes les circonférences d'un plan passaient aussi, *d'une façon imaginaire,* par deux points fixes de ce plan, situés à l'infini, qu'on a nommés les *ombilics du plan* [1].

94. Cercles orthogonaux. L'étude analytique du cercle rentre trop directement dans celle des courbes du second degré, qui nous occupera plus loin, pour que nous nous arrêtions ici à la démonstration de propriétés qui appartiennent à toutes les courbes du second degré, et au cercle, particulièrement. Nous avons indiqué dans les paragraphes précédents quelques théorèmes qui sont vérifiés dans le cas du cercle, mais qui cessent d'être vrais pour les courbes qui correspondent à l'équation générale du second degré. Nous chercherons encore, en terminant cette étude particulière du cercle, la condition d'orthogonalité de deux cercles.

1. Cette dénomination est due à M. Laguerre. Ces points sont aussi appelés *points circulaires, à l'infini, sur le plan* et *points cycliques du plan.*

On dit que deux courbes U et V se coupent orthogonalement au point M, lorsque les tangentes en ce point sont rectangulaires. On voit, immédiatement, que dans le cas de deux cercles dont les centres sont O et O′, la condition nécessaire et suffisante pour qu'ils se coupent orthogonalement, au point M, est que le triangle OMO′ soit rectangle.

Prenons des axes rectangulaires, et soient :

$$(U) \quad x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$
$$(V) \quad x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0;$$

les équations des deux cercles proposés. Soient aussi α, β ; α', β', les coordonnées des centres O et O′. En désignant par R et R′ les rayons des cercles considérés, les équations de ces cercles sont :

$$(U') \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$
$$(V') \quad (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 = R'^2.$$

En comparant U et U′, nous avons :

$$(1) \quad -\alpha = A, \quad -\beta = B, \quad \text{et} \quad R^2 = A^2 + B^2 - C.$$

Les équations (V) et (V′) donnent, de même,

$$(2) \quad -\alpha' = A', \quad -\beta' = B' \quad \text{et} \quad R'^2 = A'^2 + B'^2 - C'.$$

Ceci posé, le triangle O′MO′ étant rectangle, nous avons,

$$\overline{OO'}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{O'M}^2,$$

ou,

$$(3) \quad (\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 = R^2 + R'^2.$$

Les relations (1), (2) et (3) donnent la condition cherchée :

$$(4) \quad 2AA' + 2BB' = C + C'.$$

95. Cercle orthotomique. On nomme ainsi celui qui coupe orthogonalement trois cercles donnés.

Soient, dans la notation abrégée,

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0$$

les équations des trois cercles donnés. Nous supposons les axes rectangulaires et nous avons :

$$P \equiv x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C,$$
$$Q \equiv x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C',$$
$$R \equiv x^2 + y^2 + 2A''x + 2B''y + C''.$$

Soit :

$$(1) \quad x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2\mu y + \nu = 0,$$

l'équation du cercle cherché, la relation (4), établie au paragraphe précédent, donne :

$$(2) \quad 2\lambda A + 2\mu B - \nu - C = 0,$$
$$(3) \quad 2\lambda A' + 2\mu B' - \nu - C' = 0,$$
$$(4) \quad 2\lambda A'' + 2\mu B'' - \nu - C'' = 0.$$

Les équations (1), (2), (3) et (4) linéaires en λ, μ, ν donnent, par élimination de ces paramètres,

$$(5) \quad \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ -C & A & B & -1 \\ -C' & A' & B' & -1 \\ -C'' & A'' & B'' & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est l'équation du cercle orthotomique.

On peut donner à cette équation une forme remarquable, que nous allons indiquer.

Multiplions la deuxième colonne par x, la troisième par y et retranchons, de la première, la somme de ces deux colonnes ainsi modifiées. L'équation (5) devient :

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & 1 \\ -C - Ax - By & A & B & -1 \\ -C' - A'x - B'y & A' & B' & -1 \\ -C'' - A''x - B''y & A'' & B'' & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ajoutons maintenant la première ligne, successivement,

aux autres lignes, nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & 1 \\ -C - Ax - By & A + x & B + y & 0 \\ -C' - A'x - B'y & A' + x & B' + y & 0 \\ -C'' - A''x - B''y & A'' + x & B'' + y & 0 \end{vmatrix} = 0\,;$$

Cette relation peut encore s'écrire sous la forme :

$$\begin{vmatrix} Ax + By + C & A + x & B + y \\ A'x + B'y + C' & A' + x & B' + y \\ A''x + B''y + C'' & A'' + x & B'' + y \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en supposant que les équations proposées sont homogènes,

$$(5') \qquad \begin{vmatrix} P'_z & P'_x & P'_y \\ Q'_z & Q'_x & Q'_y \\ R'_z & R'_x & R'_y \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la forme remarquable que nous voulions donner à l'équation (5).

EXERCICES

1. *On donne un cercle rapporté à un diamètre ox, et à la tangente à l'une des extrémités* O *de ce diamètre. Soit* O' *l'autre extrémité, et* Δ *la tangente en ce point ; par* O *on mène une transversale mobile, qui rencontre le cercle en* m, *et* Δ *au point* A : *Démontrer que si l'on prend* AM $= m$A, *le lieu du point* M *est une courbe ayant pour équation :*

$$y^2 = x^2 \frac{d - x}{x - 2d}.$$

Construire la tangente en un point de cette courbe par la méthode des transversales réciproques.

2. *Démontrer que si θ est l'angle des axes, la condition pour que les deux cercles qui correspondent aux équations :*

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2By + 2B'x + A'' = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2by + 2b'x + a'' = 0,$$

soient orthogonaux, est :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & B' \\ \cos\theta & 1 & B \\ b' & b & \frac{1}{2}(A'' + a'') \end{vmatrix} = 0.$$

3. *Reconnaître, analytiquement, cette propriété, évidente par la géométrie, que : si deux circonférences se coupent orthogonalement un diamètre de l'une d'elles est coupé par les circonférences considérées en quatre points qui forment une division harmonique.*

4. *Le lieu des centres des circonférences qui coupent orthogonalement deux circonférences données est une droite ; l'axe radical de ces deux cercles.*

5. *On considère un cercle U et une droite Δ, dans son plan ; à U, on mène une tangente mobile Δ' et l'on construit les bissectrices des droites Δ, Δ' ; démontrer que si l'on projette le centre de U sur ces bissectrices le lieu de ces projections est un système de deux droites parallèles à Δ.*

6. *Si l'on convient de représenter l'expression : $\alpha + \beta i$, par un point dont les coordonnées sont α et β, démontrer que l'expression imaginaire :*

$$\frac{\alpha + \beta z + i(\alpha' + \beta' z)}{\gamma + \delta z + i(\gamma' + \delta' z)},$$

dans laquelle z désigne un paramètre variable, représente, généralement, un cercle.

(Laguerre.)

On trouve d'abord :

$$x = \frac{(\alpha + \beta z)(\gamma + \delta z) + (\alpha' + \beta' z)(\gamma' + \delta' z)}{(\gamma + \delta z)^2 + (\gamma' + \delta' z)^2},$$
$$y = \frac{-(\alpha + \beta z)(\gamma' + \delta' z) + (\alpha' + \beta' z)(\gamma + \delta z)}{(\gamma + \delta z)^2 + (\gamma' + \delta' z)^2};$$

puis, par combinaison,

$$x(\gamma' + \delta' z) + y(\gamma + \delta z) = \alpha' + \beta' z,$$
$$x(\gamma + \delta z) - y(\gamma' + \delta' z) = \alpha + \beta z.$$

L'élimination de z donne, enfin,

$$(x^2+y^2)(\delta\gamma'-\gamma\delta')+mx+ny+p=0.$$

Cette équation représente un cercle, excepté quand on suppose $\delta\gamma'=\gamma\delta'$. Dans ce cas, le lieu est une droite.

7. *On considère un cercle* Δ *et un triangle* ABC *inscrit dans ce cercle; soit* M *un point mobile sur* Δ. *On joint* M *aux points* A, B, C *et, de ce point* M *comme centre, avec* MA *et* MB *pour rayons, on décrit des arcs de cercle qui rencontrent* MC, *aux points* A′ *et* B′. *Trouver le lieu décrit par le milieu de* A′B′.

Ce lieu est une circonférence; on trouve facilement son équation en posant :

$$CI=\rho, \quad ICA=\omega;$$

et en cherchant la relation qui existe entre ρ et ω.



DEUXIÈME LIVRE

THÉORIES GÉNÉRALES RELATIVES AUX COURBES PLANES

DIXIÈME LEÇON

LES TANGENTES

96. Équation de la tangente en un point donné d'une courbe algébrique.

Soit :

$$f(x, y, z) = 0,$$

l'équation, sous la forme entière et homogène, d'une courbe U, du degré m. Prenons sur cette courbe un point M ; nous désignerons les coordonnées par x_0, y_0, z_0, et nous supposerons que les fonctions f'_x, f'_y, f'_z ne s'annulent pas, simultanément, quand on y remplace x, y, z, par x_0, y_0 et z_0. Nous réservons ce cas particulier et nous examinerons, uniquement, les points qui ne présentent pas la singularité en question ; nous les nommerons des *points simples*. Joignons le point M à un point voisin R, de la courbe U et prenons sur la droite MR un point A, point arbitrairement choisi et dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1.

Les coordonnées x, y, z de R sont données par les formules :

$$(U) \quad \frac{x}{x_0 + \lambda x_1} = \frac{y}{y_0 + \lambda y_1} = \frac{z}{z_0 + \lambda z_1},$$

et nous avons pour déterminer λ, la relation :

$$(1) \quad f(x_0 + \lambda x_1, y_0 + \lambda y_1, z_0 + \lambda z_1) = 0.$$

Développons le premier membre par la formule de Taylor; le premier terme $f(x_0, y_0, z_0)$ étant nul, puisque M appar-

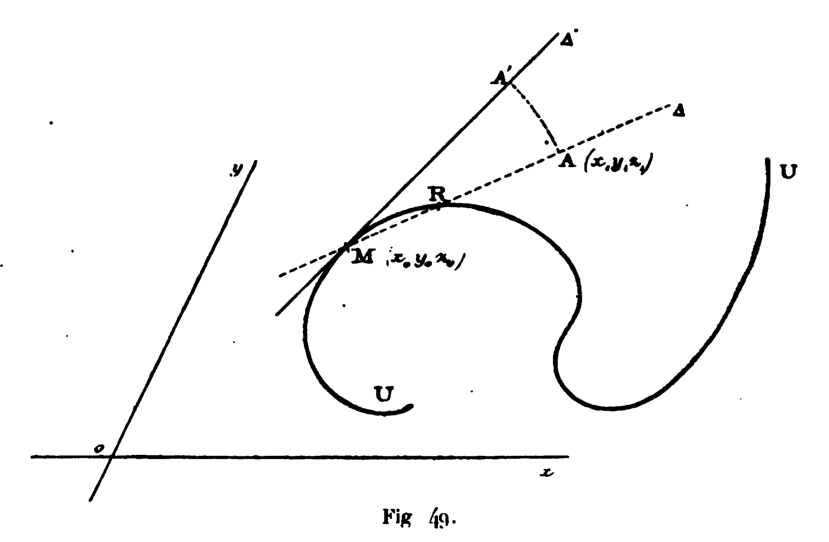


Fig 49.

tient à la courbe, nous pouvons diviser la relation (1) par λ et nous obtenons, finalement, l'équation :

$$(2) \quad x_1 f'_{x_0} + y_1 f'_{y_0} + z_1 f'_{z_0} + \lambda \left(\frac{x_1^2}{1 \cdot 2} f'_{x_0^2} + \ldots \right) + \ldots = 0.$$

Supposons maintenant que le point R se rapproche indéfiniment du point M et vienne se confondre avec lui ; par définition, la transversale mobile Δ a pour position limite une droite Δ' qui est la tangente à la courbe U, au point M.

Quant au point A on peut imaginer, pour fixer les idées, qu'il reste toujours à la même distance du point M et il a pour position limite un point A', bien déterminé, point dont nous désignerons les coordonnées par X, Y, Z.

L'équation (2) qui est du degré $(m-1)$ a donc une racine nulle quand nous remplaçons x_1, y_1, z_1 par X, Y, Z. Nous avons donc, entre ces coordonnées, la relation :

$$(T) \quad Xf'_{x_0} + Yf'_{y_0} + Zf'_{z_0} = 0.$$

Puisque la distance A'M est arbitraire, cette égalité est vérifiée par les coordonnées d'un point quelconque de Δ', et elle n'est pas identique puisque nous avons admis que l'on n'avait pas, simultanément,

$$f'_{x_0} = 0, \quad f'_{y_0} = 0, \quad f'_{z_0} = 0.$$

La relation (T) représente donc l'équation de la tangente au point M.

97. Autre forme de l'équation de la tangente. L'identité d'Euler donne :

$$mf(x_0, y_0, z_0) \equiv x_0 f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + z_0 f'_{z_0},$$

et comme $f(x_0, y_0, z_0)$ est nul, on a :

$$x_0 f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + z_0 f'_{z_0} = 0.$$

En combinant cette égalité avec l'équation T, et en observant que les termes $z_0 f'_{z_0}$, Zf'_{z_0} disparaissent, on a :

$$(X - x_0) f'_{x_0} + (Y - y_0) f'_{y_0} = 0.$$

C'est une seconde forme de l'équation de la tangente, forme qui peut être commode dans certains exemples et qui, comme nous allons le montrer, s'applique à toutes les courbes, algébriques ou transcendantes.

Désignons en effet par $F(x, y) = 0$ l'équation en coordonnées cartésiennes de la courbe U ; soient $x_0\, y_0$ les coor-

données du point M; $x_0 + \Delta x_0$, $y_0 + \Delta y_0$ celles du point voisin R. L'équation de la droite Δ, droite qui passe par ces deux points, est :

$$y - y_0 = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}(x - x_0).$$

Si nous supposons que le point R se rapproche de M et vienne se confondre avec lui, le rapport $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$ a pour valeur limite celle de la dérivée de y quand on y remplace x et y par x_0 et y_0. Nous avons donc :

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0).$$

D'autre part, la relation connue :

$$F'_x + y' F'_y = 0,$$

donne :

$$F'_{x_0} + y'_0 F'_{y_0} = 0,$$

et nous obtenons, finalement, l'équation de la tangente sous la forme :

$$(T') \quad (x - x_0) F'_{x_0} + (y - y_0) F'_{y_0} = 0.$$

98. Application aux courbes du second degré. — **Théorème.** *Dans les courbes du second degré, l'équation de la tangente au point $x_0 y_0 z_0$, peut s'écrire, indifféremment, sous l'une ou l'autre des formes suivantes :*

$$x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} = 0,$$
$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0.$$

En effet, on vérifie immédiatement, pour la forme homogène du second degré $f(x, y, z)$, l'identité :

$$x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} = x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z.$$

Nous rappellerons, à ce propos, que cette identité n'est qu'un cas particulier de celle que nous avons établie en algèbre, dans l'étude des formes quadratiques (Alg., § 349).

99. Classe d'une courbe d'ordre m. On appelle classe d'une courbe plane le nombre de tangentes que l'on peut mener à cette courbe par un point quelconque de son plan. Nous allons démontrer que la classe d'une courbe d'ordre m est, généralement, égale à $m(m-1)$.

Soit :

$$f(x, y, z) = 0,$$

l'équation d'une courbe algébrique, du degré m ; la tangente T au point (x_0, y_0, z_0), pris sur cette courbe, a pour équation :

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0.$$

Écrivons que T passe par un point S (x_1, y_1, z_1) et nous aurons pour déterminer x_0, y_0, z_0, les deux équations :

$$(1) \quad x_1 f'_{x_0} + y_1 f'_{y_0} + z_1 f'_{z_0} = 0,$$

$$(2) \quad f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Si, dans ces équations, nous faisons $z_0 = 1$, nous obtenons deux équations en x_0 et y_0 l'une du degré m, l'autre du degré $(m-1)$: or, nous avons vu en algèbre que deux équations de degré p et q avaient généralement pq solutions, et n'en avaient jamais davantage. Il y a donc, d'après cela, $m(m-1)$ tangentes issues du point S à la courbe proposée ; du moins, il y en a en général $m(m-1)$, et, dans tous les cas, il y en a $m(m-1)$, tout au plus.

100. Corollaire. *Les courbes du second degré sont des courbes de seconde classe.*

En effet, si $m = 2$, on a $m(m-1) = 2$.

101. Tangentes parallèles à une direction donnée.

L'équation (1), précédemment obtenue, étant écrite sous la forme :

$$f'_{x_0} + \frac{y_1}{x_1} f'_{y_0} + \frac{1}{x_1} f'_{z_0} = 0,$$

on a, à la limite, x croissant indéfiniment,

$$f'_{x_0} + \frac{\beta}{\alpha} f'_{y_0} = 0,$$

et les coordonnées de point de contact des tangentes parallèles à la direction donnée sont déterminées par les deux relations :

$$(1') \quad \alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0} = 0,$$
$$(2') \quad f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Le nombre de ces tangentes est, en général, $m(m-1)$; il peut, dans des cas particuliers, être inférieur à ce nombre; mais il n'y a jamais plus de $m(m-1)$ tangentes parallèles à une direction donnée, dans une courbe de l'ordre m.

102. Équation générale des tangentes dont le coefficient angulaire est donné.

Soit $f(x,y) = 0$ l'équation de la courbe proposée U ; nous nous proposons d'indiquer ici une méthode qui permet de trouver la condition que vérifient les paramètres m, n, quand la droite Δ, qui a pour équation :

$$y = mx + n,$$

est tangente à U.

L'équation :

$$(1) \quad f(x, mx + n) = 0,$$

donne les abcisses des points communs à Δ et à U ; si Δ est une droite tangente à U, cette équation a nécessairement deux racines égales. Nous verrons, dans l'étude des points singuliers, que la réciproque n'est pas exacte et qu'une droite qui rencontre une courbe en deux points coïncidents n'est pas nécessairement tangente à cette courbe. Quoiqu'il en soit, en exprimant que l'équation (1) a deux racines égales, on obtiendra une relation :

$$\varphi(m,n) = 0,$$

qui est vérifiée par les paramètres m, n des équations de toutes les droites tangentes à U et dont le coefficient angulaire est égal à m.

Application. Nous ferons, peut-être, mieux ressortir cette méthode en l'appliquant à un exemple particulier.

Considérons la cubique [1], dont l'équation est :

$$y^2 = x^3.$$

Nous avons, ici, à exprimer que l'équation :

$$x^3 - (mx + n)^2 = 0,$$

a une racine double. En supposant $n = 0$, l'équation à deux racines égales à zéro ; c'est là une solution singulière et qui tient à ce que toute droite menée par l'origine rencontre la courbe en deux points coïncidents. En posant :

$$\frac{x}{mx + n} = X,$$

on obtient l'équation suivante :

$$mX^3 + nX - 1 = 0,$$

et la condition cherchée $\varphi(m, n) = 0$ est, dans cet exemple,

$$4m^3 + 27n = 0.$$

L'équation générale des tangentes est donc :

$$y = mx - \frac{4m^3}{27}.$$

103. Condition pour que deux courbes soient tangentes.

Soient deux courbes U et V, dont les équations sont :

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0.$$

1. Pour la commodité du langage, nous appellerons quelquefois *cubique*, une courbe du troisième degré ; de même, le mot *quartique* désignera une courbe du quatrième degré. Enfin, nous donnerons le nom de *coniques*, aux *courbes du second ordre* ; la raison de cette dernière dénomination sera donnée plus tard.

On dit que ces courbes sont tangentes au point $M(x_0, y_0, z_0)$ lorsqu'elles admettent la même tangente en ce point. Il résulte de cette définition que les deux équations :

$$(1) \quad xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0,$$

$$(2) \quad xF'_{x_0} + yF'_{y_0} + zF'_{z_0} = 0 ;$$

représentent la même droite. On a donc :

$$(3) \quad \frac{f'_{x_0}}{F'_{x_0}} = \frac{f'_{y_0}}{F'_{y_0}} = \frac{f'_{z_0}}{F'_{z_0}}.$$

En exprimant que les équations (1) et (2) sont vérifiées par (x_0, y_0, z_0), on a encore les conditions suivantes :

$$(4) \quad x_0 f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + z_0 f'_{z_0} = 0,$$

$$(5) \quad x_0 F'_{x_0} + y_0 F'_{y_0} + z_0 F'_{z_0} = 0.$$

Les relations (3), (4) et (5) ne sont pas indépendantes et l'on voit comment l'égalité (5) est dépendante des relations (3) et (4).

En faisant $z_0 = 1$, et en éliminant x_0 et y_0 entre (3) et (4), on obtiendra la condition cherchée.

Autrement. Deux courbes tangentes peuvent être considérées comme deux courbes qui ont deux points communs coïncidents ; ce point commun n'étant pas l'un de ces points singuliers dont nous avons réservé l'étude.

En partant de cette remarque, on aboutit à une méthode, ordinairement plus simple, et donnant lieu à des calculs moins compliqués que la méthode que nous avons d'abord exposée.

Soient :

$$f(x, y, z) = 0 \quad F(x, y, z) = 0$$

les équations proposées. En éliminant z nous obtenons une équation homogène en x et y,

$$R(x, y) = 0$$

qui, comme nous l'avons montré (§ 82), représente le faisceau des droites qui joignent l'origine aux points qui sont communs à U et à V. Il suffit donc d'exprimer que cette équation a une racine double. La condition trouvée par cette méthode est une relation nécessaire, mais elle n'est pas suffisante [1].

104. Condition pour qu'une droite soit tangente à une courbe. Dans le cas où l'une des courbes U considérées tout à l'heure, se réduit à une droite Δ, il suffit d'identifier, avec l'équation de Δ, celle de la tangente à V, au point (x_0, y_0, z_0).

Nous donnerons ici une application, aux coniques, de cette idée générale.

Soit :

$$(1) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0,$$

l'équation de la courbe, et,

$$(2) \quad ux + vy + wz = 0,$$

celle de la droite. La tangente au point (x_0, y_0, z_0) a pour équation :

$$(3) \quad x(Ax_0 + B''y_0 + B'z_0) + y(B''x_0 + A'y_0 + Bz_0) + z(B'x_0 + By_0 + A''z_0) = 0.$$

En identifiant (2) et (3), on a :

$$\frac{Ax_0 + B''y_0 + B'z_0}{u} = \frac{B''x_0 + A'y_0 + Bz_0}{v} = \frac{B'x_0 + By_0 + A''z_0}{w}.$$

Désignons par $(-\lambda)$, la valeur commune de ces rapports et nous avons les relations suivantes :

$$(4) \quad Ax_0 + B''y_0 + B'z_0 + u\lambda = 0,$$
$$(5) \quad B''x_0 + A'y_0 + Bz_0 + v\lambda = 0,$$
$$(6) \quad B'x_0 + By_0 + A''z_0 + w\lambda = 0.$$

1. Pour citer un exemple d'exception, on voit que si, parmi les points communs, deux sont situés en ligne droite aver l'origine, la relation est vérifiée.

Multiplions maintenant ces équations, respectivement, par x_0, y_0, z_0, et tenons compte de la relation :

$$x_0 f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + z_0 f'_{z_0} = 0,$$

nous obtenons :

$$(7) \quad ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0.$$

Les relations (4), (5), (6) et (7) donnent, par élimination des paramètres $x_0 y_0 z_0$ et λ

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{vmatrix} & \Delta & & \vdots\ u \\ & & & \vdots\ v \\ \dots & \dots & \dots & \vdots\ w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Δ désignant le discriminant de la forme ternaire.

105. Idée des coordonnées tangentielles. Lorsqu'une droite ayant pour équation : $ux + vy + wz = 0$, est constamment tangente à une courbe U, les paramètres u, v, w vérifient constamment une certaine relation $\theta(u, v, w) = 0$. Dans cette relation, pour des raisons évidentes, et qui découlent de la méthode que nous avons indiquée tout à l'heure. Le premier membre est une fonction entière et homogène des lettres u, v, w.

Nous dirons que u, v, w sont les coordonnées tangentielles de la droite Δ, et l'équation $\theta(u, v, w) = 0$, sera dite l'équation tangentielle de U. Cette équation est d'un degré égal à la classe de la courbe considérée.

Quelquefois on suppose $w = -1$, hypothèse permise puisque les équations trangentielles sont homogènes ; les paramètres u et v représentent alors les inverses des coordonnées à l'origine de la droite Δ. En représentant par :

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0,$$

l'équation de cette droite, l'équation tangentielle est alors une relation entre p et q.

D'après ces explications, l'équation (A), trouvée plus haut, est l'équation tangentielle des coniques.

106. Normale. La normale en un point M, (x_0, y_0, z_0) d'une courbe U est la perpendiculaire à la tangente, en ce point M.

L'équation de la tangente étant :

$$(x - x_0) F'_{x_0} + (y - y_0) F'_{y_0} = 0.$$

celle de la normale sera donc, en supposant les axes rectangulaires,

$$\text{(N)} \qquad \frac{x - x_0}{F'_{x_0}} = \frac{y - y_0}{F'_{y_0}}$$

107. Sous-tangente. Si l'on considère un point M, sur une courbe U, on nomme *sous-tangente* la distance qui sépare le pied de l'ordonnée du point de rencontre de la tangente en M, avec l'axe des x.

Il faut ajouter, pour que cette valeur soit bien définie, que la sous-tangente se porte à partir du pied de l'ordonnée, dans le sens positif ou négatif de ox, suivant qu'elle est positive ou négative.

Soit U la courbe proposée, $F(x, y) = 0$ son équation ; soient x_0, y_0, les coordonnées d'un point M de cette courbe. La tangente, en ce point, a pour équation (§ 97) :

$$(x - x_0) F'_{x_0} + (y - y_0) F'_{y_0} = 0.$$

Faisons $y = 0$, nous avons :

$$\text{AT} F'_{x_0} = y_0 F'_{y_0}$$

En désignant par t la sous-tangente, t peut donc se calculer par la formule :

$$\text{(B)} \quad t = y_0 \frac{F'_{y_0}}{F'_{x_0}}.$$

Cette formule est générale et convient à toutes les dispositions que peuvent affecter la courbe et les axes de coordonnées; elle représente toujours, en grandeur et en signe, la

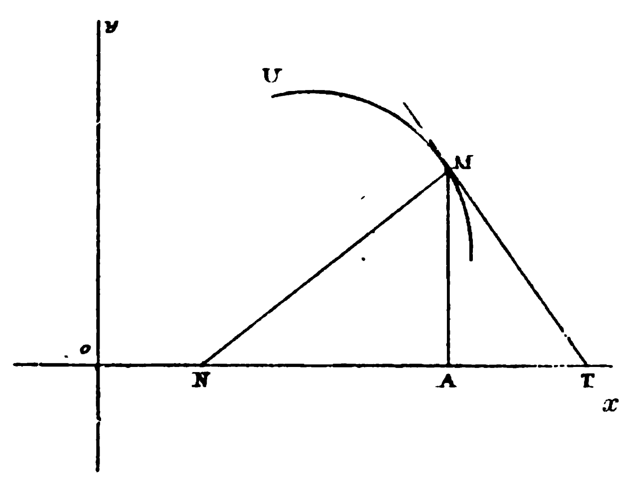


Fig. 50.

sous-tangente, pourvu que l'on n'ait pas, simultanément, $F'_{x_0} = 0$ $F'_{y_0} = 0$. Mais si ces deux relations sont vérifiées, en mettant l'équation donnée sous la forme homogène $f(x,y,z) = 0$, on voit, en utilisant l'identité d'Euler, qu'au point M les trois dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z, sont nulles. C'est le cas singulier qui a été réservé au début de cette leçon.

Cette exception étant faite, on peut dire que la formule (B) peut quelquefois donner par t une valeur nulle ou infinie, mais qu'elle ne fournit jamais une expression indéterminée.

108. Sous-normale. La *sous-normale* est la distance qui sépare le point de rencontre de la normale avec l'axe des x, du pied de l'ordonnée.

Lorsque la sous-normale est positive, elle est comptée à partir du pied de l'ordonnée dans le sens négatif de l'axe ox ; ou inversement.

L'équation :

$$\frac{x - x_0}{F'_{x_0}} = \frac{y - y_0}{F'_{y_0}},$$

donne, pour $y = 0$,

$$x - x_0 = -y_0 \frac{F'_{x_0}}{F'_{y_0}},$$

ou,

$$AN = y_0 \frac{F'_{x_0}}{F'_{y_0}}.$$

En désignant la sous-normale par s, on a donc :

$$(C) \quad s = y_0 \frac{F'_{x_0}}{F'_{y_0}}.$$

Il est facile de vérifier que cette formule est générale. On remarquera, enfin, que les formules (B) et (C) donnent la relation évidente :

$$st = y_0^2.$$

109. Tangentes communes à deux courbes. Soient :

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0;$$

les équations des deux courbes proposées U_1, U_2. En exprimant que la droite qui correspond à l'équation

$$ux + vy + wz = 0,$$

est tangente à U_1 et à U_2, nous aurons deux relations homogènes :

$$\varphi_1(u, v, w) = 0,$$
$$\varphi_2(u, v, w) = 0;$$

ce sont les équations tangentielles des courbes considérées.

Si l'on peut trouver une solution u', v', w', de ces équations, la droite dont l'équation est :

$$u'x + v'y + w'z = 0,$$

est une tangente commune à U_1 et à U_2. On remarquera que si U_1 est une courbe de classe p, et U_2 une courbe de classe q, les équations tangentielles sont, respectivement, de degrés p et q et le nombre des tangentes communes est, en général, égal à pq.

Le problème des tangentes communes est plus particulièrement simple dans le cas où les courbes proposées sont des cercles. Des considérations géométriques, bien connues, indiquent que les tangentes communes passent, deux à deux, aux points qui divisent la ligne des centres dans le rapport des rayons. Ces points se déterminent facilement par les formules U (§ 67) et, après avoir calculé leurs coordonnées, on écrira, en utilisant une formule que nous verrons bientôt, et qui est relative au faisceau des tangentes issues d'un point à une conique, deux équations du second degré, qui représentent les deux groupes des tangentes communes aux deux cercles proposés.

EXERCICES

1. *On considère un parallélogramme* ABCD, *par le point* C *on mène une transversale mobile qui rencontre* AB *en* P *et* AD *en* Q ; *sur* PC *et* PD *comme diamètres, on décrit des cercles* Δ, Δ' ; *trouver le lieu décrit par le centre de similitude de ces deux circonférences.*

On trouve facilement, en s'aidant de considérations géométriques, que le lieu demandé est une droite passant par le centre du parallélogramme ABCD.

2. *Étant données les équations de deux courbes, dans un système de coordonnées u, v; qu'on ne définit pas,*

$$f(u,v) = 0, \quad \varphi(u,v) = 0 ;$$

trouver la condition que doivent vérifier les coefficients qui entrent dans ces équations pour que les deux courbes soient tangentes.

On considère deux solutions de ces équations,

$$u, v\,; \quad u + \Delta u, v + \Delta v\,;$$

en appliquant la formule de Taylor, on trouve que u et v doivent vérifier les équations proposées et aussi la suivante :

$$\frac{f'_u}{f'_v} = \frac{\varphi'_u}{\varphi'_v}.$$

3. *Trouver la condition pour que la droite qui a pour équation :*

$$y = mx + n,$$

soit tangente à l'une ou l'autre des courbes qui correspondent aux équations suivantes :

$$1^\circ \quad y = x^3, \qquad 2^\circ \quad yx^2 = 1.$$

On trouve les résultats ci-dessous :

1°
$$4m^3 = 27n^2.$$

L'équation générale des tangentes est :

$$y = \frac{27t^2}{4}x + \frac{27t^3}{4}.$$

2°
$$4n^3 = 27m^2.$$

L'équation générale des tangentes est :

$$y = \frac{27}{4}t^2x + \frac{27t^3}{4}.$$

4. *On considère la cubique γ, qui correspond à l'équation :*

$$y^2 = x^3\,;$$

on propose de trouver une droite Δ, qui soit tangente à la courbe et, de plus, qui soit telle que le segment intercepté sur Δ, depuis le point de contact jusqu'au second point commun à Δ et à γ, soit vu de l'origine sous un angle droit.

En prenant l'équation de Δ sous la forme :

$$ax + by = 1,$$

on trouve :

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. *Trouver la condition pour que deux cercles se coupent orthogonalement en exprimant que les tangentes, à l'un des points communs, sont rectangulaires.*

Les axes étant rectangulaires, les cercles ayant pour équation, respectivement,

$$(1) \quad x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$
$$(2) \quad x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0;$$

les coefficients angulaires des tangentes au point (x, y) sont :

$$-\frac{x+A}{y+B}, \quad -\frac{x+A'}{y+B'};$$

et on a :

$$(3) \quad (x+A)(x+A') + (y+B)(y+B') = 0.$$

En combinant (1) (2) et (3) on obtient, facilement,

$$AA' + BB' = \frac{C+C'}{2};$$

relation que nous avons trouvée déjà (§ 94), par une méthode différente.

Une marche toute semblable à celle que nous venons d'indiquer conduit, dans le cas où les axes de coordonnées font un angle quelconque θ, à la condition suivante :

$$AA' + BB' - (AB' + BA') \cos\theta = \frac{C+C'}{2} \sin^2\theta.$$

ONZIÈME LEÇON

LES ENVELOPPES

110. Définitions. Soit $f(x, y, \alpha) = 0$ l'équation d'une courbe U, renfermant un paramètre variable α. Nous supposons que f désigne une fonction entière ou, dans tous les cas, une fonction *continue* et *bien déterminée*. A chaque valeur attribuée à α correspond une courbe F_α; et quand α varie on a *un réseau de courbes*. Prenons dans ce réseau deux courbes F_α, $F_{\alpha+\Delta\alpha}$; elles ont, en général, un certain nombre de points communs. Nous distinguerons l'un d'eux en particulier; soit $M_{\Delta\alpha}$ ce point.

Imaginons maintenant que α ayant une valeur fixe on donne à Δ_α des valeurs variables et qui décroissent au delà de toute limite; le point $M_{\Delta\alpha}$ se déplace sur la courbe F_α et, quand Δ_α est nul, il vient occuper une position limite M_α.

Le lieu de ce point M_α, quand α varie, est une courbe V qu'on nomme *l'enveloppe du réseau* U. On verra tout à l'heure la raison de cette dénomination. Ajoutons encore que chacune des courbes U est dite une *enveloppée*.

111. Théorème. *L'enveloppe d'un réseau correspondant à l'équation $f(x, y, \alpha) = 0$, s'obtient en éliminant le paramètre variable α, entre l'équation donnée et la dérivée de celle-ci, dérivée prise par rapport à α.*

Les coordonnées du point $M_{\Delta\alpha}$ vérifient les deux équations :

$$(1) \quad f(x, y, \alpha) = 0,$$
$$(2) \quad f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0;$$

et, par suite, la relation suivante :

$$(3) \quad \frac{f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0.$$

Imaginons maintenant que $\Delta\alpha$ tendent vers zéro ; le point $M_{\Delta\alpha}$ a pour position limite le point M_α dont nous cherchons le lieu géométrique. Les coordonnées de ce point vérifient donc : 1° l'équation (1) ; 2° l'équation (3), quand on suppose $\Delta\alpha = 0$. Or, cette dernière équation devient, quand $\Delta\alpha$ est nul,

$$(4) \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

Le lieu du point M_α, l'enveloppe du réseau, aura donc pour équation le résultant des équations (1) et (4).

112. Cas de deux paramètres variables. Assez souvent, le réseau proposé est défini par une équation :

$$(1) \quad f(x, y, \alpha, \beta) = 0.$$

renfermant deux paramètres variables α, β ; les paramètres vérifiant constamment la relation :

$$(2) \quad \varphi(\alpha, \beta) = 0.$$

Si entre (1) et (2) on peut éliminer β, on revient ainsi au cas que nous venons d'examiner. Mais cette élimination peut présenter des difficultés ; on l'évite en raisonnant comme nous allons le faire.

On peut considérer β comme une fonction de α et l'on a, par application du théorème des fonctions composées,

$$f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta) + \beta'_\alpha f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) = 0.$$

D'autre part, la relation (2) donne :

$$\varphi'_\alpha(\alpha, \beta) + \beta'_\alpha \varphi'_\beta(\alpha, \beta) = 0.$$

Ces deux dernières égalités donnent, par combinaison,

$$(3) \quad \frac{f'_\alpha}{\varphi'_\alpha} = \frac{f'_\beta}{\varphi'_\beta}.$$

L'équation de l'enveloppe s'obtiendra en éliminant les paramètres variables α, β entre (1), (2) et (3).

Ainsi : *dans le cas où le réseau considéré est déterminé par une équation renfermant deux paramètres variables α, β vérifiant la relation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, il faut adjoindre au système donné une troisième équation qui s'obtient en écrivant que les dérivées partielles des deux équations proposées, dérivées prises par rapport aux paramètres variables, sont proportionnelles.*

L'équation de l'enveloppe se trouve en éliminant les paramètres α, β entre les deux équations données et l'équation adjointe dont nous venons de parler.

113. Examen du cas général. Les deux cas que nous venons de considérer sont ceux que l'on rencontre le plus ordinairement. Nous examinerons pourtant le cas général, celui où l'équation renferme p paramètres variables, vérifiant $(p-1)$ équations de conditions. Désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ les paramètres variables, et soit :

$$f(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p) = 0,$$

l'équation d'une des courbes du réseau. Les paramètres variables λ_i satisfont aux égalités suivantes :

$$\varphi_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p) = 0,$$
$$\varphi_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_{p-1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p) = 0;$$

et l'on peut considérer $\lambda_2, \ldots \lambda_p$ comme des fonctions de la variable indépendante λ_1. Le théorème des fonctions composées donne :

$$f'_{\lambda_1} + \lambda'_2 f'_{\lambda_2} + \cdots + \lambda'_p f'_{\lambda_p} = 0,$$
$$\varphi'_{1,\lambda_1} + \lambda'_2 \varphi'_{1,\lambda_2} + \cdots + \lambda'_p \varphi'_{1,\lambda_p} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi'_{p-1,\lambda_1} + \lambda'_2 \varphi'_{p-1,\lambda_2} + \cdots + \lambda'_p \varphi'_{p-1,\lambda_p} = 0;$$

En éliminant $\lambda'_2, \ldots \lambda'_p$ entre ces équations linéaires on a :

$$\begin{vmatrix} f'_{\lambda_1} & f'_{\lambda_2} & \cdots f'_{\lambda_p} \\ \varphi'_{1,\lambda_1} & \varphi'_{1,\lambda_2} & \cdots \varphi'_{1,\lambda_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi'_{p-1,\lambda_1} & \varphi'_{p-1,\lambda_2} & \cdots \varphi'_{p-1,\lambda_p} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation qu'il faut adjoindre au système proposé pour obtenir l'enveloppe par l'élimination des paramètres variables λ.

114. Théorème. *L'enveloppe est tangente aux enveloppées aux points qui lui sont communs avec ces courbes.*

Soit $f(x, y, \alpha) = 0$ l'équation d'une enveloppée U ; celle de l'enveloppe V est le résultant des deux équations :

$$(1) \quad f(x, y, \alpha) = 0,$$
$$(2) \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

Désignons par x, y, les coordonnées du point M_α, point que nous avons défini précédemment. La tangente à U, au point M_α, a pour équation :

$$(X - x) f'_x(x, y, \alpha) + (Y - y) f'_y(x, y, \alpha) = 0.$$

Pour obtenir maintenant la tangente à la courbe V, au point M_α, on peut prendre les dérivées partielles, du premier membre de l'équation (1), par rapport à x et à y, en considérant α comme

une fonction de x et de y définie par (2). Le coefficient angulaire de la tangente à V est donc :

$$-\frac{f'_x(x,y,\alpha)+\alpha'_x f'_\alpha(x,y,\alpha)}{f'_y(x,y,\alpha)+\alpha'_y f'_\alpha(x,y,\alpha)}.$$

En tenant compte de (2) on voit que ce rapport est égal à :

$$-\frac{f'_x}{f'_y}.$$

L'équation de la tangente à V, au point x,y, est donc :

$$(X-x)f'_x+(Y-y)f'_y=0.$$

C'est l'équation déjà trouvée pour la tangente à l'enveloppée au point M_α. La propriété énoncée se trouve établie ; elle justifie la dénomination d'enveloppe et d'enveloppées, que nous avons adoptée.

115. Problème. *Étant donnée l'équation tangentielle d'une courbe, trouver son équation cartésienne.*

Nous avons déjà expliqué (§ 104 et 105) comment on passait d'une équation cartésienne à une équation tangentielle ; nous nous proposons ici la transformation inverse.

Soit :

$$(1)\quad \varphi(u,v,w)=0,$$

l'équation tangentielle d'une courbe U. Nous supposons que U est tangente à la droite qui a pour équation :

$$(\Delta)\quad ux+vy+wz=0;$$

pour toutes les valeurs de u,v,w qui représentent une solution de l'équation (1). Si nous cherchons l'enveloppe de Δ, nous obtenons une équation cartésienne.

$$(2)\quad F(x,y,z)=0,$$

c'est l'équation cherchée.

En résumé, toute courbe peut être considérée comme l'enveloppe de ses tangentes et l'on passe précisément de l'équation tangentielle à l'équation cartésienne, en cherchant cette enveloppe.

116. Exemples d'enveloppes. L'équation de l'enveloppe s'obtenant en éliminant α entre les deux équations :

$$f(x,y,\alpha) = 0,$$
$$f'_\alpha(x,y,\alpha) = 0;$$

on peut dire que cette élimination revient à exprimer que l'équation proposée admet une racine double en α.

Nous allons appliquer cette remarque à quelques exemples simples.

1° *Le paramètre α entre au second degré.* On peut toujours écrire l'équation sous la forme :

$$P\alpha^2 + Q\alpha + R = 0,$$

P, Q, R désignant des fonctions entières d'x et d'y. L'enveloppe a pour équation :

$$Q^2 - 4PR = 0.$$

2° *Enveloppe des courbes qui ont pour équation* :

$$P \sin \varphi + Q \cos \varphi + R = 0,$$

φ désignant le paramètre variable.

On doit, dans cet exemple, éliminer φ entre cette équation et la suivante :

$$P \cos \varphi - Q \sin \varphi = 0,$$

le résultat est, par une combinaison évidente,

$$P^2 + Q^2 = R^2.$$

On peut d'ailleurs ramener ce cas au précédent en posant :

$$\sin \varphi = \frac{2t}{1 + t^2},$$
$$\cos \varphi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

On obtient une équation du second degré en t et, en écrivant qu'elle a ses racines égales, on retrouve la relation précédente.

3° *Trouver l'enveloppe du réseau défini par l'équation :*

$$P \operatorname{tg} \varphi + Q \operatorname{cotg} \varphi = R,$$

φ étant un paramètre variable.

En posant $\operatorname{tg} \varphi = \theta$, on a :

$$P\theta^2 - R\theta + Q = 0.$$

L'enveloppe a donc pour équation :

$$R^2 - 4PQ = 0.$$

4° *En désignant par φ un paramètre variable, trouver l'enveloppe du réseau qui correspond à l'équation :*

$$\frac{P}{\sin \varphi} + \frac{Q}{\cos \varphi} + R = 0.$$

Dans cet exemple, comme dans ceux qui précèdent, il est sous-entendu que P, Q, R désignent des fonctions entières, ou, dans tous les cas, des fonctions continues et bien déterminées d'x et d'y. En prenant la dérivée de l'équation, par rapport à φ, on a d'abord :

$$\frac{P \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} - \frac{Q \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = 0,$$

ou,

$$(1) \quad \frac{P^{\frac{1}{3}}}{\sin \varphi} = \frac{Q^{\frac{1}{3}}}{\cos \varphi} = \lambda;$$

en désignant par λ la valeur commune de ces deux rapports On a, par une première combinaison,

$$P^{\frac{2}{3}} + Q^{\frac{2}{3}} = \lambda^2.$$

D'autre part, on peut écrire la relation (1), sous la forme

$$\lambda = \frac{\dfrac{P}{\sin\varphi}}{P^{\frac{2}{3}}} = \frac{\dfrac{Q}{\cos\varphi}}{Q^{\frac{2}{3}}} = \frac{-R}{P^{\frac{2}{3}} + Q^{\frac{2}{3}}}.$$

D'où l'on conclut :

$$P^{\frac{2}{3}} + Q^{\frac{2}{3}} = \frac{R^2}{\left(P^{\frac{2}{3}} + Q^{\frac{2}{3}}\right)^2},$$

ou,

$$\left(P^{\frac{2}{3}} + Q^{\frac{2}{3}}\right)^3 = R^2,$$

ou, enfin,

$$P^{\frac{2}{3}} + Q^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

117. Méthode géométrique pour trouver les enveloppes. Dans la méthode que nous voulons indiquer, on considère deux courbes voisines du réseau donné et l'on cherche leurs points communs; observant l'un d'entre eux, particulièrement, on cherche quelle est sa position limite quand les deux courbes viennent se confondre. Si l'on peut déterminer cette position, d'une façon précise, on cherchera le lieu de ce point. Le problème proposé se trouve modifié dans sa forme, et il est ainsi ramené à un lieu géométrique ordinaire, lieu dont la recherche peut, dans certains cas, être très simple.

Donnons un exemple de cette manière de faire en cherchant l'enveloppe des cercles qui ont leur centre mobile sur une ellipse donnée et qui passent constamment par un des foyers F, de la courbe.

Prenons sur l'ellipse deux points voisins M, M′ et soient Δ et Δ' les cercles décrits, de ces points comme centre, respectivement avec MF et M′F pour rayons; Δ et Δ' auront un second point commun A symétrique de F par rapport à la

sécante MM'. Imaginons maintenant que M' vienne se confondre avec M ; MM' devient une droite Δ tangente à l'ellipse au point M et la limite du point A est bien déterminée, c'est le point A' symétrique de F, par rapport à Δ. On sait que le lieu du point A' est le cercle directeur ayant son centre au second foyer F'.

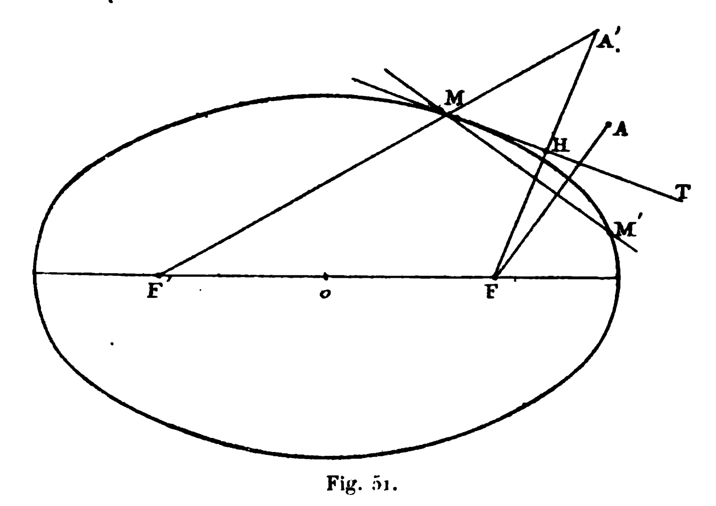


Fig. 51.

Nous aurons occasion de revenir dans la suite de ce cours sur les enveloppes, notamment quand nous chercherons les *développées*, courbes qui sont l'enveloppe des normales ; mais avant de quitter ce sujet, nous donnerons encore le théorème suivant, théorème qui est fondamental dans la théorie des coniques.

118. Théorème. *La droite qui joint les points correspondants de deux divisions homographiques, enveloppe une conique.*

On sait que si l'on considère deux droites Δ, Δ'; sur ces droites des origines ω et ω'; deux mobiles M et M' décrivent sur Δ et Δ' des divisions homographiques lorsque les distances $\omega M = u, \omega' M' = v$, vérifient constamment la relation

$$\alpha uv + \beta u + \gamma v + \delta = 0.$$

Ceci étant rappelé, supposons d'abord que les droites Δ et Δ' se coupent en un point O et prenons-les pour axes de coordonnées; la relation homographique subsistant évidemment, quand on transporte les origines ω et ω', si l'on pose

$$OM = U, \quad OM' = V,$$

on a constamment :

$$(1) \quad aUV + bU + cV + d = 0.$$

D'ailleurs l'équation de MM' est

$$(2) \quad \frac{x}{U} + \frac{y}{V} = 1.$$

Entre (1) et (2) éliminons V, nous obtenons d'abord la relation

$$U^2(ay + b) + U(cy - bx + d) - dx = 0.$$

L'enveloppe a donc pour équation (§ 116) :

$$(cy - bx + d)^2 + 4dx(ay + b) = 0.$$

C'est une équation du second degré qui peut encore s'écrire

$$(cy + bx + d)^2 = 4xy(bc - ad).$$

Sous cette dernière forme on voit que la courbe est tangente aux axes de coordonnées.

Le cas où les droites Δ et Δ' sont parallèles peut se ramener au précédent en prenant l'une des droites pour axe des x et la droite MM' dans une position particulière pour axe des y. On peut aussi, dans le cas général, traiter la question directement, et très simplement, en prenant pour axe des y la droite qui joint les deux points ω et ω', points tellement choisis que le produit $\omega M . \omega' M'$ soit constant.

EXERCICES

1. *Trouver l'enveloppe d'une droite mobile, sachant que le produit de ses distances à deux points fixes* A, A′ *est constant et égal à* b^2.

En posant $AA' = 2a$, on trouve l'ellipse qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

AA′ est pris pour axe des x et la perpendiculaire au milieu de AA′, pour axe des y.

2. *Trouver l'enveloppe des droites qui forment avec deux droites fixes ox, oy un triangle de surface donnée.*

3. *On considère la cubique qui a pour équation :* $y^2x = 1$, *on prend sur cette courbe un point quelconque* M, *soient* MA *et* MB *ses coordonnées. Trouver l'enveloppe des droites* AB.

On trouvera pour l'équation de cette enveloppe : $y^2x = \frac{4}{27}$.

La même question, appliquée aux courbes dont les équations sont respectivement,

$$y^2 - x^3 = 0, \quad y - x^3 = 0,$$

donne les résultats suivants:

$$4x^3 - 27y^2 = 0, \quad 4x^3 + 27y = 0.$$

On pourra remarquer que ces différentes équations rentrent dans le type suivant :

$$x^p y^q = 1,$$

et le calcul donne pour l'enveloppe des droites AB, définies comme il est dit dans l'énoncé ci-dessus, l'équation :

$$x^p y^q (p + q)^{p+q} = p^p q^q.$$

4. *Par un point* M *supposé mobile sur une parabole* P, *on mène une perpendiculaire* Δ, *à la droite qui joint* M *au sommet de la courbe : trouver l'enveloppe des droites* Δ.

On trouve :

$$27py^2 = 2(x - 2p)^3.$$

DOUZIÈME LEÇON

LES POLAIRES

---

119. Définition. A l'étude que nous venons de faire, des tangentes aux courbes planes, se rattache, d'une façon très étroite, celle des polaires.

Imaginons, sur une droite Δ, une origine P et m points A_1, A_2, ... A_m; considérons aussi sur cette même droite un point A, tellement lié aux précédents que l'on ait :

$$(1) \quad \frac{m}{PA} = \frac{1}{PA_1} + \frac{1}{PA_2} + \cdots + \frac{1}{PA_m};$$

Ce point, que nous avons déjà considéré (§ 38), est appelé *conjugué harmonique* [1] des points A_1, A_2, ... A_m.

120. Théorème. *Étant donnée une courbe* U *du degré* m, *et, dans son plan, mais non sur la courbe, un point fixe* P, *que nous nommons le pôle; si, autour de* P, *on fait tourner une transversale* Δ, *qui rencontre* U *aux points* A_1, A_2, ... A_m; *le lieu des points* A, *conjugués harmoniques de* P, *est une droite. Cette droite est dite la polaire du point* P. (Théorème de Cotes.)

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de P; x_1, y_1, z_1 celles de A; enfin soient x, y, z celles de l'un des points A_1, ... A_m. L'équation de U étant :

$$f(x, y, z) = 0,$$

1. *Poncelet* a aussi nommé ce point *centre des moyennes harmoniques*.

On a, par application de formules connues,

$$(2)\quad f(x_0+\lambda x_1,\, y_0+\lambda y_1,\, z_0+\lambda z_1)=0,$$

λ désignant la valeur de l'un des rapports :

$$\frac{A_1P}{A_1A}, \dots \frac{A_mP}{A_mA}.$$

On doit d'ailleurs observer qu'en retranchant m unités aux deux membres et en tenant compte de l'identité géométrique, relative à trois points A, B, C, en ligne droite :

$$AB+BC+CA=0,$$

l'égalité (1) revient à celle-ci :

$$0=\frac{AA_1}{PA_1}+\frac{AA_2}{PA_2}+\dots+\frac{AA_m}{PA_m},$$

L'équation (2) développée peut s'écrire :

$$f(x_0, y_0, z_0)+\lambda(x_1f'_{x_0}+y_1f'_{y_0}+z_1f'_{z_0})+\dots=0\,;$$

ou, en prenant l'équation aux inverses,

$$(3)\quad \lambda^m f(x_0, y_0, z_0)+\lambda^{m-1}(x_1f'_{x_0}+y_1f'_{y_0}+z_1f'_{z_0})+\dots=0.$$

Les racines de cette dernière équation sont :

$$\frac{A_1A}{A_1P}, \quad \frac{A_2A}{A_2P}, \dots \frac{A_mA}{A_mP};$$

la somme de ces quantités étant nulle, on a :

$$x_1f'_{x_0}+y_1f'_{y_0}+z_1f'_{z_0}=0.$$

Si l'on considère x_1, y_1, z_1, comme des coordonnées courantes, le lieu des points A est la droite qui correspond à l'équation :

$$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}=0.$$

121. Application aux coniques. Dans le cas des courbes du second degré, l'égalité :

$$\frac{AA_1}{PA_1}+\frac{AA_2}{PA_2}=0,$$

prouve que le point A est, dans le sens élémentaire du mot, conjugué harmonique du point P par rapport au segment $A_1 A_2$. La droite qui a pour équation :

$$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{y_0}=0,$$

représente donc le lieu de ces conjugués harmoniques. On remarque que l'identité :

$$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}\equiv x_0f'_x+y_0f'_y+z_0f'_z,$$

qui a lieu pour les formes quadratiques, permet d'écrire l'équation de la polaire, indifféremment sous l'une ou sous l'autre des deux formes suivantes :

$$(P)\quad xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}=0,$$
$$(P')\quad x_0f'_x+y_0f'_y+z_0f'_z=0.$$

Dans le cas particulier où l'on cherche la polaire de l'origine on a, pour son équation,

$$f'_z=0,$$

ou,

$$B'x+By+A''z=0.$$

122. Polaires de différents ordres. Imaginons, comme tout à l'heure, m points placés sur une droite. En conservant les notations adoptées, prenons un point B dont les distances aux points donnés vérifient la relation :

$$\Sigma\frac{BA_1}{PA_1}\cdot\frac{BA_2}{PA_2}=0.$$

Un calcul analogue au précédent (§ 120) prouve que le lieu

du point B est une courbe du second degré. De même, le point C qui correspond à l'égalité :

$$\Sigma \frac{CA_1}{PA_1} \cdot \frac{CA_2}{PA_2} \cdot \frac{CA_3}{PA_3} = 0,$$

a pour lieu géométrique une cubique; et ainsi de suite.

Ces courbes diverses constituent les polaires de différents ordres qui correspondent à la courbe proposée U et au pôle donné.

La dernière polaire est celle qui est le lieu d'un point I, tellement choisi que l'égalité :

$$\Sigma \frac{IA_1}{PA_1} \cdot \frac{IA_2}{PA_2} \cdots \frac{IA_{m-1}}{PA_{m-1}} = 0,$$

soit vérifiée. Cette polaire est d'ordre $(m-1)$ et nous allons déterminer son équation.

L'égalité (3), établie plus haut (§ 110), a pour racines :

$$\frac{IA_1}{PA_1}, \frac{IA_2}{PA_2}, \cdots \frac{IA_{m-1}}{PA_{m-1}} = 0,$$

si l'on convient que x_1, y_1, z_1 représentent les coordonnées du point I.

En égalant à zéro les coefficients des termes en λ^{m-1}. ... λ ; on obtient les $(m-1)$ polaires du pôle P. En particulier, la dernière polaire s'obtient en égalant à zéro le coefficient de λ; l'équation cherchée est donc :

$$x_1^{m-1} f^{m-1}_{x_0^{m-1}} + \ldots + z_1^{m-1} f^{m-1}_{z_0^{m-1}} = 0.$$

On peut donner à ce résultat une forme plus remarquable.

Développons l'équation (2), par la formule de Taylor, mais en l'écrivant d'abord sous la forme :

$$f(\lambda x_1 + x_0, \lambda y_1 + y_0, \lambda z_1 + z_0) = 0;$$

et en tenant compte de l'homogénéité, nous avons :

$$\lambda^m f(x_1, y_1, z_1) + \lambda^{m-1}(x_0 f'_{x_1} + y_0 f'_{y_1} + z_0 f'_{z_1}) + \ldots = 0.$$

L'équation de la dernière polaire est donc,

$$x_0 f'_{x_1} + y_0 f'_{y_1} + z_0 f'_{z_1} = 0.$$

C'est la forme que nous voulions obtenir.

123. Théorème. *La dernière polaire du point* P *passe par les points de contact des tangentes issues de ce point à la courbe considérée* U.

Soient X, Y, Z, les coordonnées du point de contact M, d'une des tangentes issues de P, à la courbe U. L'équation de la tangente en ce point est :

$$x f'_X + y f'_Y + z f'_Z = 0.$$

Cette droite passant par le point x_0, y_0, z_0, on a donc :

$$(1) \quad x_0 f'_X + y_0 f'_Y + z_0 f'_Z = 0.$$

D'autre part, on vient de voir que l'équation de la dernière polaire était :

$$(2) \quad x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0.$$

La comparaison des égalités (1) et (2) établit la proposition énoncée.

124. Faisceau des tangentes issues d'un point P **à une courbe** U. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnés du point P, l'intersection d'une transversale Δ passant par ce point, avec la courbe U, est déterminée par l'équation:

$$f(x_0 + \lambda x_1, y_0 + \lambda y_1, z_0 + \lambda z_1) = 0.$$

Si la droite Δ est tangente à U cette équation admet pour λ deux racines égales. En exprimant cette condition, par une des méthodes qu'indique l'algèbre, on obtiendra une relation :

$$\varphi(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Cette égalité est vérifiée par les coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un

point quelconque pris sur l'une ou l'autre des tangentes Δ issues de P à la courbe U; l'équation

$$\varphi(x_0, y_0, z_0 ; x, y, z) = 0,$$

représente donc le faisceau des tangentes Δ; c'est l'équation cherchée.

125. Application aux coniques. Dans le cas des courbes du second degré, on a :

$$f(x_0 + \lambda x_1, y_0 + \lambda y_1, z_0 + \lambda z_1) = f(x_0, y_0, z_0)$$
$$+ \lambda(x_1 f'_{x_0} + y_1 f'_{y_0} + z_1 f'_{z_0}) + \lambda^2 f(x_1, y_1, z_1).$$

La condition pour que l'équation :

$$f(x_0 + \lambda x_1, y_0 + \lambda y_1, z_0 + \lambda z_1) = 0,$$

admette deux racines égales, est donc :

$$(x_1 f'_{x_0} + y_1 f'_{y_0} + z_1 f'_{z_0})^2 = 4 f(x_0, y_0, z_0) f(x_1, y_1, z_1),$$

ou, en rendant x_1, y_1, z_1, coordonnées courantes,

$$(x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0})^2 = 4 f(x_0, y_0, z_0) f(x, y, z).$$

Cette équation est particulièrement utile dans les problèmes où l'on cherche le lieu géométrique décrit par le point de concours de deux tangentes à une conique, tangentes qui sont assujetties à vérifier constamment une propriété géométrique donnée.

POLAIRES RÉCIPROQUES.

Nous nous proposons maintenant, de donner une idée de la méthode de transformation qu'a imaginée *Poncelet* et qu'il a nommée *méthode des polaires réciproques*. Elle a pour base deux principes très simples que nous démontrerons d'abord.

126. Théorème I. *Lorsqu'un point* P *est mobile sur une droite* Δ, *la polaire de* P *par rapport à une conique* Γ *passe constamment par le pôle de* Δ.

Désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point P et soit:

$$(1) \quad Ax + By + Cz = 0,$$

l'équation de la droite Δ. La polaire de P a pour équation (§ 121):

$$(P') \quad x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0.$$

Le point P étant sur Δ, nous avons aussi la condition

$$(2) \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0.$$

Les coefficients A, B, C ne sont pas nuls à la fois; supposons, par exemple, $C \neq 0$; l'égalité (2) donne :

$$-z_0 = \frac{Ax_0 + By_0}{C}.$$

et l'équation (P') devient alors :

$$x_0 (Cf'_x - Af'_z) + y_0 (Cf'_y - Bf'_z) = 0.$$

Lorsque les coordonnées x_0, y_0 varient, cette droite passe constamment par le point Q, intersection des deux droites qui correspondent aux équations :

$$Cf'_x - Af'_z = 0, \quad Cf'_y - Bf'_z = 0;$$

équations qu'on peut encore écrire, sous la forme plus symétrique,

$$(3) \quad \frac{f'_x}{A} = \frac{f'_y}{B} = \frac{f'_z}{C}.$$

Il reste à montrer que le point Q, point dont les coordonnées sont, en général, bien déterminées par ces équations, est précisément le pôle M, de Δ.

Soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées de M; la polaire de M, a pour équation :

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0.$$

Identifions-le avec (1), nous avons alors les relations :

$$(4) \quad \frac{f'_{x_1}}{A} = \frac{f'_{y_1}}{B} = \frac{f'_{z_1}}{C}.$$

En comparant les égalités (3) et (4), on reconnaît que x, y, z, est la solution du système (3). Concluons donc que le pôle (x_1, y_1, z_1), est bien le point fixe que nous avons trouvé.

127. Théorème II. *Lorsqu'une droite* Δ, *tourne constamment autour d'un point fixe* P, *le pôle de* Δ *a pour lieu géométrique une droite qui est précisément la polaire de* P.

Désignons par Q le pôle de Δ, point dont nous cherchons le lieu géométrique, et soient x_1, y_1, z_1, ses coordonnées.

La polaire du point Q a pour équation :

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0,$$

et comme elle passe par P, les coordonnées de ce point étant x_0, y_0, z_0, on a :

$$x_0f'_{x_1} + y_0f'_{y_1} + z_0f'_{z_1} = 0.$$

C'est une relation du premier degré en x_1, y_1, z_1; le lieu cherché est donc la droite qui correspond à l'équation :

$$x_0f'_x + y_0f'_y + z_0f'_z = 0.$$

c'est-à-dire la polaire du point P.

128. Idée générale d'une méthode de transformation. Imaginons une figure fixe, que nous appellerons la figure de référence et que nous désignerons par la lettre φ; mettons en présence de φ une figure géométrique F et supposons que par une certaine construction géométrique, prenant φ pour base, on puisse déduire de F une figure f; nous dirons

alors que f est une transformée de F. S'il arrive que la loi géométrique en question, appliquée à f (φ étant toujours la figure de référence) reproduise F, on exprime cette propriété en disant que la transformation est *réciproque*.

129. Définition de la transformation par polaires réciproques. Prenons pour figure de référence une conique φ ; soit M un point supposé mobile dans une figure F(1), et soit μ sa polaire, par rapport à φ. La droite μ, dans son mouvement, enveloppe une courbe f. Nous disons, avec *Poncelet* qui a imaginé cette transformation, que f est la transformée de F, par *polaires réciproques*.

130. Théorème. *Si une courbe f est la transformée par polaires réciproques d'une courbe* F ; *réciproquement*, F *est la transformée de f.*

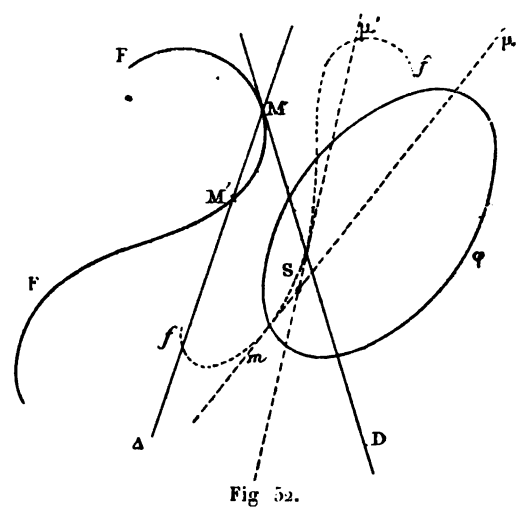


Fig 52.

Cette propriété constitue *le principe de corrélation* des figures f et F : elle s'établit de la manière suivante :

1. On dit aussi *espace* F, au lieu de *figure* F : nous avons cru devoir employer ce dernier terme, malgré l'inconvénient que présente la répétition du mot, parce qu'il nous paraît rendre, plus nettement, l'idée qu'il doit exprimer.

Soient MM′ deux points de F, μ et μ' leurs polaires par rapport à la conique de référence φ. Les deux droites μ et μ' se coupent en un point δ qui est le pôle de la droite Δ, qui joint les points M et M′. (§ 126 et 127).

Supposons maintenant que le point M′ se rapproche du point M et vienne se confondre avec lui, Δ a pour position limite la droite D, droite tangente à F, au point M. D'autre part le point δ a pour limite le point m, point de contact de μ et de f. La droite D est donc la polaire du point m.

D'après cette remarque, si l'on veut transformer la courbe f, par la loi des polaires réciproques, on doit chercher l'enveloppe des droites D; cette enveloppe est la courbe F, elle-même. La réciprocité de la transformation est donc établie.

131. Utilité de la transformation précédente. Sans entrer dans de plus longs détails sur cette importante théorie géômétrique, nous nous bornerons à indiquer quelle est son application la plus fréquente, et aussi quel est le théorème général qui définit le lien qui existe entre deux courbes, transformées l'une de l'autre par polaires réciproques.

Imaginons que, dans une figure F, on ait à démontrer que trois droites A, B, C sont concourantes. On transformera F par polaires réciproques, au moyen d'un cercle par exemple, et l'on obtiendra trois points a, b, c; pôles des droites données. Si l'on peut reconnaître que ces trois points sont en ligne droite il sera démontré, par cela même, que A, B, C sont bien trois droites concourantes.

Dans d'autres cas, au contraire, ayant à démontrer que trois points P, Q, R d'une figure F sont placés en ligne droite, on cherchera à reconnaître que les polaires p, q, r de ces points sont des droites concourantes.

Voici maintenant le théorème auquel nous avons fait allusion.

132. Théorème. *Si l'on transforme une courbe F, de classe ν et d'ordre μ, par polaires reciproques; la transformée f, est une courbe de classe μ et d'ordre ν.*

Soit Δ une droite quelconque de la figure F; elle rencontre cette courbe en μ points $A_1, \ldots A_\mu$. A cette droite Δ correspond un point δ et, au point A_1, une droite a_1 qui passe par δ et qui est tangente à f. Cette remarque s'applique à tous les points $A_1, \ldots A_\mu$; il a y donc μ droites passant par δ et tangentes à la transformée f. D'ailleurs il n'y en a pas davantage et comme δ est un point quelconque du plan, puisque δ est le pôle d'une droite Δ arbitrairement choisie, on voit que la classe de f est égale à μ.

La réciprocité des courbes F et f, prouve que l'ordre de f est égal à la classe de F, et que, par conséquent, il est égal à ν.

EXERCICES

1. *On considère un cercle C, et une droite quelconque Δ, dans son plan. Soit O un point fixe de C; par O, on mène une transversale, qui rencontre C en A et Δ en B; trouver le lieu décrit par le conjugué harmonique de O par rapport aux points A, B.*

Le résultat est une courbe du second degré.

2. *On donne deux cercles Δ, Δ' ayant un point commun en O; par O on mène une transversale qui coupe Δ en A, Δ' en B. Trouver le lieu décrit par le conjugué harmonique de O, par rapport aux points A et B.*

On trouvera pour le lieu demandé une cubique ayant pour point double O, et passant par les ombilics du plan. On pourra vérifier que les tangentes à la cubique trouvée en O sont les tangentes aux cercles Δ, Δ' et que la direction asymptotique s'obtient en menant par le point O une perpendiculaire à la droite qui joint O au milieu de la distance des centres.

On examinera le cas particulier où les cercles se coupent orthogonalement.

3. *Trouver la transformée par polaires réciproques, d'un cercle Δ', par rapport à un autre cercle Δ.*

La ligne des centres étant prise pour axe des x, l'origine étant le centre de Δ, et les axes étant rectangulaires, on trouve :

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{dx - R^2}{R'}\right)^2;$$

dans cette relation : d désigne la distance des centres, R et R′ les rayons des circonférences Δ, Δ'.

4. *Démontrer que le triangle dont les côtés ont pour équation, respectivement,*

$$(1)\ P = 0, \quad (2)\ Q = 0, \quad (3)\ R = 0;$$

jouit, relativement à la conique qui correspond à l'équation :

$$\varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2 + \varepsilon'' R^2 = 0,$$

de cette propriété que chaque sommet est le pôle du côté opposé.

En appelant (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du point commun aux droites (2) et (3) on voit, en effet, par application de l'équation (P) (§ 121), que la polaire de ce point a pour équation $P = 0$.

Un triangle qui jouit de cette propriété remarquable est dit *triangle autopolaire* ou encore *triangle conjugué* relativement à la conique considérée.

5. *On considère une conique fixe* Γ *et un point fixe* P; *par* P *on mène deux transversales arbitraires qui coupent* Γ : *l'une aux points* A *et* B ; *l'autre aux points* C, D ; *démontrer que le lieu des points de concours des droites* AC, BD *est la polaire du point* P.

On prend pour axes (mais ce choix est tout à fait particulier a cette question) les droites mobiles AB, CD et l'on vérifie que le point commun a ces deux droites appartient à la polaire de P.

TREIZIÈME LEÇON.

LES ASYMPTOTES.

133. Directions asymptotiques Lorsque l'équation d'une courbe U, est constamment vérifiée par les coordonnées x, y d'un point M s'éloignant à l'infini dans une direction (α, β) (§ 83 *bis*), nous dirons que la droite qui correspond à l'équation $\beta x - \alpha y = 0$, est une direction asymptotique de la courbe U.

Nous supposerons d'abord que U est une courbe dont l'équation est $f(x, y, z) = 0$, f désignant une forme entière des lettres x, y, z : nous examinerons, plus tard, le cas où l'équation est irrationnelle, ou transcendante.

134. Définition des Asymptotes. Imaginons un bras de courbe parcouru par un point M dont les coordonnées croissent au delà de toute limite et vérifient constamment l'équation :

$$f(x, y, z) = 0.$$

Si, à chaque instant, on construit la tangente au point M, cette droite a, en général, comme nous le montrerons tout à l'heure, une position limite bien déterminée. C'est cette droite, ainsi définie, que nous appellerons une *asymptote* de la courbe. Ainsi : *l'asymptote qui correspond à une direction asymptotique est la position limite de la tangente au point qui s'est éloigné à l'infini, sur la courbe, dans la direction donnée.*

Les asymptotes sont donc, d'après cette définition, des tangentes particulières de la courbe; et elles sont caracté-

risées par ce fait, que leur point de contact est rejeté à l'infini. Elles jouissent de propriétés remarquables et leur détermination est, très spécialement, utile au tracé des courbes. Nous allons apprendre à les déterminer; mais nous nous occuperons d'abord des asymptotes parallèles à l'axe des y, ces droites se déterminant par des considérations particulières.

185. Asymptotes parallèles à Oy. — **Théorème**. *Les asymptotes parallèles à l'axe des y s'obtiennent en égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de y, dans l'équation de la courbe donnée.*

Soit :

$$f(x, y, z) = 0,$$

l'équation de la courbe; on peut ordonner la fonction entière f par rapport aux puissances décroissantes de y, en écrivant :

$$f(x, y, z) = y^p f_1(x, z) + y^{p-1} f_2(x, z) + \dots ;$$

on a donc,

$$f'_x = y^p f'_{1,x} + y^{p-1} f'_{2,x} + \cdots ,$$
$$f'_y = p y^{p-1} f_1(x, z) + \dots ,$$
$$f'_z = y^p f'_{1,z} + y^{p-1} f'_{2,z} + \cdots .$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un point M mobile sur la courbe; y est une fonction implicite de x, mais une fonction qui peut être considérée comme bien déterminée. (Alg. § 313). Nous supposons que x est une variable indépendante, atteignant une valeur α; et que y, valeur réelle bien déterminée, qui correspond à x, croit au delà de toute limite, quand x tend vers α. Dans ces conditions, le point M décrit un bras de courbe Δ, que nous allons considérer.

La tangente Δ', au point M, a pour équation :

$$X(y^p f'_{1,x} + y^{p-1} f'_{2,x} + \dots) + Y(p y^{p-1} f_1 + \dots) + Z(y^p f'_{1,z} + y^{p-1} f'_{2,z} + \dots) = 0,$$

ou,

$$X\left(f'_{1,x} + \frac{1}{y} f'_{2,x} + \cdots\right) + Y\left(\frac{p}{y} f_1 + \dots\right) + Z\left(f'_{1,z} + \frac{1}{y} f'_{2,z} + \cdots\right) = 0.$$

Supposons que le point M s'éloigne à l'infini, l'équation précédente, pour $x = \alpha$ et $y = \infty$, devient :

$$(1) \quad Xf'_{1,x}(\alpha, z) + Zf'_{1,z}(\alpha, z) = 0.$$

C'est l'équation de l'asymptote; mais on peut lui donner une forme plus simple.

L'identité d'Euler appliquée à la fontion $f_1(x, z)$, fonction dont nous désignerons le degré par h, donne :

$$(2) \quad hf_1(x, z) = xf'_{1,x}(x, z) + zf'_{1,z}(x, z).$$

D'autre part, l'équation de la courbe étant mise sous la forme :

$$f_1(x, z) + \frac{1}{y} f_2(x, z) + \ldots = 0.$$

donne, si elle est vérifiée par une valeur infinie de y et par la valeur α donnée a x,

$$f_1(\alpha, z) = 0.$$

L'identité (2) conduit donc à l'égalité suivante :

$$(3) \quad \alpha f'_{1,x}(\alpha, z) + zf'_{1,z}(\alpha, z) = 0.$$

En comparant (1) et (3), on a :

$$X = \alpha.$$

Ainsi : *lorsqu'un point s'éloigne à l'infini dans la direction Oy, l'asymptote s'obtient en égalant à zéro l'un des facteurs binômes de la fonction entière de x qui constitue le coefficient de la plus haute puissance de y.*

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie; nous donnerons, plus loin, un exemple de cette inexactitude (§139, 1°).

136. Théorème. *La distance, d'un point mobile sur un bras de courbe, à l'asymptote qui correspond à ce bras, tend vers zéro, quand le point s'éloigne à l'infini.*

Considérons d'abord le cas d'une asymptote parallèle à Oy.

Soit M le point considéré sur le bras de courbe AB, Δ l'asymptote de ce bras; abaissons sur Δ la perpendiculaire MP, nous avons :

$$MP = MN \sin \theta,$$

ou

$$MP = (a - x) \sin \theta;$$

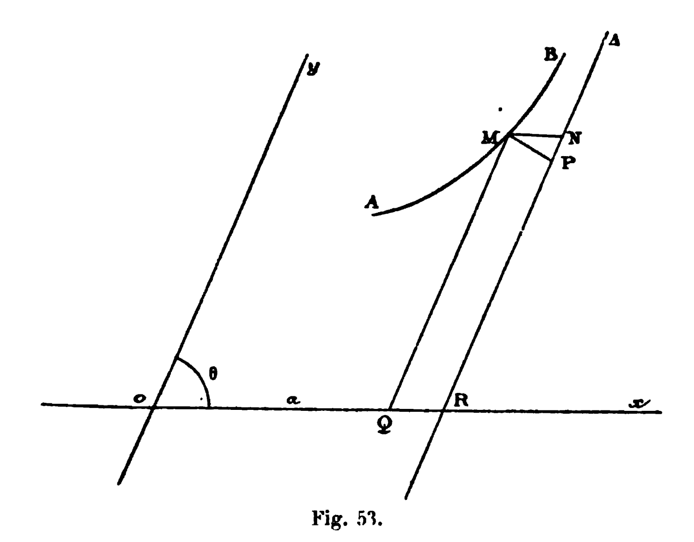


Fig. 53.

x désignant l'abcisse du point M. Si nous imaginons maintenant que M s'éloigne à l'infini, sur AB, la limite de x est égale à a; d'où il résulte que la limite de MP est nulle.

Si nous considérons maintenant une asymptote Δ, non parallèle à Oy, en effectuant un changement d'axes et en prenant la direction de Δ, pour nouvel axe des y, nous retombons dans le cas que nous venons d'examiner; la propriété énoncée, propriété très importante pour le tracé des courbes, appartient donc à toutes les asymptotes.

Elle est d'ailleurs caractéristique de ces droites, comme le prouve la réciproque que nous allons maintenant établir.

137. Théorème. *Lorsqu'un point* M *mobile sur un bras courbe* AB, *courbe correspondant à une équation algébrique de forme entière, peut s'éloigner à l'infini, sa distance à une droite* Δ *tendant vers zéro ;* Δ *est asymptote au bras considéré.*

Prenons l'axe Oy parallèle à Δ (fig. 53) et remarquons, en vertu de la relation : MP = MN sin θ, que MN tend vers zéro, en même temps que MP. Soient x, y, z, les coordonnées de M, l'équation de la tangente est (§ 134) :

$$X\left(f'_{1,x}(x,z)+\frac{1}{y}f'_{2,x}+\ldots\right)+Y\left(\frac{p}{y}f_1+\ldots\right)+Z\left(f'_{1,z}(x,z)+\frac{1}{y}f'_{2,z}+\ldots\right)=0.$$

Puisque MN a pour limite zéro, nous pouvons poser,

$$x = a + \varepsilon,$$

ε étant une fonction de x et de y qui est nulle pour

$$x = \alpha, \text{ et } \frac{1}{y} = 0.$$

L'équation précédente devient alors, par application de la formule de Taylor,

$$X f'_{1,x}(\alpha, z) + Z f'_{1,z}(\alpha, z) + \ldots = 0.$$

les termes qui ne sont pas écrits renfermant tous le facteur ε, ou le facteur $\frac{1}{y}$, multiplié par des quantités qui ont une valeur finie. La position limite de la tangente considérée est donc une droite dont l'équation est :

$$X f'_{1,x}(\alpha, z) + Z f'_{1,z}(\alpha, z) = 0.$$

ou, comme nous l'avons remarqué plus haut,

$$X = a.$$

Ainsi Δ est bien la limite des positions d'une tangente dont

le point de contact s'est éloigné à l'infini ; Δ est donc, conformément à notre définition, une asymptote.

138. Théorème. *Dans le cas général, il y a deux bras de courbe asymptotes à une droite Δ, et ces deux bras sont disposés, de part et d'autre de Δ, aux extrémités opposées.*

Supposons, comme tout à l'heure, que Δ soit parallèle à Oy, puisque cette condition peut toujours être réalisée, par un changement d'axes, et prenons l'équation de la courbe sous la forme :

$$(1) \quad y^p f_1(x,z) + y^{p-1} f_2(x,z) + \ldots = 0.$$

Dans le cas général que nous voulons examiner, celui qui correspond à l'absence de relations entre les coefficients de l'équation donnée, α est une racine simple de l'équation $f_1 = 0$, et nous avons :

$$f_2(\alpha, z) \neq 0.$$

Posons :

$$f_1(x,z) = (x - \alpha z) F_1(x,z).$$

Nous avons aussi,

$$F_1(\alpha, z) \neq 0.$$

Ceci posé, écrivons l'équation (1) sous la forme suivante

$$(2) \quad -\frac{1}{y}\left(f_2 + \frac{1}{y} f_3 + \ldots\right) = (x - \alpha z) F_1.$$

Pour $x = \alpha$, nous avons $\frac{1}{y} = 0$, et nous pouvons remarquer que le premier membre n'admet qu'une seule racine nulle en $\frac{1}{y}$, puisque nous supposons $f_2(\alpha, z) \neq 0$. Pour des valeurs de x voisines de α, le premier membre admet donc des valeurs réelles de $\frac{1}{y}$; car si, pour $x = \alpha + \varepsilon$, le premier membre admettait pour $\frac{1}{y}$, une racine $a + bi$, a et b étant des fonctions d'ε, fonctions telles que l'on eut :

$$\text{Lim}\ a = 0, \text{ et Lim } b = 0, (\text{pour } \varepsilon = 0);$$

l'équation (2) admettrait aussi la racine $a - bi$ et l'on obtiendrait deux racines nulles pour $\frac{1}{y}$, quand on suppose $x = \alpha$. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse.

Le raisonnement précédent conduit à une conclusion qui subsiste quand on donne à x des valeurs un peu supérieures, ou un peu inférieures à α. Il y a donc deux bras réels de la courbe dans le voisinage de Δ et de part et d'autre de cette droite; il nous reste à montrer qu'ils sont situés aux extrémités opposées de cette droite.

En effet, l'égalité (2) étant écrite sous la forme :

$$-\frac{1}{y} = \frac{(x - \alpha z)\, F_1}{f_2 + \frac{1}{y} f_3 + \ldots},$$

Avant le passage par α, le signe du second membre est celui de $\frac{F_1(\alpha, z)}{f_2(\alpha, z)}$; quantité qui n'est ni nulle, ni infinie; après le passage, le second membre a, au contraire, le signe de $\frac{F_1(\alpha, z)}{f_2(\alpha, z)}$. Ainsi, $\frac{1}{y}$ a une valeur positive, avant le passage, et négative après, ou inversement. Dans tous les cas, les deux bras de la courbe qui sont asymptotes à Δ, sont placés *de part et d'autre, et aux extrémités opposées, de cette droite.*

Cette disposition est celle que l'on rencontre quand il n'y a pas de singularités dans la courbe au point à l'infini considéré; on peut la nommer la *disposition normale.* Elle subsiste quand on suppose que α est une racine, de multiplicité impaire, de l'équation $f_1 = 0$, n'appartenant pas à l'équation $f_2 = 0$.

139. Théorème. *Le nombre des bras de la courbe qui sont asymptotes à une droite Δ est toujours un nombre pair.*

En effet, supposons que la racine α annule les fonctions $f_1, f_2, \ldots f_{i-1}$, mais non f_i. Pour $x = \alpha$, il y a donc i valeurs de $\frac{1}{y}$ qui sont nulles ; pour $x = \alpha - \varepsilon$ il y a aussi i valeurs de

$\frac{1}{y}$ dans le voisinage de zéro et parmi elles t qui sont réelles et 2θ qui sont imaginaires. On a donc :

$$i = t + 2\theta.$$

Pour $x = \alpha + \varepsilon$ il y a encore i valeurs de $\frac{1}{y}$ voisines de zéro; t' sont réelles, $2\theta'$ sont imaginaires, et l'on a encore :

$$i = t' + 2\theta'.$$

Ces égalités donnent :

$$t + t' = 2i - 2\theta - 2\theta'.$$

Le nombre $(t + t')$ des bras réels qui sont asymptotes à Δ est donc un nombre pair.

Nous avons supposé que Δ était une droite parallèle à Oy, condition à laquelle on peut toujours satisfaire, par un changement d'axes.

Exemples divers. Lorsque, pour $x = \alpha$, on trouve que l'équation proposée est vérifiée par la valeur : $\frac{1}{y} = 0$, la droite qui correspond à l'équation $x - \alpha = 0$, peut être asymptote à des bras réels de la courbe ; il peut aussi arriver qu'elle soit asymptote à des bras dont le nombre soit supérieur à 2 ; enfin, il est nécessaire pour le tracé de la courbe de fixer la disposition relative de l'asymptote et des différents bras qui aboutissent aux extrémités de cette droite.

Cette discussion est, dans certains cas, assez délicate, comme nous le montrerons, tout à l'heure, sur un exemple particulier. Mais quand l'équation de la courbe est résoluble par rapport à y, la position des bras se fixe, le plus souvent, sans difficulté.

Les équations suivantes, et les figures que nous avons placées en regard, montrent la disposition des courbes qui correspondent à ces équations, dans le voisinage et aux extrémités de la droite qui a pour équation : $x - 1 = 0$.

1° $y^2 = \frac{1 - 2x}{(x-1)^2}$ Pour $x = 1$, $\frac{1}{y} = 0$; il n'y a aucun bras réel asymptote à la droite ($x = 1$).

2° $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Fig. 54.

3° $y = \frac{x}{(x-1)^2}$.

Fig. 55.

4° $y^2 = \frac{x}{x-1}$.

Fig. 56.

5° $y = \frac{1 \pm \sqrt{1-x}}{1-x}$.

Fig. 57.

6° $y^2 = \frac{x}{(x-1)^2}$.

Fig. 58.

7° $y = \frac{1 \pm (x-1)\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

Fig. 59.

8° $y^2 = \frac{1 \pm \sqrt{x-1}}{x-1}$.

Fig. 60.

9° $y = \frac{2 \pm \sqrt{(x-1)^2+1}}{(x-1)^2}$.

Fig. 61.

$10°\quad y = \frac{2 \pm \sqrt{x-1} \pm \sqrt{x}}{x-1}.$

Fig. 62.

140. Méthode générale. — Application à un exemple. Supposons maintenant, c'est le cas qui exige quelque attention et auquel nous avons fait allusion tout à l'heure, que l'équation proposée soit vérifiée par $x = \alpha$ et $\frac{1}{y} = 0$, et qu'elle ne soit pas résoluble par rapport à y. Le problème qui se pose en pareil cas, est le suivant : 1° déterminer le nombre des bras réels de la courbe qui sont asymptotes à la droite ($x = \alpha$), 2° fixer la position de ces différents bras relativement à cette droite.

Soit : $F(x, y) = 0$, l'équation cartésienne de la courbe proposée; en la coupant par la droite dont l'équation est $x = \alpha \pm \varepsilon$, on peut chercher combien il y a de valeurs réelles de $\frac{1}{y}$ dans le voisinage de zéro, quand on suppose : $\text{Lim}\ \varepsilon = 0$. Dans d'autres cas, on considérera la droite qui a pour équation : $y = h$; on supposera h très grand, d'abord positif, puis négatif, et on déterminera combien de valeurs réelles de x, voisines de α, vérifient l'équation donnée.

Prenons l'exemple suivant. Soit :

$$(1)\quad x^2(1+x) + x(1-x)\frac{1}{y} + (1+x)\frac{1}{y^2} = 0,$$

l'équation de la courbe donnée, on propose d'étudier cette courbe, dans le voisinage de l'axe des y.

Désignons par ε, une quantité variable, négative ou positive, et aussi petite que l'on voudra. Considérons la droite qui a pour équation : $x = \varepsilon$, et posons $\frac{1}{y} = U$. A cette valeur ε,

donnée à x, correspondent trois valeurs de U, lesquelles sont racines de l'équation:

$$(2)\quad U^3 + U\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon} + \varepsilon^2 = 0.$$

La réalité des racines de cette équation dépend du signe de la quantité V,

$$V = \frac{4\varepsilon^3(1-\varepsilon)^3}{(1+\varepsilon)^3} + 27\varepsilon^4 = \varepsilon^3\left[27\varepsilon + \frac{4(1-\varepsilon)^3}{(1+\varepsilon)^3}\right]$$

Dans cette formule, la quantité placée dans la parenthèse a pour limite $+4$, quand ε tend vers zéro. Ainsi V a le même signe que celui de ε.

Quand on suppose $\varepsilon > 0$, il y a donc une seule valeur réelle pour $\frac{1}{y}$; et cette racine a un signe contraire à celui du dernier terme $+\varepsilon^2$, est négative. Il y a, par conséquent, un seul bras de la courbe, situé à la droite de l'axe des y; il est dirigé vers la partie inférieure.

Si l'on donne maintenant à ε, une valeur négative, l'équation (2) a ses trois racines réelles et, comme elle présente deux variations; elle admet donc deux racines positives et

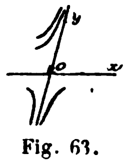


Fig. 63.

une racine négative. Ainsi il y a, à gauche de l'axe des y, deux bras de courbe dirigés vers l'extrémité supérieure, et un troisième placé à l'extrémité inférieure. En résumé, la courbe, dans le voisinage de l'axe des y, a l'aspect général indiqué par la figure ci-dessus.

EXERCICES

1. *Construire la courbe qui a pour équation :*

$$y^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-n}.$$

2. *Donner la forme générale de la courbe qui correspond à l'équation :*

$$y^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4} + \dots + \frac{2n}{x^2-n^2}.$$

3. *Construire la courbe qui correspond à l'équation*

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}.$$

On pourra remarquer que cette équation peut s'écrire :

$$y = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3}\right) + \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right),$$

ou,

$$y = \frac{2x-3}{x(x-3)} + \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}; \text{ etc... .}$$

QUATORZIÈME LEÇON

LES ASYMPTOTES (Suite).

Nous nous occuperons maintenant des asymptotes non parallèles à l'axe des y, des *asymptotes quelconques*, comme on les appelle aussi, pour les distinguer des premières.

141. Théorème I. *Les directions asymptotiques appartiennent au faisceau de droites qui correspondent à l'équation que l'on obtient, en égalant à zéro le groupe homogène formé par les termes du degré le plus élevé en x et en y.*

Soit $f(x,y,z) = 0$ l'équation de la courbe proposée U; ordonnons la fonction entière f, par rapport aux puissances croissantes de z et posons :

$$(1)\quad f(x,y,z) = \varphi_m(x,y) + z\,\varphi_{m-1}(x,y) + \dots + z^m\varphi_0 = 0.$$

Dans cette notation $\varphi_h(x,y)$ désigne une fonction entière, homogène et du degré h. En particulier φ_m représente le groupe homogène des termes du degré m en x et y, d'ailleurs la courbe étant supposée du degré m, on doit observer que φ_m n'est pas identiquement nul.

L'équation de la courbe donnée peut s'écrire :

$$(2)\quad \varphi_m\left(1,\frac{y}{x}\right) + \frac{z}{x}\varphi_{m-1}\left(1,\frac{y}{x}\right) + \dots + \frac{z^m}{x^m}\varphi_0 = 0.$$

Imaginons un point M, mobile sur U et s'éloignant à l'infini dans une direction $(\alpha,\beta,)$ qui, nous le supposerons d'abord,

n'est pas celle de y. Alors, α n'est pas nul, la variable arbitraire x croit au delà de toute limite, et $\frac{y}{x}$ a une valeur limite, bien déterminée et non infinie, $\frac{\alpha}{\beta}$. L'équation (2) étant toujours vérifiée par les coordonnées du point mobile, on a, à la limite,

$$\varphi_m\left(1, \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0,$$

ou,

$$\varphi_m(\alpha, \beta) = 0,$$

les directions asymptotiques sont donc des droites, partant de l'origine, et faisant partie du faisceau qui correspond à l'équation :

$$\varphi_m(x, y) = 0.$$

Cette équation donne aussi la droite Oy quand elle est une direction asymptotique. En effet, si le polynôme $\varphi_m(x, y)$ renferme le terme y^m, le coefficient de y^m est une constante, il n'y a pas de points s'éloignant à l'infini dans la direction Oy (§ 134). Si, au contraire, φ_m ne renferme pas de terme en y^m, il peut y avoir des asymptotes parallèles à Oy, mais alors φ_m renferme le facteur x et l'axe Oy sera, dans ce cas, une direction asymptotique.

En résumé, dans tous les cas, les directions asymptotiques vérifient l'équation : $\varphi_m(x, y) = 0$.

142. Equation de l'asymptote. Nous supposons qu'un point M s'éloigne à l'infini, sur une courbe, dans une direction (α, β). Désignons par (x, y, z) les coordonnées de M, quand il est à distance finie, et remarquons qu'en vertu des identités :

$$f'_x \equiv \varphi'_{m,x} + z\varphi'_{m-1,x} + \cdots,$$
$$f'_y \equiv \varphi'_{m,y} + z\varphi'_{m-1,y} + \cdots,$$
$$f'_z \equiv \varphi_{m-1} + \cdots,$$

identités déduites de (1), l'équation de la tangente au point (x, y, z) est :

$$X(\varphi'_{m,x}+z\varphi'_{m-1,x}+\ldots)+Y(\varphi'_{m,y}+z\varphi'_{m-1,y}+\ldots)+Z(\varphi_{m-1}+\ldots)=0.$$

Divisons par x^{m-1} puis passons à la limite et multiplions l'équation obtenue par α^{m-1} ; nous avons pour résultat :

$$(A)\quad X\varphi'_{m,x}(\alpha,\beta)+Y\varphi'_{m,y}(\alpha,\beta)+Z\varphi_{m,1}(\alpha,\beta)=0.$$

Cette droite (A) est toujours bien déterminée, et à distance finie, quand $\beta x-\alpha y$ est un diviseur simple du polynôme φ_m. En effet, les deux dérivées partielles $\varphi'_{m,x}$, $\varphi'_{m,y}$ ne peuvent s'annuler simultanément que si $\beta x-\alpha y$ est un diviseur multiple de φ_m. (Alg. § 406).

Nous supposerons d'abord que $\beta x-\alpha y$ soit un diviseur simple de φ_m; c'est le cas général : mais nous reviendrons plus tard sur les cas particuliers, qui peuvent se présenter dans cette recherche. Nous ferons observer encore que $\varphi'_{m,y}$ est nécessairement différent de zéro; car s'il était nul, l'asymptote serait parallèle à l'axe des y, ce que nous ne supposons pas.

143. Autre forme de l'équation de l'asymptote. Puisque nous avons,

$$\varphi'_{m,y}(\alpha,\beta)\neq 0,$$

écrivons l'équation (A) sous la forme :

$$Y=-\frac{\varphi'_{m,x}(\alpha,\beta)}{\varphi'_{m,y}(\alpha,\beta)}X-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha,\beta)}{\varphi'_{m,y}(\alpha,\beta)},$$

ou,

$$Y=cX+d,$$

en posant :

$$c=-\frac{\varphi'_{m,x}(\alpha,\beta)}{\varphi'_{m,y}(\alpha,\beta)},\quad \text{et}\quad d=-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha,\beta)}{\varphi'_{m,y}(\alpha,\beta)}.$$

La première de ces formules peut être simplifiée par la remarque suivante. On a :

$$\varphi_m(x,y) = x\varphi'_{m,x}(x,y) + y\varphi'_{m,y}(x,y).$$

De cette identité, on déduit, pour les valeurs particulières $x = \alpha$, $y = \beta$, l'égalité :

$$o = \alpha\varphi'_{m,x}(\alpha,\beta) + \beta\varphi'_{m,y}(\alpha,\beta),$$

d'où,

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\varphi'_{m,x}(\alpha,\beta)}{\varphi'_{m,y}(\alpha,\beta)}.$$

On a donc,

$$c = \frac{\beta}{\alpha},$$

et comme l'on a aussi,

$$\varphi_m(\alpha,\beta) = o,$$

ou,

$$\varphi_m\left(1,\frac{\beta}{\alpha}\right) = o;$$

on peut dire que *le coefficient angulaire d'une asymptote est une des racines de l'équation obtenue en remplaçant x par 1, et y par c, dans le groupe homogène des termes du degré m en x, y de l'équation donnée.*

La formule qui donne l'ordonnée à l'origine de l'asymptote peut s'écrire, en divisant ses deux termes par α^{m-1},

$$d = -\frac{\varphi_{m-1}\left(1,\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\varphi'_{m,y}\left(1,\frac{\beta}{\alpha}\right)};$$

ou, puisque $c = \frac{\beta}{\alpha}$,

$$d = -\frac{\varphi_{m-1}(1,c)}{\varphi'_{m,y}(1,c)}.$$

Remarquons, d'ailleurs, que : calculer la dérivée partielle de $\varphi_m(x, y)$, par rapport à y, pour y remplacer x par 1 et y par c, revient à prendre immédiatement la dérivée de $\varphi_m(1 . c)$ par rapport à c; nous avons donc, finalement,

$$d = -\frac{\varphi_{m-1}(1, c)}{\varphi'_{m,c}(1, c)}.$$

Cette formule donne pour d, une valeur finie et toujours bien déterminée, quand c est une racine simple de l'équation

$$\varphi_m(1, c) = 0.$$

Application aux coniques. Considérons, en particulier, les courbes du second ordre. L'équation de ces courbes est :

$$f(x, y, z) = 0$$

en posant :

$$f(x, y, z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Byz + 2B'xz + A''z^2.$$

Les directions asymptotiques sont données par l'équation :

$$(1) \quad A'c^2 + 2B''c + A = 0;$$

qui a ses racines réelles, si l'on suppose $AA' - B''^2 < 0$.

Faisons cette hypothèse, et appliquons les formules que nous venons d'établir; nous obtenons d'abord :

$$d = -\frac{Bc + B'}{A'c + B''}.$$

L'équation de l'asymptote est donc :

$$y - cx + \frac{Bc + B'}{A'c + B''} = 0,$$

ou,

$$(2) \quad -A'xc^2 + c(A'y - B''x + B) + B''y + B' = 0.$$

Entre les équations (1) et (2) éliminons c, nous obtenons le résultat suivant :

$$A'(Ax + B''y + B')^2 = (-B''x - A'y - B)[(AA' - 2B''^2)y - AB''x + AB - 2B'B''].$$

En remarquant que la dernière parenthèse de cette égalité peut s'écrire sous la forme :

$$Af'_y - 2B''f'_x,$$

on obtient l'équation suivante :

$$Af'^2_y + A'f'^2_x - 2B''f'_xf'_y = 0.$$

Cette relation est vérifiée par les coordonnées x, y, d'un point quelconque pris sur l'une des asymptotes de la conique, elle est du second degré, elle représente donc l'ensemble de deux droites, asymptotes de cette courbe.

144. Asymptotes rejetées à l'infini. Reprenons l'équation (A), et supposons que nous ayons :

$$\varphi'_{m,x}(\alpha, \beta) = 0, \quad \varphi'_{m,y}(\alpha, \beta) = 0, \quad \text{et} \quad \varphi_{m-1}(\alpha, \beta) \neq 0.$$

L'équation se réduit à $z = 0$; c'est la droite de l'infini. Si l'on suit, sur la courbe, le déplacement du point mobile, et les positions successives de la tangente en ce point, on voit que cette droite se déplace, en s'éloignant de plus en plus de l'origine mais en ayant une direction très voisine de celle de la droite qui a pour équation :

$$(1) \quad \beta x - \alpha y = 0.$$

Cette remarque a une grande importance dans le tracé des courbes, et quand on rencontre une direction asymptotique multiple, à laquelle correspond la droite de l'infini, on doit tourner la concavité du bras de courbe, correspondant, vers la droite (1).

145. Asymptotes imaginaires. Directions isotropes. Lorsque l'équation

$$(1) \quad \varphi_m(x, y) = 0,$$

admet la solution :

$$x = \alpha + \alpha' i, \quad y = \beta + \beta' i;$$

α' et β' n'étant pas nuls en même temps, on dit que cette solution constitue une direction asymptotique imaginaire. En adoptant ce langage, on voit que l'équation (1) ayant toujours m racines réelles, imaginaires ou coïncidentes, *il y a m directions asymptotiques dans une courbe du degré m.* Mais il faut entendre que ces directions sont, comme les racines d'une équation, réelles, imaginaires ou coïncidentes.

Parmi les directions asymptotiques imaginaires, on distingue, tout particulièrement, celles qu'on nomme *isotropes* et qui correspondent à l'équation :

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = 0.$$

Nous montrerons ici, un exemple de l'intérêt qui s'attache à ces directions isotropes, en démontrant le théorème suivant.

146. Théorème. *Lorsqu'une courbe algébrique* U, *admet pour directions asymptotiques les directions isotropes ; elle passe par les ombilics du plan.*

Les axes étant rectangulaires, posons :

$$\varphi_m(x, y) \equiv (x^2 + y^2)\,\psi_{m-2}(x, y),$$

et considérons aussi un cercle quelconque dans le plan de la courbe, cercle correspondant à l'équation :

$$(1) \quad x^2 + y^2 = z(\alpha x + \beta y + \gamma z).$$

L'équation de U étant mise sous la forme

$$(2) \quad (x^2 + y^2)\,\psi_{m-2}(x, y) + z\varphi_{m-1}(x, y) + \ldots = 0.$$

Si nous cherchons les points communs au cercle et à la courbe, nous devons résoudre les équations (1) et (2), ou considérer l'une d'elles, avec la combinaison suivante :

$$(3) \quad z\left\{ (\alpha x + \beta y + \gamma z)\,\psi_{m-2} + \varphi_{m-1}(x, y) + \ldots \right\} = 0.$$

Cette dernière se décompose en deux ; $z = 0$, qui représente la droite de l'infini ; et une équation qui est seulement du degré $(m - 1)$. Par conséquent on obtiendra $2(m - 1) = 2m - 2$ points communs, à distance finie, au lieu de $2m$. Deux points imaginaires parmi les points cherchés sont rejetés à l'infini. Ainsi, la courbe U passe par les ombilics du plan, quand elle admet les directions isotropes. On peut dire aussi, si l'on préfère ce langage, que tout cercle pris dans le plan de la courbe ne la rencontre qu'en $(2m - 2)$ points à distance finie ; m désignant l'ordre de la courbe.

ASYMPTOTES PARALLÈLES

L'équation (A) trouvée plus haut (§ 142) devient identique quand on a simultanément.

$$\varphi'_{m,x}(\alpha,\beta) = 0, \quad \varphi'_{m,y}(\alpha,\beta) = 0, \quad \varphi_{m-1}(\alpha,\beta) = 0.$$

C'est le cas particulier que nous allons examiner et qui constitue, au point de vue du tracé des tangentes, l'étude des points singuliers, rejetés à l'infini.

147. Principe. *Lorsqu'un point* M, *de coordonnées x, y, s'éloigne à l'infini sur un bras de courbe, asymptote à une droite non parallèle à* O*y et dont l'équation est :*

$$y = cx + d;$$

on a :

$$c = \lim \frac{y}{x}, \quad \text{et} \quad d = \lim (y - cx), \ (\text{pour } x = \infty).$$

On a, en effet, OQ étant l'abcisse commune des points M et M',

$$M'Q = cx + d,$$

et,

$$MQ = y.$$

De ces égalités, on conclut :

$$(1)\quad y + MM' = cx + d;$$

x, y désignant, nous le rappelons, les coordonnées du point M situé sur la courbe AB. Supposons maintenant que ce point s'éloigne à l'infini en restant toujours sur AB ; le triangle rectangle MPM' donne,

$$MP = MM' \sin PM'M,$$

ou,

$$MP = MM' \sin(\theta - \alpha).$$

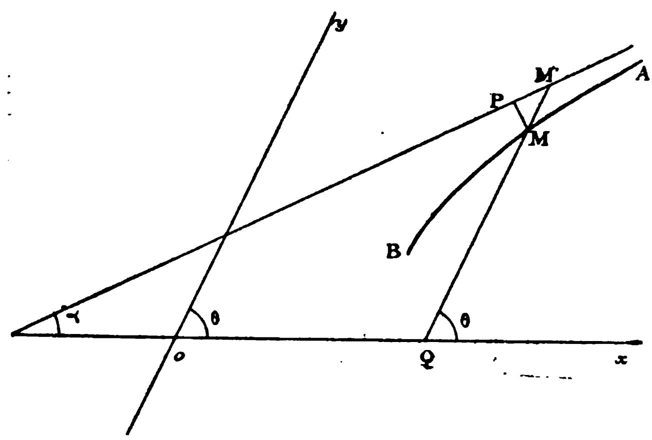


Fig. 64.

Dans cette relation $\theta - \alpha$ désigne un angle compris entre 0 et π, puisque l'asymptote n'est pas parallèle à Oy ; $\sin(\theta - \alpha)$ est donc un facteur différent de zéro et puisque $\lim MP = 0$, pour $x = \infty$, on a aussi $\lim MM' = 0$, pour $x = \infty$.

Ceci posé, la relation (1) étant écrite sous la forme :

$$\frac{y}{x} + \frac{MM'}{x} = c + \frac{d}{x},$$

on a d'abord,

$$c = \lim \frac{y}{x}, \text{ (pour } x = \infty).$$

D'autre part, cette même relation (1), écrite ainsi :

$$d = y - cx + \mathrm{MM}',$$

donne, encore,

$$d = \lim (y - cx), \quad (\text{pour } x = \infty).$$

Ces deux remarques constituent le principe que nous voulions établir et qui est d'un usage constant dans la recherche des asymptotes. Nous l'appliquerons d'abord à la détermination des asymptotes parallèles dans les courbes algébriques ; nous montrerons ensuite son utilité dans les courbes dont les équations sont irrationnelles ou transcendantes.

148. Asymptotes parallèles. Soit (1) $F(x,y) = 0$, l'équation d'une courbe U ; posons, conformément à la notation précédente,

$$F(x,y) = \varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \varphi_{m-2}(x,y) + \ldots + \varphi_0.$$

L'équation (1) peut s'écrire :

$$\varphi_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\varphi_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots + \frac{1}{x^m}\varphi_0 = 0,$$

et, pour $x = \infty$, on a $\lim \frac{y}{x} = c$, c étant une racine de l'équation :

$$\varphi_m(1, c) = 0.$$

ce résultat a été déjà obtenu, (§ 143).

Posons maintenant :

$$\frac{y}{x} = c + \frac{\delta}{x};$$

x, y désignant les coordonnées d'un point M de U, on a :

$$\varphi_m\left(1, c + \frac{\delta}{x}\right) + \frac{1}{x}\varphi_{m-1}\left(1, c + \frac{\delta}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\varphi_{m-2}\left(1, c + \frac{\delta}{x}\right) + \ldots + \varphi_0 = 0.$$

ou,

$$\begin{array}{r|l|l}
\varphi_m(1,c) + \delta\varphi'_{m,c}(1,c) & \dfrac{1}{x} + \dfrac{\delta^2}{1.2}\varphi''_{m,c}(1,c) & \dfrac{1}{x^2} + \ldots = 0. \\
+\varphi_{m-1}(1,c) & +\dfrac{\delta}{1}\varphi'_{m-1,c}(1,c) & \\
 & +\varphi_{m-2}(1,c) &
\end{array}$$

Le nombre considéré c, étant une des racines de l'équation $\varphi_m(1-c)=0$, on peut diviser cette relation par $\frac{1}{x}$ et l'écrire :

$$(1)\quad \begin{array}{r|l}
\delta\varphi'_m + \dfrac{\delta^2}{1.2}\varphi''_m & \dfrac{1}{x} + \ldots = 0. \\
+\varphi_{m-1} + \dfrac{\delta}{1}\varphi'_{m-1} & \\
+\varphi_{m-2} &
\end{array}$$

Si l'on suppose que M s'éloigne à l'infini dans une direction qui n'est pas celle de Oy, $\frac{1}{x}$ décroît au-delà de toute limite. D'ailleurs, comme l'on a : $\delta = y - cx$, et $d = \lim (y - cx)$, on peut dire que la limite de δ est d, pour $x = \infty$.

Si l'on n'a pas, simultanément :

$$\varphi'_m(1,c) = 0, \quad \text{et} \quad \varphi_{m-1}(1,c) = 0,$$

on a, pour déterminer d, l'équation :

$$d\varphi'_m + \varphi_{m-1} = 0,$$

formule déjà trouvée (§ 143).

Mais supposons, ce qui est le cas nouveau que nous voulons envisager, que l'on ait, simultanément,

$$\varphi_m = 0, \quad \varphi'_m = 0, \quad \varphi_{m-1} = 0\,;$$

l'équation (1) devient divisible par $\frac{1}{x}$, et peut s'écrire :

$$(2)\quad \left.\begin{array}{ll} \frac{\delta^2}{1.2}\varphi''_m & +\frac{\delta^3}{1.2.3}\varphi'''_m \\ +\frac{\delta}{1}\varphi'_{m-1} & +\frac{\delta^2}{1.2}\varphi''_{m-1} \\ +\varphi_{m-2} & +\frac{\delta}{1}\varphi'_{m-2} \\ & +\varphi_{m-3} \end{array}\right| \frac{1}{x}+\ldots+0$$

et, si l'on n'a pas, simultanément,

$$\varphi''_m = 0, \quad \varphi'_{m-1} = 0, \quad \varphi^{m-2} = 0;$$

on voit que la limite de δ est donnée par l'équation du second degré :

$$\frac{d^2}{1.2}\varphi''_m(1,c)+\frac{d}{1}\varphi'_{m-1}(1,c)+\varphi_{m-2}(1,c)=0.$$

Dans le cas contraire, l'équation (2) est divisible par $\frac{1}{x}$ et le nombre d est l'une ou l'autre des racines de l'équation du troisième degré :

$$\frac{d^3}{1.2.3}\varphi''_m(1,c)+\frac{d^2}{1.2}\varphi''_{m-1}(1,c)+\frac{d}{1}\varphi'_{m-2}(1,c)+\varphi_{m-3}(1,c)=0;$$

et, ainsi de suite.

149. Disposition relative de la branche de courbe et de l'asymptote. Lorsqu'une droite Δ est asymptote à une courbe F, on doit, pour préciser le tracé de F, chercher quelle est la situation relative de la courbe et de l'asymptote. Cette disposition dépend du nombre et de la position des points communs à Δ et à F, elle dépend aussi du nombre et de la position des bras de la courbe qui sont asymptotes à Δ.

Il est quelquefois facile de déterminer les points de rencontre de Δ et de F; dans les cubiques, il y a un seul point commun à la courbe et à l'asymptote; dans les quartiques il

y en a deux, tout au plus; par conséquent jusqu'aux courbes du cinquième degré, exclusivement, on peut déterminer la rencontre de la courbe et de son asymptote par des équations du premier ou du second degré.

Cherchons maintenant à déterminer la position du bras de la courbe relativement à l'asymptote; nous supposerons que la courbe est algébrique et nous examinerons seulement le cas où la direction asymptotique considérée est une direction simple; la courbe F, qui est du degré m, rencontre Δ, en $(m - 2)$ points, tout au plus; si nous imaginons un mobile parcourant Δ et s'éloignant à l'infini, après avoir traversé le dernier point commun à F et à Δ, ce mobile a constamment la courbe à sa droite, ou à sa gauche, et nous voulons indiquer comment on peut déterminer celle de ces deux positions qui doit être donnée à F et à Δ.

Nous conserverons les notations employées plus haut; nous désignerons par x, y les coordonnées d'un point M pris sur la courbe F, coordonnées qui vérifient l'équation :

$$\varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \varphi_{m-2}(x,y) + \ldots + \varphi_0 = 0.$$

Nous poserons :

$$(1) \quad y = cx + \delta,$$

c étant le coefficient angulaire de la direction asymptotique considérée; enfin nous représenterons par Y l'ordonnée de Δ, qui correspond à l'abcisse x; Y se calcule par la formule :

$$(2) \quad Y = cx + d.$$

La méthode générale pour déterminer la position respective d'une courbe donnée et de son asymptote consiste à étudier le signe de la fonction ε :

$$(3) \quad \varepsilon = y - Y,$$

pour de très grandes valeurs de x. La détermination de ce signe permet de fixer la position du bras de la courbe, et de

le tracer au-dessus, ou au-dessous de l'asymptote, suivant que ε est positif ou négatif.

On a :

$$\frac{y}{x} = c + \frac{\delta}{x}.$$

Un calcul fait plus haut (§ 148), donne, après avoir remarqué que $\varphi_m(1, c) = 0$,

$$(4) \quad \left.\begin{array}{ll} \delta\varphi'_m & + \dfrac{\delta^2}{1.2}\varphi''_m \\ + \varphi_{m-1} & + \dfrac{\delta}{1}\varphi'_{m-1} \\ & + \varphi_{m-2} \end{array}\right| \frac{1}{x} + \ldots = 0.$$

On sait aussi que d est donné par la formule :

$$d\varphi'_m + \varphi_{m-1} = 0,$$

quand on suppose, comme nous l'avons fait, $\varphi'_m \neq 0$.

L'égalité (4) peut s'écrire, d'après cette remarque,

$$(\delta - d)\,\varphi'_m + \frac{1}{x}\left\{ V + \frac{1}{x} U \right\} = 0,$$

en posant :

$$V = \frac{\delta^2}{1.2}\varphi''_m + \frac{\delta}{1}\varphi'_{m-1} + \varphi_{m-2}.$$

D'ailleurs les égalités (1), (2) et (3), donnent :

$$\varepsilon = \delta - d,$$

On a donc enfin :

$$\varepsilon\varphi'_m + \frac{1}{x}\left\{ V + \frac{1}{x} U \right\} = 0.$$

Quand x prend des valeurs croissantes au delà de toute limite, V a pour limite le nombre v :

$$v = \frac{d^2}{1 \cdot 2}\varphi''_m + \frac{d}{1}\varphi'_{m-1} + \varphi_{m-2}.$$

En supposant $v \neq 0$ le signe de ε est bien déterminé, c'est celui de la quantité : $-\dfrac{v}{x\varphi'_m}$.

Ainsi, dans le cas général, on pourra fixer la position relative de la courbe F, et de son asymptote Δ, en cherchant le signe du rapport :

$$\frac{\dfrac{d^2}{1 \cdot 2}\varphi''_m + \dfrac{d}{1}\varphi'_{m-1} + \varphi_{m-2}}{\varphi'_m}.$$

En dehors de ce cas général, le problème qui vient de nous occuper offre le plus souvent quelques difficultés que l'on peut ordinairement surmonter par une discussion du signe de la fonction ε, discussion dont la marche varie d'ailleurs avec les exemples particuliers que l'on peut rencontrer.

EXERCICES

1. *Vérifier que dans le cas où l'on suppose* $AA' - B'^2 = 0$, *l'asymptote de la conique est rejetée à l'infini.*

2. *Reconnaître que l'asymptote du folium de Descartes, courbe qui correspond à l'équation :*

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

a pour équation :

$$x + y + a = 0.$$

3. *Construire les asymptotes de la cubique qui a pour équation :*

$$y(x+y)^2+x=0.$$

On trouve

$$y=0, \quad x+y=1, \quad x+y=-1.$$

4. *L'asymptote réelle de la courbe qui correspond à l'équation :*

$$x^3+y^3-x^2-y^2=0,$$

a pour équation :

$$3(x+y)+2=0.$$

QUINZIÈME LEÇON

LES ASYMPTOTES (suite)

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

150. Théorème I. *Le nombre des asymptotes d'une courbe algébrique du degré m, est en général égal à m; il n'est jamais supérieur à m.*

Comptons d'abord les asymptotes parallèles à y; si la plus haute puissance de y est y^p, le coefficient de y^p est une fonction entière tout au plus du degré $m-p$, qui donne $(m-p)$ asymptotes, réelles, imaginaires ou coïncidentes, (§ 134).

D'autre part la fonction $\varphi_m(x, y)$ ne peut renfermer y qu'à la puissance p, tout au plus, puisque nous supposons que y^p est la plus haute puissance de y, dans l'équation proposée. Quand on remplace x par 1, y par c, dans cette fonction, pour déterminer les directions asymptotiques quelconques, on trouve donc une équation du degré p, seulement. Si la direction considérée est simple, il y a une asymptote correspondant à cette direction, et il n'y en a qu'une; si la direction est *double*; il peut y avoir et il y a, en général, *deux* asymptotes correspondant à cette direction; si elle est *triple*, il y en a, généralement, *trois*, et il n'y en a que trois; et ainsi de suite. Dans tous les cas, le nombre des asymptotes quelconques est égal, ou inférieur, à p.

En rapprochant les deux conclusions qui précèdent, on voit, finalement, que le nombre total des asymptotes est tout au plus égal à $(m-p)+p$, c'est-à-dire, tout au plus égal à m.

151. Théorème II. *Une parallèle à une direction asymptotique d'une courbe du degré m, ne rencontre cette courbe qu'en $(m-1)$ points, à distance finie.*

Soit α, β la direction asymptotique; l'équation de la courbe peut s'écrire, avec les notations que nous avons adoptées,

$$(1)\quad (\beta x - \alpha y)\,V + z\,\varphi_{m-1} + \ldots + z^m\varphi_0 = 0,$$

V désignant un polynôme entier et homogène en x et y du degré $(m-1)$. Cherchons l'intersection de cette courbe (1) avec la droite qui a pour équation :

$$(2)\quad \beta x - \alpha y - \lambda z = 0,$$

λ étant un paramètre arbitraire. Une combinaison évidente des équations (2) et (1) permet de remplacer celle-ci par la suivante, qui est du degré $(m-1)$ seulement, en x et y,

$$z\,(\lambda V + \varphi_{m-1} + \ldots + z^{m-1}\varphi_0) = 0.$$

Un des points cherchés appartient à la droite de l'infini $z=0$; et il y a, tout au plus, $(m-1)$ points à distance finie.

152. Théorème III. *Une asymptote de direction simple, dans une courbe du degré m, la rencontre, tout au plus, en $(m-2)$ points à distance finie; plus généralement, si l'asymptote considérée correspond à une direction asymptotique de multiplicité h, elle ne peut avoir que $(m-h-1)$ points communs avec la courbe, à distance finie.*

Les solutions communes aux équations :

$$y = cx + d,$$
$$\varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \ldots + \varphi_0 = 0;$$

peuvent se déterminer, par un calcul déjà présenté (§ 148), moyen de l'équation :

$$\varphi_m(1,c) + d\varphi'_{m,c}(1,c) \left| \frac{1}{x} + \frac{d^2}{1.2}\varphi''_{m,c}(1,c) \right| \frac{1}{x^2} + \ldots = 0.$$
$$+ \varphi_{m-1}(1,c) \quad + \frac{d}{1}\varphi'_{m-1,c}(1,c)$$
$$+ \varphi_{m-2}(1,c)$$

Si la direction asymptotique est simple, cette équation est divisible par $\frac{1}{x^2}$ et, en général, ne l'est pas par une puissance de $\frac{1}{x}$, supérieure à 2; c'est le cas ordinaire, deux points d'intersection sont rejetés à l'infini.

Si l'asymptote considérée correspond à une direction asymptotique de multiplicité h, il y a h asymptotes, réelles, imaginaires ou coïncidentes, parallèles à cette direction et l'équation précédente (§ 148), est divisible par $\left(\frac{1}{x}\right)^{h+1}$. En effet, tous les coefficients des termes en $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, ... $\frac{1}{x^{h-1}}$, et le terme tout connu $\varphi_m(1,c)$, sont nuls, par hypothèse; de plus, l'ordonnée à l'origine de l'asymptote se détermine par l'équation :

$$\frac{d^h}{h!}\varphi^{(h)}_{m,c}(1,c) + \ldots + \varphi_{m-h}(1,c) = 0,$$

dont le premier membre est précisément le coefficient de $\left(\frac{1}{x}\right)^h$. Il y a donc bien $(h+1)$ valeurs de $\frac{1}{x}$ nulles ; $h+1$ points sont rejetés à l'infini.

153. Théorème IV. *Une parallèle à une asymptote* Δ, *correspondant à une direction asymptotique de multiplicité* h, *rencontre la courbe en* $(m-h)$ *points, tout au plus, à distance finie.*

Dans le calcul précédent remplaçons d par λ, ce qui revient à chercher l'intersection de la courbe avec une droite *quel-*

conque, parallèle à l'asymptote Δ. Dans l'équation (1) tous les termes disparaissent jusqu'au terme en $\frac{1}{x^h}$ exclusivement; il y a donc h racines nulles en $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire h points rejetés à l'infini.

154. Exprimer qu'une droite est asymptote d'une courbe algébrique. — Théorème V. *Pour qu'une droite, non parallèle à l'axe des y soit asymptote d'une courbe algébrique, il suffit qu'elle satisfasse aux deux conditions suivantes :*

1° *Son coefficient angulaire doit être une racine simple de l'équation* $\varphi_m(1, c) = 0$.

2° *Elle doit rencontrer la courbe, supposée du degré m, en* $(m-2)$ *points, tout au plus, à distance finie.*

En effet, soit : $y = ax + b$ l'équation de la droite proposée; en cherchant son intersection avec la courbe et en exprimant que deux des points sont rejetés à l'infini, on a :

$$(1) \quad \varphi_m(1, a) = 0,$$

$$(2) \quad b\,\varphi'_{m,a}(1, a) + \varphi_{m-1}(1, a) = 0.$$

D'ailleurs, a est une racine simple de l'équation (1); par conséquent $\varphi'_{m,a}$ n'est pas nul et si l'on cherche l'asymptote qui correspond à la direction asymptotique a, la quantité que, dans cette théorie, nous avons désignée par d, sera donnée par l'équation

$$(3) \quad d\varphi'_{m,a}(1, a) + \varphi_{m-1}(1, a) = 0.$$

En comparant (2) et (3), on voit que $d = b$. L'asymptote est donc la droite donnée.

Remarque. En appliquant la propriété précédente, il faut bien remarquer que l'hypothèse que *la droite a deux points communs avec la courbe, rejetés à l'infini* est une condition **nécessaire,** mais non une condition **suffisante,** et l'on doit s'assurer, d'abord, que *la direction de la droite est une direction asymptotique simple.*

155. Théorème VI. *Lorsque l'équation d'une courbe se présente sous la forme :*

$$(1) \quad P_1 P_2 \ldots P_m + f_{m-2}(x,y) = 0$$

$f_{m-2}(x,y)$ désignant une fonction entière du degré $(m-2)$, tout au plus ; $P_1, P_2, \ldots P_m$, représentant des fonctions linéaires d'x et d'y :

1° *Les droites qui ont pour équation, respectivement,*

$$(2) \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \ldots P_m = 0$$

sont les m asymptotes de la courbe, quand elles sont deux à deux concourantes ;

2° *Si parmi ces droites il y en a quelqu'une qui ne soit parallèle à aucune des autres, elle est une asymptote de la courbe.*

3° **Réciproquement**, *si une courbe admet pour asymptotes les m droites (2), supposées deux à deux concourantes, son équation peut toujours être mise sous la forme (1).*

1° Si nous cherchons d'abord l'intersection de la droite $P_1 = 0$, avec la courbe (1), cette intersection est déterminée par la résolution des deux équations :

$$P_1 = 0, \quad f_{m-2}(x,y) = 0 ;$$

il y a donc deux points rejetés à l'infini. D'ailleurs, en posant :

$$P_h = y - c_h x - d_h,$$

on voit que l'on a :

$$\varphi_m(1, c) = (c - c_1) \ldots (c - c_m) ;$$

les droites P n'étant pas deux à deux parallèles, $c_1, \ldots c_m$ sont des racines simples de l'équation $\varphi_m(1, c) = 0$. Le théorème établi au paragraphe précédent prouve donc que la droite qui a pour équation $P_1 = 0$, est une asymptote de la courbe; et les m asymptotes sont, dans ce cas, les droites (2).

2° Si une droite $(P_1 = 0)$ a un coefficient angulaire c_1, différant

des autres coefficients $c_2, c_3, \dots c_m$, le même raisonnement prouve que cette droite est une des asymptotes.

3° Enfin, si l'on suppose que les droites, non parallèles à l'axe des y, et deux à deux concourantes, qui correspondent aux équations :

$$P_1 = 0, \dots P_m = 0;$$

soient les m asymptotes d'une courbe, du degré m, ayant pour équation : $U = 0$, on peut écrire celle-ci sous la forme :

$$P_1 P_2 \dots P_m + f_{m-2}(x, y) = 0,$$

f_{m-2} désignant une fonction entière d'x et d'y, du degré $m - 2$.

En effet, puisque les directions asymptotiques sont celles des droites qui ont, respectivement, pour équation :

$$y - c_1 x = 0, \quad y - c_2 x = 0, \dots \quad y - c_m x = 0;$$

l'équation proposée possède un terme en y^m, et, après avoir divisé celle-ci par le coefficient de ce terme, on a :

$$(1) \quad \varphi_m(x, y) \equiv (y - c_1 x) \dots (y - c_m x).$$

D'autre part, on peut écrire :

$$(2) \quad U \equiv P_1 P_2 \dots P_m + U - P_1 P_2 \dots P_m.$$

Posons, conformément à la notation ordinaire :

$$U - P_1 P_2 \dots P_m \equiv \psi_m(x, y) + \psi_{m-1}(x, y) + \psi_{m-2}(x, y) + \dots + \psi_0.$$

L'identité (2) donne,

$$(3) \quad \varphi_m(x, y) \equiv (y - c_1 x) \dots (y - c_m x) + \psi_m(x, y).$$

En comparant les identités (1) et (3) on voit que :

$$\psi_m(x, y) \equiv 0.$$

On a donc, déjà,

$$(2') \quad U \equiv P_1 P_2 \dots P_m + \psi_{m-1}(x, y) + \psi_{m-2}(x, y) + \dots + \psi_0;$$

et nous allons reconnaître que ψ_{m-1} est aussi identiquement nul.

Posons :

$$\psi_{m-1}(x, y) = A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} y + \dots + A_m y^{m-1}$$

et cherchons l'intersertion de la courbe avec la droite qui a pour équation $y = c_1 x + d_1$; il y a deux points rejetés à l'infini, et, dans (2') le terme en x^{m-1} doit disparaître, quand on remplace y par $c_1 x + d_1$.

L'équation :

$$A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2}(c_1 x + d_1) + \dots + A_m (c_1 x + d_1)^{m-1} = 0,$$

devant se réduire au degré $(m - 2)$, tout au plus, on a :

$$A_1 + A_2 c_1 + \dots + A_m c_1^{m-1} = 0.$$

Mais alors on peut dire que l'équation :

$$A_1 + A_2 z + \dots + A_m z^{m-1} = 0,$$

qui est du degré $(m - 1)$, admet *m racines différentes* : $c_1, c_2, \dots c_m$. Elle est donc identiquement nulle et l'on a :

$$A_1 = 0, A_2 = 0, \dots A_m = 0;$$

Ainsi ψ_{m-1} est identiquement nul et l'identité (2') peut s'écrire:

$$(2'') \quad U \equiv P_1 P_2 \dots P_m + \psi_{m-2}(x, y) + \dots + \psi_0.$$

La propriété énoncée est donc démontrée.

156. Théorème VII. *Lorsque l'équation d'une courbe* F, *peut se mettre sous la forme* :

$$UV - W = 0,$$

U, V, W *étant des fonctions entières d'x et d'y, le degré de l'une des fonctions* U, *ou* V, *étant supérieur à celui de* W, *les asymptotes de* F, *qui correspondent à des directions asymptotiques*

simples, s'obtiennent en cherchant les asymptotes des deux courbes φ *et* ψ *qui ont pour équation, respectivement,* $U = 0$ *et* $V = 0$.

Soit h, h', h'', les degrés respectifs des fonctions U, V et W, et m celui de F. Nous ferons d'abord remarquer que l'on a $h + h' = m$: nous avons aussi, d'après les hypothèses que nous avons faites,

$$h \geqslant h'' + 1,$$
$$h' \geqslant 1;$$

par suite,

$$h + h' \geqslant h'' + 2,$$

ou, enfin,

$$h'' \leqslant m - 2.$$

Ceci posé, soit $y = ax + b$ l'équation d'une asymptote Δ, de φ: a est évidemment le coefficient angulaire d'une direction asymptotique de F, puisque $(y - ax)$ est un des diviseurs de la fonction que nous avons désignée, dans cette théorie des asymptotes, par $\varphi_m(x, y)$. Nous supposons d'ailleurs que a est une racine simple de l'équation $\varphi_m(1, c) = 0$, ce qui exige, il importe de l'observer, non seulement que a soit une direction asymptotique simple dans φ, mais aussi qu'elle ne fasse pas partie des directions asymptotiques de ψ.

Dans ces conditions, si l'on cherche l'intersection de F et de Δ, U devient, après la substitution de y, une fonction entière de x, du degré $h - 2$, tout au plus; le produit UV donne donc une fonction d'x du degré $h + h' - 2 = m - 2$; et comme h'' est lui-même inférieur ou tout au plus égal à $m - 2$, deux points communs à Δ et à F sont rejetés à l'infini; si l'on ajoute que a est une direction asymptotique simple de F, on voit, finalement, que Δ est une asymptote de F.

157. Théorème VIII. *Lorsque l'équation d'une courbe* F, *peut se mettre sous la forme* $U - V = 0$, U *étant du degré* m, *et* V *du degré* $m - 2$, *tout au plus, toute asymptote* Δ, *de la*

courbe qui a pour équation $U = 0$, *et qui correspond à une direction asymptotique simple, est une asymptote de* F.

Cette propriété est la conséquence immédiate de cette remarque : que Δ a, avec F, deux points communs à l'infini; sa direction étant, d'ailleurs, une direction asymptotique simple.

158. Courbes irrationnelles et transcendantes. La méthode la plus générale que l'on puisse indiquer pour déterminer les asymptotes dans les courbes qui correspondent à des équations irrationnelles, ou transcendantes, est la suivante.

On cherche d'abord la limite de $\frac{y}{x}$, pour $x = \infty$; supposons que l'on trouve un nombre c: alors c est le coefficient angulaire d'une direction asymptotique. Après avoir déterminé cette direction, on cherche la limite de $(y - cx)$, pour $x = \infty$; et si l'on trouve que cette limite est un nombre d, la droite qui a pour équation :

$$y - cx - d = 0,$$

est, en général, une asymptote de la courbe.

Premier exemple. Soit une courbe F, ayant pour équation :

$$y = ax + b \pm \sqrt{\frac{U}{V}},$$

U et V étant deux fonctions entières de x, et le degré de U étant supérieur de deux unités à celui de V. Divisons U par V, et posons :

$$\frac{U}{V} = x^2 + 2px + q + \frac{R}{V},$$

R étant une fonction entière de x, d'un degré moindre que celui de V.

Si l'on considère le bras de courbe, bien défini, qui correspond à l'équation :

$$y = ax + b + \sqrt{x^2 + 2px + q + \frac{R}{V}},$$

lorsqu'on donne à x de très grandes valeurs positives, et si l'on applique la méthode indiquée tout à l'heure, on voit que :

$$Y = ax + b + x + p$$

est l'équation d'une droite asymptote au bras de courbe considéré.

Il est facile de le vérifier en remarquant que :

$$Y - y = x + p - \sqrt{x^2 + 2px + q + \frac{R}{V}}.$$

expression qu'on peut encore écrire, par une transformation évidente,

$$Y - y = \frac{p^2 - q - \frac{R}{V}}{x + p + \sqrt{x^2 + 2px + q + \frac{R}{V}}}.$$

Quand on donne à x de très grandes valeurs positives, on trouve bien : Lim $(Y - y) = 0$.

Second exemple. *On propose de trouver les asymptotes de la courbe qui correspond à l'équation transcendante :*

$$y = x + \frac{\sin x}{x^2}.$$

Il y a une asymptote non parallèle à Oy, c'est la première bissectrice, droite dont l'équation est :

$$y = x;$$

elle se détermine immédiatement par la méthode indiquée.

Il y a une seconde asymptote qui est l'axe Oy ; cette droite se trouve, en remarquant que l'équation proposée peut s'écrire :

$$y = x + \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x}.$$

Pour $x = 0$, $\frac{\sin x}{x}$ a pour valeur l'unité ; et la fraction $\frac{\sin x}{x^2}$ tend vers l'infini.

159. Asymptotes curvilignes. Lorsque deux courbes f et F sont telles que la différence des ordonnées y et Y, qui correspondent à une même abcisse x, tende vers zéro, quand x croit au delà de toute limite, on dit que ces deux courbes sont asymptotes l'une à l'autre.

L'axe des y ayant une direction arbitraire, on voit que deux courbes sont mutuellement asymptotes lorsque la corde interceptée entre deux bras de ces courbes, tend vers zéro, quand la corde s'éloigne indéfiniment.

Le théorème que nous allons établir permet de trouver une asymptote curviligne dans un assez grand nombre de cas.

160. Théorème IX. *Lorsque l'équation d'une courbe f, peut se mettre sous la forme :*

$$(1) \quad y^p = U + \frac{V}{W}, \quad (p \text{ nombre impair}),$$

U, V, W *étant des fonctions entières de x et le degré de* V *étant moindre que celui de* W, *la courbe* F *qui correspond à l'équation*

$$(2) \quad Y^p = U,$$

et la courbe f sont mutuellement asymptotes.

Donnons à x une très grande valeur positive ; $\frac{V}{W}$ a pour limite zéro, et le signe de $U + \frac{V}{W}$ est le même que celui du premier terme de U, polynôme que nous supposons ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x. Dans tous les cas, à cette valeur de x correspond une valeur réelle et bien déterminée pour y et Y. Quand x varie et croît au delà de toute limite, on a, dans F un bras de courbe, dans f un autre bras, et nous allons reconnaitre qu'ils sont asymptotes, l'un à l'autre.

Les équations (1) et (2) donnent, en effet,

$$y^p - Y^p = \frac{V}{W},$$

ou,

$$(3)\quad (y - Y)(y^{p-1} + y^{p-2}Y + \ldots + Y^{p-1}) = \frac{V}{W}.$$

Pour de très grandes valeurs de x, y et Y ont le même signe, celui du premier terme de U, comme nous l'avons remarqué tout à l'heure. Le polynôme :

$$y^{p-1} + y^{p-2}Y + \ldots + Y^{p-1},$$

est donc composé de termes qui ont tous le même signe, et chacun de ces termes croît au delà de toute limite, si U est une fonction de x, ce que nous supposons. Le second membre de l'égalité (3) tendant vers zéro, le facteur $y - Y$, du second membre, tend lui-même, à fortiori, vers zéro.

Cette conclusion subsiste, quand U est une constante ; mais alors l'asymptote, fournie par cette méthode, est une asymptote rectiligne parallèle à l'axe des x.

Nous ferons encore remarquer que dans l'hypothèse où $p = 1$, et où U est une fonction du premier degré en x, on obtient ainsi une asymptote rectiligne de la courbe.

Par exemple, si l'équation proposée est :

$$(1)\quad y = \frac{ax^2 + bx + c}{x - \alpha},$$

En effectuant la division de $ax^2 + bx + c$, par $x + \alpha$; on a :

$$y = ax + a\alpha + b + \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{x - \alpha}.$$

Les équations des asymptotes de la conique (1) sont donc :

$$x = \alpha \quad , \quad y = ax + a\alpha + b.$$

161. Remarque. Le raisonnement que nous avons fait dans le paragraphe précédent pour démontrer que les courbes

f et F étaient mutuellement asymptotes, ne suppose pas que $\frac{V}{W}$ soit le quotient de deux fonctions entières de x, mais seulement que l'on ait $\text{Lim}\,\frac{V}{W} = 0$, pour $x = \infty$. Cette remarque permet de trouver des asymptotes curvilignes, dans un grand nombre de courbes irrationnelles, et nous aurons occasion de l'appliquer, dans la suite, quand nous nous occuperons de la construction des courbes.

EXERCICES

1. *Démontrer que l'équation* (§ 155):

$$(1) \quad P_1 P_2 \ldots P_m + f_{m-2}(x, y) = 0$$

est l'équation générale des courbes du degré m, ayant pour asymptotes les droites P, *droites qui sont, deux à deux, concourantes.*

On remarque que nombre des termes d'une équation du degré m est $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$; elle renferme donc $\frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1 = \frac{m^2+3m}{2}$ paramètres variables. Le nombre des conditions données est $2m$, chaque asymptote représentant une condition double. L'équation (1), pour être l'équation générale, doit renfermer: $\frac{m^2+3m}{2} - 2m = \frac{m(m-1)}{2}$. La fonction $f_{m-2}(x,y)$ renferme précisément ce nombre de paramètres arbitraires et indépendants.

2. *Déterminer l'asymptote rectiligne de la courbe qui a pour équation*:

$$y = ax + b + \alpha \sqrt[2p+1]{x^{2p+1} + Ax^{2p} + \ldots}$$

On cherche d'abord la limite de $\frac{y}{x}$ et on trouve, $c = a + \alpha$; on détermine, ensuite, la limite de : $y - ax - \alpha x$. On remarque alors que la difficulté porte sur la détermination de l'expression :

$$u = \sqrt[2p+1]{x^{2p+1} + Ax^{2p} + \ldots} \quad - x, \quad \text{pour } x = \infty.$$

On pose :

$$x = \frac{1}{X}$$

et l'on doit chercher alors la valeur de l'expression :

$$u = \frac{\sqrt[2p+1]{1 + AX + \ldots} - 1}{X}, \text{pour } X = 0.$$

Si l'on ne veut pas appliquer la règle de l'Hôpital, on remarquera que l'on a :

$$\sqrt[2p+1]{1 + AX + \ldots} = 1 + \frac{A}{2p+1} X + \varepsilon X$$

ε tendant vers zéro en même temps que X (1). La valeur cherchée est donc $\frac{A}{2p+1}$, et l'équation de l'asymptote est :

$$y = (a + \alpha) x + b + \frac{A}{2p+1}.$$

3. *Construire la courbe dont l'équation est :*

$$y = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}$$

en s'aidant des paraboles asymptotes.

On trouve que les deux paraboles qui correspondent aux équations :

$$\pm Y = x^2 - \frac{3}{2},$$

sont des asymptotes curvilignes de la courbe proposée.

4. *Construire la courbe qui a pour équation :*

$$y = \frac{x^3 + 1}{x}.$$

Cette courbe a une asymptote rectiligne, l'axe des y, et une parabole asymptote ($Y = x^2$).

5. *On donne l'équation :*

$$y = x\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - \sqrt{4 + \frac{1}{x}},$$

trouver l'asymptote de la courbe qui correspond à cette équation, les signes des radicaux étant explicites.

1. Voyez, pour ce point, une note (Leç. 38), (§ 374).

SEIZIÈME LEÇON

LES POINTS SINGULIERS.

162. Définitions. Un point M placé sur une courbe F, du degré m, est un *point simple* de cette courbe lorsque les transversales tournant autour de M rencontrent, généralement, F en $(m-1)$ autres points, réels ou imaginaires. Dans le cas contraire, le point M est un *point multiple*; et nous dirons qu'il est de multiplicité h, lorsque il y a h points communs à l'une quelconque de ces transversales et à la courbe. Un point d'une courbe peut être *singulier* sans être un point *multiple* et la singularité d'un point peut être *absolue* ou *relative*. Ainsi les points pour lesquels l'ordonnée passe par une valeur maxima et minima, offrent une singularité, mais une singularité relative, parce qu'elle cesse d'exister quand on change les axes de coordonnées, droites qui ne sont pas, nécessairement, des directions remarquables de la courbe. Au contraire : les points de rencontre d'une courbe avec ses axes de symétrie, les *sommets* de la courbe; ou, encore, les *points d'inflexion* que nous allons définir dans cette leçon, sont des points remarquables, dans le sens absolu de ce mot, quoiqu'ils ne soient pas, en général, des points multiples.

163. Théorème. *Lorsque* (α, β, γ) *représente une solution de l'équation homogène :*

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0,$$

le point M, *qui a pour coordonnées* α, β, γ, *est un point simple de la courbe* F *qui correspond à cette équation, si l'on n'a pas, à la fois,*

$$f'_\alpha = 0, \quad f'_\beta = 0, \quad f'_\gamma = 0;$$

au contraire, c'est un point multiple, si ces relations se trouvent vérifiées.

Menons par le point M une transversale Δ et prenons sur elle un point P, dont les coordonnées soient (x_1, y_1, z_1); soient aussi (x, y, z) les coordonnées d'un point commun à F et à Δ; nous avons alors :

$$\frac{x}{\alpha + \lambda x_1} = \frac{y}{\beta + \lambda y_1} = \frac{z}{\gamma + \lambda z_1},$$

avec la condition :

$$f(\alpha + \lambda x_1, \beta + \lambda y_1, \gamma + \lambda z_1) = 0.$$

En développant le premier membre par la formule de Taylor, et en remarquant que $f(\alpha, \beta, \gamma)$ est nul, on a :

$$\lambda(x_1 f'_\alpha + y_1 f'_\beta + z_1 f'_\gamma) + \lambda^2 \left(\frac{x_1^2}{1.2} f''_{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{1.2} f''_{\beta^2} + \frac{z_1^2}{1.2} f''_{\gamma^2} \right.$$
$$\left. + y_1 z_1 f''_{\beta\gamma} + z_1 x_1 f''_{\gamma\alpha} + x_1 y_1 f''_{\alpha\beta} \right) + \dots = 0.$$

C'est une équation du degré m, en λ, qui a une racine nulle et qui n'en admet pas d'autre, si l'on n'a pas :

$$f'_\alpha = 0, f'_\beta = 0, f'_\gamma = 0;$$

du moins pour des valeurs arbitraires des paramètres x_1 et y_1. Le point M, en résumé, est donc un point multiple, ou un point simple, suivant que ces conditions sont, ou ne sont pas, vérifiées.

164. Théorème. *Lorsqu'on transporte, parallèlement à eux-mêmes, les axes des coordonnées, la nouvelle origine étant un point simple d'une courbe* F, 1° *les termes du premier degré ne disparaissent pas tous les deux*; 2° *la tangente à* F, *en ce point, s'obtient en égalant à zéro l'ensemble des termes du premier degré.*

Remarquons, d'abord, que la constante disparait quand on transporte les axes en un point O d'une courbe F; mais non

les termes du premier degré : la raison en est que, si ces termes disparaissaient, toute droite Δ passant par O rencontrerait F en deux points confondus avec O ; ce qui n'est pas possible, O étant un point simple. L'équation de F, dans le nouveau système, sera donc :

$$f(x, y, z) = \varphi_m + z\varphi_{m-1} + \cdot \cdot + \varphi_1 z^{m-1} = 0,$$

en posant :

$$\varphi_1 = ax + by ;$$

les coefficients a, b, n'étant pas nuls à la fois.

En prenant les dérivées partielles par rapport à x, y et z, puis en faisant : $x = 0$, et $y = 0$, on voit que l'équation de la tangente se réduit à :

$$aX + bY = 0,$$

ou à,

$$\varphi_1 = 0.$$

164 *bis*. **Points d'inflexion.** Supposons : 1° que les dérivées premières ne soient pas toutes nulles ; pour $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$; 2° que toutes les dérivées secondes f''_{α^2}, f''_{β^2}, $f''_{\alpha\beta}$, soient nulles, mais non toutes les dérivées troisièmes ; le point (α, β, γ) est dit un *point d'inflexion* de la courbe, et la tangente en ce point est appelée *tangente inflexionnelle.*

Il résulte de l'hypothèse que nous venons de faire qu'en cherchant l'intersection de la tangente inflexionnelle avec la courbe donnée, l'équation en λ est seulement du degré $m - 3$; il y a donc trois points communs à la courbe et à la tangente inflexionnelle. Cette propriété caractérise le point d'inflexion, quand le point considéré est un point simple de la courbe.

165. Théorème. *La tangente inflexionnelle traverse la courbe.*

Lorsqu'un point supposé mobile décrit une courbe et part d'une position initiale M, il peut prendre deux directions différentes ; et, suivant que l'on considère l'un ou l'autre de ces

deux mouvements, on obtient deux bras qui, comme nous le verrons tout à l'heure, en étudiant la concavité et la convexité, sont placés, ordinairement, du même côté par rapport à la tangente. Mais, dans le cas du point d'inflexion, nous allons montrer que ces deux bras sont situés de côtés différents.

Prenons, pour axe des x, la tangente inflexionnelle, l'axe des y étant d'ailleurs une droite quelconque, passant par le point d'inflexion.

D'après ce que nous avons vu tout à l'heure, l'équation de la courbe considérée F, dans ce système d'axes, est :

$$(1) \quad \varphi_m + \varphi_{m-1} + \dots + \varphi_3 + \varphi_2 + \varphi_1 = 0;$$

$\varphi_1 = 0$ est l'équation de la tangente en O à F; on a donc $\varphi_1 = by$, avec la condition $b \neq 0$. On peut supposer, par conséquent, que l'équation (1) a été divisée par b et comme droite $y = 0$ doit rencontrer F en trois points coincidant avec l'origine, on voit aussi : 1° que le terme en x^2 ne doit pas exister dans φ_2, 2° que le terme en x^3 doit figurer dans φ_3.

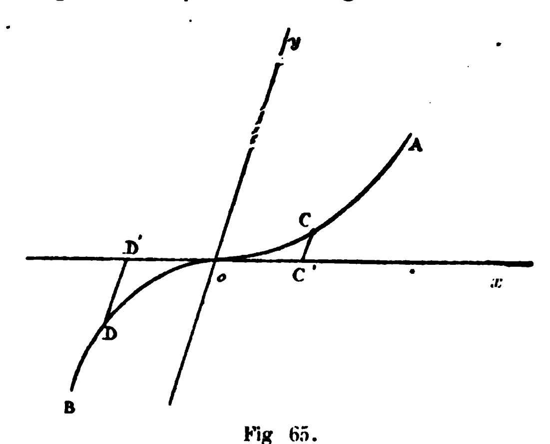


Fig 65.

D'après ces diverses remarques, on peut donc écrire l'équation (1) sous la forme :

$$\varphi_m + \varphi_{m-1} + \dots + (Ax^3 + \dots) + (mxy + ny^2) + y = 0, (A \neq 0).$$

Cette égalité donne la suivante :

$$(2)\quad y(1+\varepsilon) = x^3(A+\varepsilon')$$

ε et ε' étant des fonctions entières d'x et d'y, qui s'annulent, quand on suppose : $x = 0$ et $y = 0$.

Coupons F par des parallèles voisines de l'axe des y, ($x = h$), et remarquons que, pour des valeurs positives ou négatives de h, il y a une rencontre réelle de F et de cette sécante, dans le voisinage de l'origine, parce que, pour $x = 0$, une seule valeur de y tend vers zéro. Cette valeur, d'après l'égalité (2) a le signe de Ax^3, elle change donc de signe, en même temps que x; les deux bras de la courbe, dans le voisinage du point d'inflexion, sont donc placés de part et d'autre de la tangente.

166. Concavité et convexité. Nous supposerons que l'ordonnée est une fonction explicite, continue, et bien déterminée de l'abcisse. Soit :

$$(1)\quad y = f(x).$$

l'équation de la courbe F que nous allons considérer. Prenons sur F un point M, que nous supposons être un point simple de cette courbe. L'équation (1) prouve que la tangente Δ, en ce point M, n'est pas parallèle à Oy et, dans ces conditions, nous nous proposons de déterminer de quel côté de la droite Δ sont placés les deux bras de courbe qui aboutissent au point M.

L'étude de la courbe, dans le voisinage de M, se fait par la discussion du signe de la différence des ordonnées de F et de Δ, ordonnées correspondant à la même abcisse; la valeur de celle-ci étant voisine de celle de l'abcisse x_1 du point M.

Posons :

$$OP = x_1, \quad MP = y_1\,;$$

l'équation de Δ est :

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

Donnons à x la valeur $x_1 + h$, l'ordonnée correspondante de Δ est fournie par l'égalité :

$$SP'' = y_1 + hf'(x_1) = f(x_1) + hf'(x_1).$$

D'autre part, on a, par une formule connue, (Alg. § 297)

$$M''P'' = f(x_1 + h) = f(x_1) + hf'(x_1) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x_1 + \theta h).$$

Ces deux dernières égalités donnent :

$$SM'' = \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x_1 + \theta h).$$

Supposons d'abord que nous ayons $f''(x_1) \neq 0$; alors, pour des valeurs de h suffisamment petites, et variables, $f''(x_1 + \theta h)$ a le même signe que $f''(x_1)$. Si nous avons $f''(x_1) > 0$, les

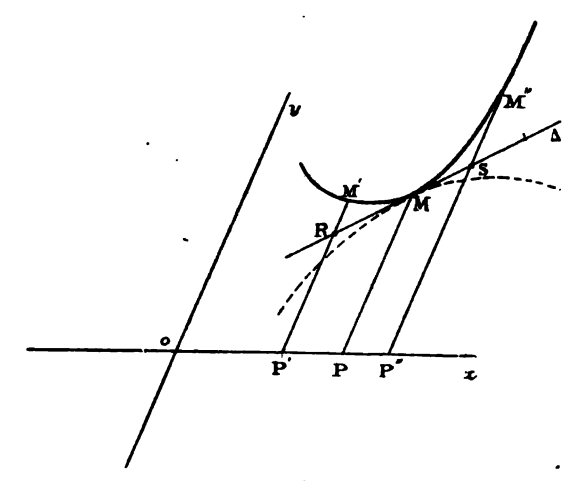


Fig. 66.

deux bras de courbe sont disposés comme l'indique le trait plein de la figure. Le trait ponctué correspond, au contraire, à l'hypothèse $f''(x_1) < 0$. Dans le premier cas on dit que la courbe tourne sa concavité vers la direction positive de l'axe des y ; dans la seconde hypothèse elle tourne sa convexité vers cette direction.

Il nous reste à examiner le cas particulier où l'on a $f(x_1)=0$ et nous allons reconnaître, qu'en général, la courbe présente alors, au point considéré M, une inflexion.

En effet, dans le cas général, $f''(x_1)$ s'annule en changeant de signe ; en passant du négatif au positif, ou inversement. Le raisonnement que nous avons fait tout à l'heure prouve, qu'avant le passage par la valeur x_1, l'ordonnée de la courbe est plus petite que celle de la tangente et, qu'au contraire, après le passage, l'ordonnée de la courbe est plus grande que celle de la tangente ; ou inversement. Dans tous lés cas les deux bras de courbe doivent être placés de part et d'autre de la tangente et la courbe présente, comme l'indique la figure, une inflexion.

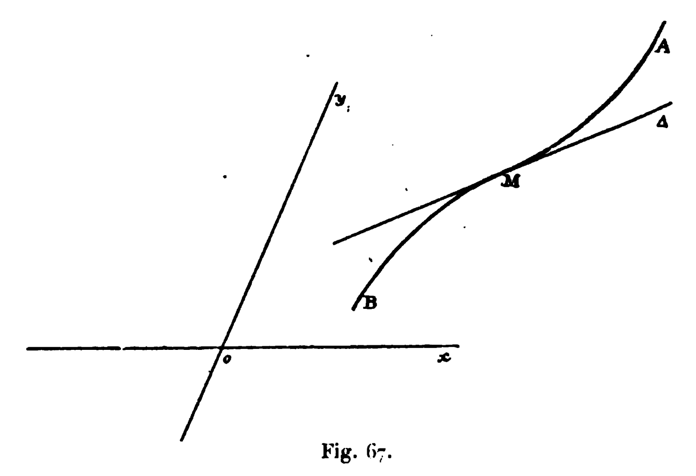


Fig. 67.

Ainsi les points d'inflexion s'obtiennent en cherchant les solutions communes aux deux équations $y=f(x)$, $f''(x)=0$. On doit observer que la réciproque n'est pas exacte, et que, à toute solution de ces deux équations, ne correspond pas, nécessairement, un point d'inflexion.

Dans le cas où $f(x)$ représente une fonction entière, on vérifie facilement les résultats précédents en transportant l'origine au point M et en remarquant que la tangente s'obtient en égalant à zéro l'ensemble des termes du premier degré.

167. Hessien des points d'inflexion. Les points d'inflexion, dans le cas des fonctions implicites, se déterminent au moyen d'un déterminant symétrique du troisième ordre que nous allons calculer.

Soit :

$$f(x, y) = 0,$$

l'équation de la courbe proposée. On a d'abord :

$$f'_x(x, y) + y' f'_y(x, y) = 0,$$

puis,

$$f''_{x^2} + y' f''_{xy} + y'(f''_{xy} + y' f''_{y^2}) + y'' f'_y = 0.$$

Aux points d'inflexion, on a $y'' = 0$. Par conséquent, l'égalité précédente peut être simplifiée et devient :

$$f''_{x^2} + 2y' f''_{xy} + y'^2 f''_{y^2} = 0,$$

et comme l'on a :

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y},$$

les points d'inflexion ont des coordonnées qui vérifient les deux équations :

$$f(x, y) = 0,$$
$$f''_{x^2} f'^2_y - 2 f'_x f'_y f''_{xy} + f''_{y^2} f'^2_x = 0.$$

C'est cette dernière relation que nous allons transformer. Remarquons, d'abord, que cette relation peut s'écrire :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f'_y \\ f'_x & f'_y & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

déterminant qu'on obtient en égalant à zéro le discriminant de la forme quadratique :

$$X^2 f''_{x^2} + Y^2 f''_{y^2} + 2XY f''_{xy} + 2XZ f'_x + 2YZ f'_y.$$

Prenons maintenant, pour plus de symétrie dans le calcul, l'équation de la courbe sous la forme homogène :

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

de telle sorte que l'on ait :

$$f(x, y) = \varphi(x, y, z), \quad \text{(pour } z = 1\text{)}$$

Le théorème d'Euler donne :

$$(2) \quad \begin{aligned} (m-1)\varphi'_x &= x\varphi''_{x^2} + y\varphi''_{xy} + z\varphi''_{xz}, \\ (m-1)\varphi'_y &= x\varphi''_{xy} + y\varphi''_{y^2} + z\varphi''_{zy}, \\ (m-1)\varphi'_z &= x\varphi''_{zx} + y\varphi''_{zy} + z\varphi''_{z^2}. \end{aligned}$$

L'égalité (1) peut s'écrire, en supposant $z = 1$,

$$\begin{vmatrix} \varphi''_{x^2} & \varphi''_{xy} & \varphi'_x \\ \varphi''_{xy} & \varphi''_{y^2} & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions la première colonne par $-x$, la deuxième par $-y$ et la troisième par $(m-1)$, puis ajoutons, à cette dernière, la somme des deux autres; nous obtenons, en tenant compte des identités (1),

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \varphi''_{x^2} & \varphi''_{xy} & \varphi''_{xz} \\ \varphi''_{xy} & \varphi''_{y^2} & \varphi''_{yz} \\ \varphi'_x & \varphi'_y & -x\varphi'_x - y\varphi'_y \end{vmatrix} = 0.$$

Le point (x, y, z) étant sur la courbe, on a :

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

D'ailleurs l'identité d'Euler :

$$m\varphi = x\varphi'_x + y\varphi'_y + z\varphi'_z,$$

prouve, qu'au point considéré, on a :

$$-x\varphi'_x - y\varphi'_y = \varphi'_z.$$

Le déterminant (3) devient, d'après cette remarque,

$$\begin{vmatrix} \varphi''_{x^2} & \varphi''_{xy} & \varphi''_{xz} \\ \varphi''_{xy} & \varphi''_{y^2} & \varphi''_{yz} \\ \varphi''_{xz} & \varphi''_{y^2} & \varphi''_{z^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions, enfin, la première ligne par $-x$, la deuxième par $-y$ et ajoutons-les à la troisième, après avoir multiplié celle-ci par $(m-1)$, nous avons :

$$\begin{vmatrix} \varphi''_{x^2} & \varphi''_{xy} & \varphi''_{xz} \\ \varphi''_{xy} & \varphi''_{y^2} & \varphi''_{yz} \\ \varphi''_{xz} & \varphi''_{yz} & \varphi''_{z^2} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est le hessien des points d'inflexion. Ce déterminant a surtout un intérêt théorique ; il est du degré $3(m-2)$ et prouve, entre autres choses, que *le nombre des points d'inflexion d'une courbe du degré m, est tout au plus égal à* $3m(m-2)$.

168. Remarque. Dans le cas où le point M, considéré sur la courbe, est un point simple offrant cette particularité relative, que la tangente en ce point est une droite parallèle à l'axe des y, droite correspondant à l'équation $x=h$; la position des deux bras de courbe en M se trouve ordinairement sans difficulté, en cherchant les valeurs réelles de y qui correspondent aux valeurs $h \pm \varepsilon$, données à x.

Par exemple, dans la lemniscate qui correspond à l'équation :

$$y = \pm\sqrt{x} \pm \sqrt{2-x},$$

on trouve au point $x_0 = 2$, $y_0 = \sqrt{2}$ une tangente parallèle à l'axe des y. On voit immédiatement que les deux bras de la courbe sont placés à la gauche de cette tangente. On vérifie aussi, facilement, que l'équation $y'' = 0$ a pour racine $x = 1$,

et il y a une inflexion, au point $x=1$, $y=0$, sur le bras de courbe qui correspond à l'équation :

$$y=\sqrt{x}-\sqrt{2-x},$$

les signes étant explicites.

169. Définitions. Lorsque deux bras réels de courbe se coupent mutuellement en un point M, on dit que ce point est un *nœud* de la courbe (fig. A).

Lorsqu'un point est multiple, conformément à la définition donnée précédemment (§ 162), s'il n'y a pas de points de la courbe dans son voisinage on dit que le point est *isolé*.

Un *point de rebroussement* est celui d'où partent, dans la même direction, deux bras de la courbe ; on distingue deux espèces de rebroussements, suivant que les deux bras de courbe sont situés du même côté par rapport à la tangente, ou de côtés différents. Celui-ci est le *rebroussement de première espèce* (fig. B), l'autre constitue un *rebroussement de seconde espèce* (fig. C).

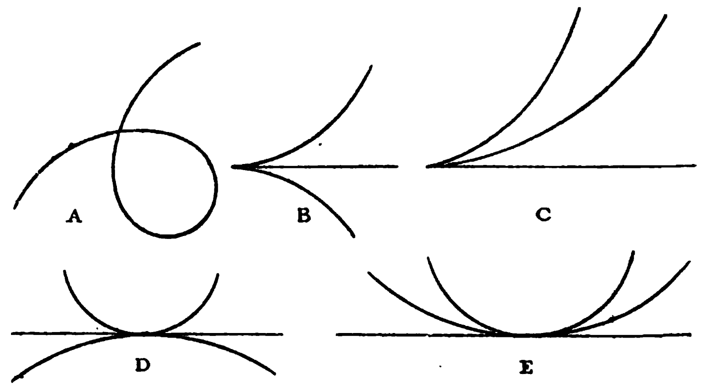


Fig. 68.

Enfin, on rencontre dans les points doubles, les seuls que nous voulions discuter ici, deux autres espèces de points, lesquels sont formés par deux branches ayant la même tangente ; si les deux branches sont de côtés différents, on dit qu'il y a *osculation* (fig. D) ; il y a *embrassement* lorsque les deux branches sont du même côté (fig. E).

Lorsque l'une des branches passant au point double présente une inflexion, on a *un point double, à simple inflexion;* si les deux branches se croisent en présentant, l'une et l'autre, une inflexion au point commun, on est alors en présence *d'un point double, à double inflexion.*

On appelle *point d'arrêt,* celui d'où part un seul bras de courbe; le *point anguleux* est celui d'où partent deux bras de courbe, dans des directions différentes. Nous démontrerons d'abord qu'il n'y a, dans les courbes algébriques, ni point d'arrêt, ni point anguleux.

170. Théorème. *Il n'y a pas de point d'arrêt dans les courbes algébriques.*

Soit une courbe AB présentant, au point A, un point d'arrêt. Prenons pour axe des x une droite passant par A et soit $f(x,y) = 0$ l'équation de la courbe A proposée.

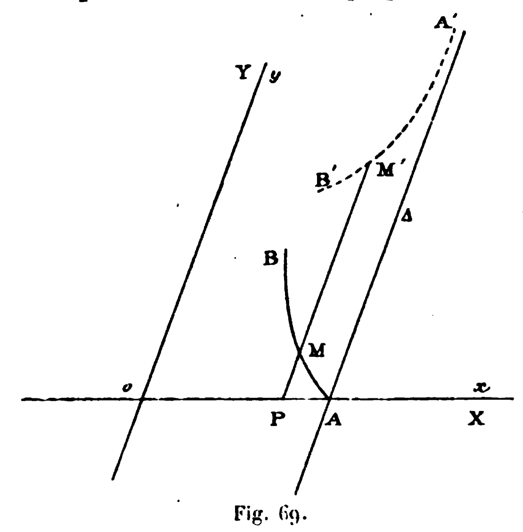


Fig. 69.

Transformons cette courbe par les formules :

$$x = X \ , \ yY = 1.$$

A un bras AB, correspond un bras de courbe A'B' asymptote à la droite Δ, qui a pour équation : $x = OA$. S'il n'y avait qu'un

bras de courbe partant de A, il n'y aurait qu'un bras de la courbe transformée, asymptote à Δ. Mais si $f(x,y)$ est une forme algébrique, l'équation $f\left(X, \frac{1}{Y}\right) = 0$ est algébrique et la courbe qu'elle représente ne peut avoir un bras unique, asymptote à Δ.

Plus généralement, il ne peut y avoir un nombre impair de bras, partant du même point.

171. Théorème. *Il n'y a pas de point anguleux dans les courbes algébriques.*

Soit O un point d'où partent deux bras de courbe, dans des directions différentes; prenons pour axes les tangentes ox, oy aux deux bras, et transformons la courbe proposée, par les formules :

$$x = X \;, \; \lambda y + y' = \mu Y.$$

y' désignant la dérivée de y par rapport à x. Ces formules de transformation, font correspondre, à une courbe algébrique, une autre courbe algébrique.

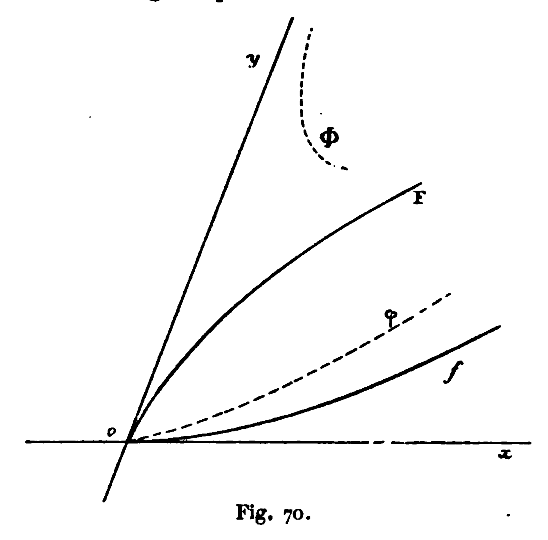


Fig. 70.

A la courbe of correspond un bras de courbe $o\varphi$ passant

par l'origine, y' ayant pour limite zéro quand le point se déplace sur of, pour aboutir au point o. Au contraire y' croît au delà de toute limite pour le mobile qui arrive à l'origine en parcourant oF, et le bras oF se transforme en un bras Φ asymptote à oy.

On déduit de là que le nombre des bras de la courbe transformée qui partent de l'origine serait impair, et nous avons reconnu qu'il n'en pouvait être ainsi dans les courbes algébriques.

L'impossibilité du point anguleux apparaît encore en observant que la courbe transformée aurait un nombre impair de bras asymptotes à l'axe des y.

Il y a pourtant objection à la conclusion précédente si l'on suppose deux, ou un nombre pair, de points anguleux disposés sur oy, et ayant chacun un de leurs bras tangent à cet axe. Pour lever cette objection, si improbable que paraisse sa réalisation, il suffit d'effectuer, sur la courbe donnée, rapportée aux tangentes d'un des points anguleux, une première transformation, par les formules :

$$x = Y, \quad yY = 1.$$

Les bras du point anguleux considéré deviennent deux bras asymptotes à l'axe des y; les points anguleux restent des points anguleux [1]; ils sont alors en nombre impair et l'on revient au cas considéré plus haut.

172. Détermination des points doubles. — Théorème. *Lorsqu'en transportant les axes des coordonnées, en un point* M *d'une courbe* U, *on voit disparaître les termes du premier degré, mais non tous ceux du second degré,* M *est un point double. Soit* $ax^2 + 2bxy + cy^2$, *l'ensemble des termes du second degré ; si l'on a :* $b^2 - ac > 0$, *il y a deux branches de courbe passant réellement par le point* M, *et les tangentes s'obtiennent en égalant à zéro l'ensemble des termes du second degré.*

1. Voyez, sur ce point, l'exercice 1 de cette leçon.

Soit :

$$(1)\quad U_{x,y} = \varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \dots + \varphi_2(x,y) = 0,$$

l'équation de la courbe, en posant :

$$(2)\quad \varphi_2(x.y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Nons représenterons les coordonnées d'un point A par $x = h$, $y = \theta h$, de telle sorte que θ représente le coefficient angulaire OA, et nous poserons :

$$(3)\quad \varphi_2(x,y) = c(y - tx)(y - t'x);$$

t et t' sont des nombres réels, puisque nous avons supposé $b^2 - ac > 0$; soient Δ et Δ' les deux droites qui correspondent aux équations $y - tz = 0$. Comme nous disposons du signe d'un coefficient de l'équation (1), nous supposerons $c > 0$; si l'on avait $c = 0$, on effectuerait un changement d'axes.

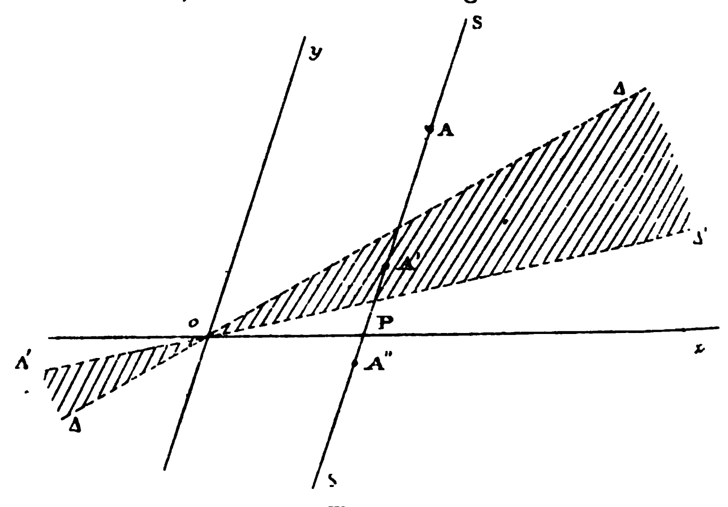


Fig. 71.

Pour tous les points situés dans la région ombrée de la figure on remarquera que $\varphi_2(x,y)$ est négatif; au contraire $\varphi_2(x,y)$ prend une valeur positive pour les points pris dans l'autre région.

Ceci posé, soient h et θh les coordonnées d'un point A que nous allons supposer mobile sur la droite S. Substituons ces coordonnées dans l'équation (1), nous aurons :

$$U_{h,\theta h} = h^2 \{ h_{m-2} \varphi_m(1, \theta) + \dots + \varphi_2(1, \theta) \}.$$

Le multiplicateur de h^2 a le signe du terme $\varphi_2(1, \theta)$ pour des valeurs de h, positives ou négatives, mais choisies suffisamment petites. D'ailleurs l'identité (3), donne :

$$\varphi_2(1, \theta) = c(\theta - t)(\theta - t')$$

Pour le point A, θ est supérieur à t et à t' et l'on a

$$\varphi_2(1, \theta) > 0;$$

au point A′, au contraire φ_1 prend une valeur négative; enfin φ_2 est de nouveau positif quand on considère le point A″.

On a donc, d'après cela,

$$U_{h.\theta h} > 0, \quad U_{h,\theta' h} < 0 \quad \text{et} \quad U_{h,\theta'' h} > 0.$$

Si l'on considère la fonction entière de y, $U_{h,y}$, on voit donc qu'elle s'annule pour une valeur de y comprise entre PA et PA′, et aussi pour une valeur comprise entre PA′ et PA″. La droite S rencontre donc deux bras de courbe partant du point O et situés à droite de l'axe des y. La même conclusion subsiste quand on considère des parallèles à l'axe des y situées à gauche de oy, et dans le voisinage de cet axe.

Enfin si l'on observe que les droites qui ont pour équation, respectivement, $y = tx$, $y = t'x$ rencontrent la courbe en trois points coïncidant avec l'origine, on reconnaît que ces droites sont tangentes aux deux branches de courbe dont nous avons démontré l'existence.

Le même raisonnement établit que si $b^2 - ac$ est négatif, il n'y pas de bras réels de courbe dans le voisinage de l'origine parce que la fonction $\varphi_2(1, \theta)$ ne peut pas changer de signe ; c'est le cas du point isolé.

Le cas où $b^2 - ac = 0$ est plus délicat ; les branches qui passent par le point sont tantôt réelles, tantôt imaginaires,

et la disposition des bras de la courbe peut, suivant les exemples, correspondre aux points de rebroussement de première ou de seconde espèce, ou à ces points que nous avons nommés points d'osculation ou d'embrassement.

Une discussion particulière déterminera, dans chaque exemple à laquelle de ces dispositions on a affaire; mais nous ne pouvons entrer ici, plus profondément, dans la théorie générale, que comporte la détermination de la variété d'un point singulier donné.

EXERCICES

1. *Démontrer que si l'on effectue la tranformation au moyen des formules :*

$$x = X, \quad y = \frac{1}{Y};$$

les tangentes aux points correspondants m *et* M, *coupent l'axe des* x *en des points également éloignés du pied de la droite* mM. *En déduire que, par cette transformation, un point anguleux reste un pointde même genre, à l'exception de celui qui est placé à l'origine.*

2. *Démontrer que, dans une courbe du degré* m, *le nombre des points doubles est tout au plus égal à* $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

On suppose que le premier membre de l'équation de la courbe n'est pas décomposable en facteurs rationnels, par rapport aux lettres x, y. On imagine qu'il y ait $\frac{(m-1)(m-2)}{5} + 1$ points doubles et l'on fait passer, ce qui est possible, une courbe du degré $(m-1)$, par ces points doubles et par $2m-3$ autres points pris sur la courbe.

On trouve alors qu'il y aurait $m(m-1)+1$, points communs à deux courbes de degrés m et $(m-1)$. Ce qui est impossible si la courbe imaginée ne fait pas partie de la courbe proposée ou si son équation ne représente pas une décomposition rationnelle telle que l'un des facteurs obtenus appartienne au premier membre de l'équation proposée.

On appelle *genre* d'une courbe la différence entre le maximum des points doubles d'une courbe et le nombre effectif de ses points doubles.

Une vraie cubique ne peut avoir qu'un point double, elle est du genre *un*, ou du genre *zéro*.

Une vraie quartique ne peut avoir trois points doubles ; elle peut être du genre 3, 2, 1 ou *zéro*.

3. *Démontrer que la présence d'un point double abaisse la classe d'une courbe de 2 unités, et que* celle *d'un point de rebroussement l'abaisse de 3 unités ; en général, un point multiple d'ordre p, produit un abaissement de $p(p-1)$ unités, dans la classe.*

DIX-SEPTIÈME LEÇON

CENTRES — DIAMÈTRES — AXES

173. Définition du centre. On dit qu'un point O est centre d'une courbe U, lorsque les points communs à U et à une transversale quelconque Δ, passant par O, sont, deux à deux, symétriques par rapport à ce point.

174 Principe. *Lorsque l'origine des coordonnées est centre d'une courbe, l'équation de celle-ci reste identique à elle-même, quand on change x en $-x$, y en $-y$; et réciproquement.*

En effet, soit A un point de la courbe qui a pour centre l'origine O; et soient x et y ses coordonnées. Considérons le point A′ symétrique A, par rapport à O, ses coordonnées sont : $-x$ et $-y$, et puisque o est un centre, A′ est un point de la courbe. L'équation de celle-ci ne peut donc admettre la solution xy, sans être vérifiée par les valeurs $-x$, $-y$: ainsi, les deux équations : $f(x,y)=0$, $f(-x,-y)=0$, ont les mêmes solutions. Les deux fonctions $f(x,y)$, $f(-x,-y)$ sont donc identiques à une constante près. Cette constante est d'ailleurs égale à $+1$, ou à -1 ; car si le changement de x en $-x$, et de y en $-y$, donnait

$$f(x,y)=\mathrm{K}f(-x,-y),$$

en changeant x en $-x$; y en $-y$; on aurait :

$$f(-x,-y)=\mathrm{K}f(x,y),$$

et, en comparant ces deux identités, on a bien $\mathrm{K}^2=1$.

La réciproque est d'ailleurs évidente et ce principe est souvent invoqué pour vérifier que l'origine est le centre d'une courbe correspondant à une équation donnée.

Soit, par exemple,

$$y^2 = \frac{e^x}{1 + e^{2x}},$$

si l'on change x en $-x$, y en $-y$, l'équation n'est pas modifiée : l'origine est donc un centre de la courbe qui correspond à cette équation.

175. Théorème. *Lorsque l'origine des coordonnées est le centre d'une courbe ayant pour équation $f(x,y) = 0$; si $f(x,y)$ désigne une forme entière d'x et d'y, elle ne renferme que des termes de la même parité.*

Soit h, et θh les coordonnées d'un point A de la courbe proposée U ; et soit

$$\varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \ldots + \varphi_1(x,y) + \varphi_0 = 0,$$

l'équation de celle-ci. On a donc :

$$(1)\quad h^m\varphi_m(1,\theta) + h^{m-1}\varphi_{m-1}(1,\theta) + \ldots + h\varphi_1(1,\theta) + \varphi_0 = 0.$$

Les coordonnées du point A', symétrique de A par rapport à l'origine, sont : $-h$ et $-\theta h$; ce point A' étant sur U, par hypothèse, l'égalité (1) sera encore vérifiée en changeant h en $-h$, et l'on a :

$$(2)\quad (-1)^m h^m\varphi_m(1,\theta) + (-1)^{m-1}h^{m-1}\varphi_{m-1}(1,\theta) + \ldots$$
$$- h\varphi_1(1,\theta) + \varphi_0 = 0.$$

Supposons que m soit pair, pour fixer les idées, et retranchons les égalités (1) et (2), nous obtenons, après avoir supprimé le facteur $2h$,

$$(3)\quad h^{m-2}\varphi_{m-1}(1,\theta) + h^{m-4}\varphi_{m-3}(1,\theta) + \ldots + \varphi_1(1,\theta) = 0.$$

Si l'on suppose que θ consrve une valeur fixe, cette relation qui est du degré $(m-2)$ est vérifiée par m valeurs

de h, puisqu'il y a m points communs à la courbe et à la droite AA'. Elle est donc identiquement nulle et l'on peut poser :

$$(4)\quad \varphi_{m-1}(1,\theta)=0,\quad \varphi_{m-3}(1,\theta)=0,\ \ldots\ \varphi_1(1,\theta)=0.$$

On peut, il est vrai, objecter que l'origine peut être un point simple de la courbe; mais il y a encore $(m-1)$ valeurs de h, différentes de zéro et la conclusion précédente subsiste; si l'origine est un point double, on a $\varphi_1(x,y)\equiv 0$, l'égalité (3) devient divisible par h, et il reste une équation du degré $(m-3)$ admettant $(m-2)$ racines; et ainsi de suite. Les relations (4) sont donc toujours vérifiées.

Prenons l'une d'elles $\varphi_{m-1}(1,\theta)=0$, et remarquons qu'elle est vérifiée pour une infinité de valeurs de θ, puisque AA' est une droite quelconque passant par l'origine. Nous avons donc :

$$\varphi_{m-1}(1,\theta)\equiv 0,\ \ldots\ \varphi_1(1,\theta)\equiv 0;$$

et l'équation de la courbe se réduit à la forme suivante :

$$\varphi_m(x,y)+\varphi_{m-2}(x,y)+\ldots+\varphi_0=0,$$

elle ne renferme que des groupes homogènes de parité paire.

Le même raisonnement, appliqué à une équation du degré impair, conduit à la même conclusion, et l'on trouve, pour l'équation de la courbe :

$$\varphi_m+\varphi_{m-2}+\ldots+\varphi_1=0.$$

On voit, par ce résultat, que si un point est centre d'une courbe de degré impair, il est situé sur la courbe; et si, dans une courbe de degré pair, un point, centre de la courbe, est situé sur elle, c'est nécessairement un point de multiplicité paire.

Nous ferons encore remarquer que le théorème que nous venons d'établir peut se démontrer aussi en s'appuyant sur le principe exposé au paragraphe précédent et sur cette propriété connue, ou facile à vérifier, qu'une fonction de

plusieurs variables ne peut être identiquement nulle que si tous les coefficients sont nuls. Mais cette propriété étant fondamentale dans la théorie des centres des courbes algébriques, il nous a paru préférable de l'établir par une voie directe.

176. Théorème. *Les courbes algébriques d'un degré supérieur à 2, n'ont, généralement, pas de centre: dans tous les cas elles ne peuvent en avoir qu'un seul.*

Soit $F(x, y) = 0$, l'équation de la courbe proposée U ; supposons qu'elle ait un centre ω et transportons les axes, parallèlement à eux-mêmes, en ce point. En désignant par $x_0 y_0$ les coordonnées de ω, la nouvelle équation est :

$$F(x_0 + X, y_0 + Y) = 0,$$

ou,

$$(1) \quad F(x_0, y_0) + XF'_{x_0} + YF'_{y_0} + \frac{X^2}{1.2} F''_{x_0^2} + XYF''_{x_0 y_0}$$
$$+ Y^2 F''_{y_0^2} + \ldots = 0.$$

Dans les courbes du troisième ordre, le point (x_0, y_0) ne peut être centre de la courbe que si l'on a :

$$F(x_0, y_0) = 0, \; F''_{x_0^2} = 0, \; F''_{x_0 y_0} = 0, \; F''_{y_0^2} = 0.$$

Or, en général, quatre équations à deux inconnues ne sont pas susceptibles d'une solution commune. Il n'y a donc pas *en général*, de centre, dans les cubiques et, à fortiori, dans les courbes d'un ordre supérieur.

Je dis maintenant qu'il n'y en pas deux, à moins que la courbe ne soit formée par un système de droites parallèles. Des considérations de géométrie élémentaire, les plus simples, font voir immédiatement qu'il y aurait, en effet, une *infinité* de points de la courbe situés sur deux droites parallèles à la ligne qui joint les deux centres, et équidistantes de cette droite.

Le calcul qui précède constitue une méthode pour trouver

le centre d'une courbe algébrique et nous allons, notamment, l'appliquer à la recherche des centres dans les courbes du second degré.

177. Centre des coniques. Soit $F(x,y)=0$, l'équation d'une courbe du second degré, en posant,

$$F(x,y)=Ax^2+A'y^2+2B''xy+2By+2B'x+A''.$$

D'après l'équation (1), du paragraphe précédent, on obtient, au point (x_0,y_0), un centre de cette courbe, si l'on peut déterminer ces coordonnées au moyen des deux équations :

$$F'_{x_0}=0,\quad F'_{y_0}=0,$$

ou,

$$(C)\quad \begin{array}{l} Ax_0+B''y_0+B'=0,\\ B''x_0+A'y_0+B=0. \end{array}$$

L'équation de la conique considérée prend alors la forme nouvelle :

$$\frac{X^2}{1.2}F''_{x_0^2}+XYF''_{x_0y_0}+\frac{Y^2}{1.2}F''_{y_0^2}+F(x_0y_0)=0,$$

ou,

$$(\alpha)\quad AX^2+2B''XY+A'Y^2+K=0;$$

en posant :

$$(\beta)\quad K=F(x_0,y_0).$$

D'ailleurs, les équations (C) permettent de trouver, pour x_0 et y_0, des valeurs finies et bien déterminées, si l'on suppose :

$$\delta=\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}\neq 0.$$

On remarquera que les termes du second degré, dans (α), sont les mêmes que dans l'équation proposée. Il nous reste à calculer la nouvelle constante K.

Les égalités C et (β) multipliées respectivement par $x_0, y_0, 1$, donnent, par combinaison,

$$(\gamma) \quad B'x_0 + By_0 + A'' - K = 0.$$

Entre (C) et (γ) on peut éliminer x_0 et y_0, et l'on a :

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' - K \end{vmatrix} = 0.$$

La dernière colonne étant écrite sous la forme :

$$\begin{matrix} B' - 0 \\ B - 0 \\ A'' - K \end{matrix}$$

on a, par application d'une règle connue,

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} - K \begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix} = 0.$$

ou, par une notation déjà signalée (§ 104),

$$K = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Les coordonnées du centre s'obtiennent d'ailleurs en résolvant les équations (C); par conséquent, elles sont données par les formules :

$$\frac{x_0}{\begin{vmatrix} B'' & A' \\ B' & B \end{vmatrix}} = \frac{-y_0}{\begin{vmatrix} A & B'' \\ B' & B \end{vmatrix}} = \frac{z_0}{\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}}.$$

Nous résumerons les résultats que nous venons d'obtenir de la manière suivante :

1° *Lorsque, dans l'équation d'une conique, on a* $\delta \gtrless 0$ *; cette courbe admet un centre, à distance finie.*

2° *Ce centre est à l'intersection des deux droites obtenues en égalant à zéro les dérivées partielles, par rapport à x, et par rapport à y, du premier membre de l'équation de la conique.*

3° *Les coordonnées x_0, y_0, z_0 de ce centre, sont proportionnelles aux mineurs du second ordre du discriminant Δ, quand on développe celui-ci par rapport aux éléments de la troisième colonne, ou de la troisième ligne.*

4° *Lorsqu'on transporte les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au centre de la courbe :*

1. *Les termes du second degré ne changent pas,*
2. *Les termes du premier degré disparaissent,*
3. *Le nouveau terme tout connu est égal à* $\frac{\Delta}{\delta}$.

On peut remarquer que les courbes du second degré se séparent en deux groupes; suivant que δ est nul, ou différent de zéro. Nous introduirons ici le nom de *parabole* pour représenter les courbes du second degré, dans l'hypothèse $\delta = 0$. Dans le cas des paraboles, les équations $f'_x = 0 \quad f'_y = 0$ représentent deux droites parallèles, puisque l'on a :

$$-\frac{A''}{B} = -\frac{B''}{A'},$$

LES DIAMÈTRES ET LES COURBES DIAMÉTRALES

178. Définition des diamètres. Dans les courbes du second degré le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée est une droite qu'on appelle un *diamètre*. Dans les courbes du degré m, ce lieu est une courbe qui est, généralement, du degré $\frac{m(m-1)}{2}$; c'est la *courbe diamétrale* correspondant à la direction donnée. Nous allons établir l'exactitude des propositions que nous venons d'avan-

cer et nous chercherons d'abord, par une généralisation naturelle de l'idée qui préside aux définitions précédentes *le lieu des milieux des cordes qui, pour une courbe donnée, passent par un point fixe.*

179. Principe. *Étant donnée une droite Δ, déterminée par deux points* (x_0,y_0,z_0), (x_1,y_1,z_1); *un point* M, *de* Δ, *ayant des coordonnées* x, y, z *vérifiant les formules connues :*

$$\frac{x}{x_0+\lambda x_1}=\frac{y}{y_0+\lambda y_1}=\frac{z}{z_0+\lambda z_1};$$

Si l'on considère deux points M′, M″ *équidistants du point* (x_0,y_0,z_0); *les paramètres* λ′, λ″, *qui leur correspondent, satisfont à l'égalité :*

$$\frac{1}{\lambda'}+\frac{1}{\lambda''}+2=0.$$

Considérons, en effet, les quatre points en ligne droite M_0, M_1; M′, M″.

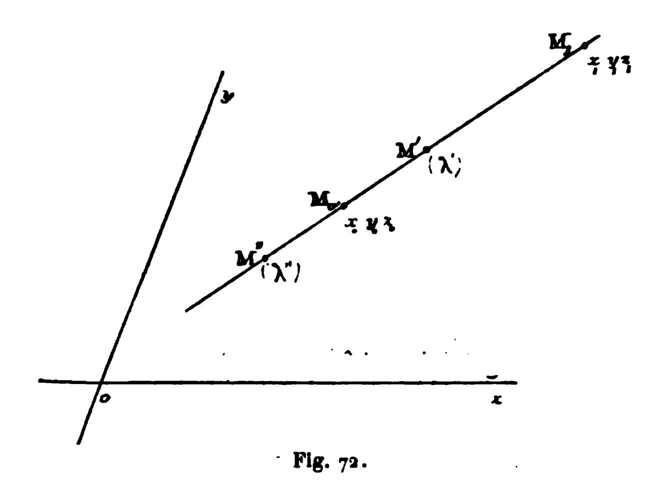


Fig. 72.

On a :

$$\lambda'=\frac{M'M_0}{M'M_1},\quad -\lambda''=\frac{M''M_0}{M''M_1};$$

et, de ces égalités, en tenant compte des relations :

$$M'M_0 = M''M_0, \quad M''M' = 2M''M_0,$$

on déduit bien :

$$\frac{1}{\lambda'} + \frac{1}{\lambda''} + 2 = 0.$$

180. Problème. *Étant donnée une courbe* U, *ayant pour équation* $f(x, y, z) = 0$, *trouver le lieu du point I, milieu des cordes qui passent par un point fixe* M (x_1, y_1, z_1).

Désignons par $x_0 y_0 z_0$ les coordonnées d'un des points I; l'intersection de U avec la droite MI est déterminée par la résolution de l'équation :

$$f(x_0 + \lambda x_1, y_0 + \lambda y_1, z_0 + \lambda z_1) = 0,$$

équation qui, développée par la formule de Taylor, peut s'écrire :

$$f(x_0, y_0, z_0) + \lambda \left(x_1 f'_{x_0} + y_1 f'_{y_0} + z_1 f'_{z_0}\right) + \ldots + \lambda^m f(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

En exprimant que l'équation aux inverses :

$$\frac{1}{\lambda^m} f(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{\lambda^{m-1}} \left(x_1 f'_{x_0} + y_1 f'_{y_0} + z_1 f'_{z_0}\right) + \ldots$$
$$+ f(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

à deux racines particulières dont la somme est égale à -2, on obtient une relation du degré $\frac{m(m-1)}{2}$ qui représente l'équation du lieu géométrique demandé, en supposant que x_0, y_0, z_0, désignent des coordonnées courantes.

181. Application aux coniques. Lorsqu'on suppose $m = 2$, dans l'équation (1) la somme des racines devant être égale à -2 (§ 179), on a, pour l'équation du lieu cherché,

$$2f(x_0, y_0, z_0) + x_1 f'_{x_0} + y_1 f'_{y_0} + z_1 f'_{z_0} = 0.$$

En appliquant l'identité d'Euler :

$$2f(x_0, y_0, z_0) = x_0 f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + z_0 f'_{z_0},$$

et, en rendant x_0, y_0, z_0 coordonnées courantes, on a, enfin,

$$(x - x_1) f'_x + (y - y_1) f'_y = 0.$$

Cette équation représente une courbe du second degré passant par le point donné (x_1, y_1) et par le centre de la conique, quand elle a un centre.

182. Diamètres des coniques. Dans le cas particulier où le point x_1, y_1 est situé à l'infini, dans une direction α, β, l'équation précédente devient (§ 83 *bis*),

$$\text{(D)} \quad \alpha f'_x + \beta f'_y = 0.$$

Cette équation est du premier degré. Ainsi : *le lieu des milieux des cordes d'une conique, qui restent parallèles à une direction fixe, est une droite.*

Lorsqué les équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ admettent une solution (x', y'), l'équation (D) est vérifiée par ces valeurs d'x et d'y. Ainsi : *dans les coniques qui ont un centre, tous les diamètres passent par le centre.*

Prenons maintenant le cas où δ est nul. Les droites qui ont pour équation, respectivement :

$$\text{(C)} \quad \begin{aligned} f'_x &= Ax + B''y + B', \\ f'_y &= B''x + A'y + B; \end{aligned}$$

sont parallèles et il est facile de reconnaître que tous les diamètres sont eux-mêmes parallèles à cette direction commune. En effet l'équation (D) pouvant s'écrire :

$$\alpha(Ax + B''y + B') + \beta(B''x + A'y + B) = 0,$$

son coefficient angulaire est égal à $-\dfrac{A\alpha + B''\beta}{B''\alpha + A'\beta}$.

D'autre part, δ étant nul, on a

$$\frac{A}{B''} = \frac{B''}{A'} = \frac{A\alpha}{B''\alpha} = \frac{B''\beta}{A'\beta} = \frac{A\alpha + B''\beta}{B''\alpha + A'\beta}.$$

Les coefficients angulaires des droites (C) et de la droite (D) sont donc égaux, quelle que soit la direction des cordes. Ainsi *dans la parabole tous les diamètres sont parallèles.*

On peut encore observer que cette direction uniforme des diamètres est *la direction asymptotique de la parabole.*

Remarquons d'abord que la condition $AA' - B''^2 = 0$, prouve que A et A' ne peuvent pas être nuls simultanément. Car, s'il en était ainsi, les trois coefficients A, A' et B'' seraient nuls et l'équation proposée ne représenterait pas une courbe du second degré. Supposons donc $A' \neq 0$. Nous avons :

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy = \frac{1}{A'}(AA'x^2 + A'^2y^2 + 2A'B''xy),$$

ou,

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy = \frac{1}{A'}(B''x + A'y)^2.$$

Ainsi, dans la parabole, le groupe homogène des termes en x et y forme un carré parfait, il y a une direction asymptotique double, dont le coefficient angulaire est égal à $-\frac{B''}{A'}$; c'est le coefficient angulaire de tous les diamètres.

183. Diamètres singuliers. Nous appellerons ainsi ceux qui correspondent aux directions asymptotiques de l'équation :

$$(1) \quad Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'' = 0.$$

Soit (α, β) une de ces directions; on a (§ 141)

$$(2) \quad A\alpha^2 + A'\beta^2 + 2B''\alpha\beta = 0.$$

Nous supposerons d'abord que l'on ait $AA' - B''^2 < 0$; dans ce cas, la relation (2) fait connaître, pour $\frac{\beta}{\alpha}$, deux valeurs

réelles et distinctes : les courbes qui correspondent à (1) ont alors deux directions asymptotiques réelles. Soient (α',β') les paramètres qui définissent l'une de ces directions, le diamètre singulier a donc pour équation :

$$\alpha' f'_x + \beta' f'_y = 0,$$

avec la condition :

$$A\alpha'^2 + A'\beta'^2 + 2B''\alpha'\beta' = 0.$$

Cherchons d'autre part l'asymptote qui correspond à la direction (α',β'). La formule connue (§ 142) appliquée à l'équation (1) donne :

$$x(A\alpha' + B''\beta') + y(B''\alpha' + A'\beta') + B\beta' + B'\alpha' = 0,$$

ou,

$$\alpha'(Ax + B''y + B') + \beta'(B''x + A'y + B) = 0,$$

ou, enfin,

$$\alpha' f'_x + \beta' f'_y = 0.$$

Ainsi *le diamètre singulier coïncide avec l'asymptote.*

On peut expliquer ce résultat de la manière suivante. Prenons une direction asymptotique et considérons une droite Δ parallèle à cette direction. Nous savons (§ 151) que Δ ne rencontre la conique qu'en un point à distance finie, l'autre point étant rejeté à l'infini. Le milieu de la corde est donc lui-même rejeté à l'infini, excepté dans le cas où Δ devient l'asymptote même. Dans cette hypothèse les deux points communs sont, l'un et l'autre, rejetés à l'infini, et la relation $\frac{1}{\lambda'} + \frac{1}{\lambda''} + 2 = 0$, est vérifiée par tous les points M_0 (fig. 71) de la droite M_0M_1, lorsque l'on suppose que les points M' et M'' sont à l'infini. Cela tient, comme l'on voit, à ce que chacun des rapports $\frac{1}{\lambda'}$, $\frac{1}{\lambda''}$ a pour limite -1. Au point de vue géométrique, on peut dire encore, que le milieu d'un segment qui devient infini est un point quelconque de ce segment.

Considérons maintenant le cas de la Parabole. Cette courbe possède une direction asymptotique unique dont les paramètres (α,β) vérifient la relation (§ 182) :

$$B''\alpha + A'\beta = 0.$$

Le diamètre singulier a donc pour équation :

$$B''(B''x + A'y + B) - A'(Ax + B''y + B') = 0.$$

Les termes en x et en y disparaissent et cette équation se réduit à la suivante :

$$BB'' - A'B' = 0.$$

Si $BB'' = A'B'$; on a vu (§ 85), et l'on vérifie sans difficulté, que l'équation proposée représente deux droites parallèles ; si, au contraire, BB'' est différent de $A'B'$, ce qui est le cas des paraboles, on voit que le *diamètre singulier*, ou l'asymptote qui correspond à la direction asymptotique unique de la courbe, *est rejeté à l'infini.*

184. Diamètres conjugués. — Directions conjuguées. On dit que deux diamètres Δ, Δ' sont conjugués, lorsque Δ partage en deux parties égales les cordes parallèles à Δ', et inversement.

Il existe une infinité de systèmes de diamètres conjugués. En effet, soit :

$$(1) \quad \alpha(Ax + B''y + B') + \beta(B''x + A'y + B) = 0,$$

l'équation du diamètre Δ, qui partage en deux parties égales les cordes U, dont le coefficient angulaire est $\frac{\beta}{\alpha}$.

Considérons maintenant un second diamètre Δ', correspondant à l'équation,

$$(2) \quad \alpha'(Ax + B''y + B') + \beta'(B''x + A'y + B) = 0.$$

Cette droite Δ' sera parallèle aux droites U, si l'on a :

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{A\alpha' + B''\beta'}{B''\alpha' + A'\beta'},$$

ou,

$$(3) \quad A\alpha\alpha' + B''(\alpha\beta' + \beta\alpha') + A'\beta\beta' = 0.$$

Cette relation reste identique à elle-même lorsqu'on permute les lettres α et α', d'une part; β et β', d'autre part; et cette remarque prouve que : si l'on cherche le diamètre qui partage en deux parties égales les cordes V, dont le coefficient angulaire est $\frac{\beta'}{\alpha'}$, ce diamètre est précisément la droite Δ. Concluons donc que les deux droites Δ, Δ' qui correspondent aux équations (1) et (2), sont deux diamètres conjugués, quand la relation (3) est vérifiée.

Deux cordes U et V dont les coefficients angulaires $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\alpha'}$ vérifient l'égalité (3) ont des directions qu'on nomme *directions conjuguées*. En d'autres termes, deux cordes ont des directions conjuguées quand elles sont parallèles à deux diamètres conjugués.

185. Axes. Lorsqu'une droite Δ prise dans le plan d'une courbe U, est telle que toutes les cordes δ, perpendiculaires à Δ sont partagées par cette droite et par U en deux parties égales, on dit que Δ est *un axe de* U et que les cordes δ sont parallèles à *une direction principale de cette courbe.*

La recherche des directions principales et celles des axes nous occupera, surtout, quand nous discuterons les propriétés des coniques; nous indiquerons seulement ici comment on peut trouver les axes d'une courbe donnée.

Soit, en coordonnées rectangulaires,

$$(x - x_0)\sin\varphi - (y - y_0)\cos\varphi = 0,$$

l'équation de l'axe d'une courbe dont l'équation est $f(x,y) = 0$. Transportons les axes de coordonnées, parallèlement à eux-mêmes, au point (x_0, y_0) en utilisant les formules :

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta.$$

L'équation de la courbe est alors :

$$f(x_0 + \xi, y_0 + \eta) = 0.$$

Effectuons maintenant une rotation des axes, l'amplitude de cette rotation étant égale à φ ; les formules de transformation sont :

$$\xi = X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \quad \eta = X\sin\varphi + Y\cos\varphi;$$

et l'équation de la courbe devient :

$$f(x_0 + X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \quad y_0 + X\sin\varphi + Y\cos\varphi) = 0.$$

Si Δ, qui est le nouvel axe des X, est un axe de la courbe, cette équation ne doit renfermer que des puissances paires de Y.

EXERCICES

1. *On considère une courbe* U *et la courbe diamétrale* V *lieu des milieux des cordes qui sont parallèles à une droite fixe* Δ. *On demande de démontrer les propriétés suivantes* :

1° V *passe par les points de contact des droites* Δ' *qui sont parallèles à* Δ *et tangentes à* U.

2° V *est tangente à ces droites* Δ', *en* $m-2$ *points, si* m *est le degré de* U.

3° *A une boucle de la courbe* U, *correspond dans* V *une boucle dont la surface est moitié moindre.*

4° *Si* U *possède un point double en* P, V *va passer par ce point et la tangente à* V *est la branche conjuguée de la direction* Δ, *par rapport aux tangentes à* U, *au point* P.

5° *Si* P *est un point de rebroussement,* V *passe par le point* P, *tangentiellement à* U, *et possède* $(m-2)$ *points de rebroussement sur la parallèle à* Δ *menée par* P.

2. *On considère une courbe* U *et un point fixe* P ; *par ce point on mène des transversales* Δ, *et l'on cherche le lieu* V *des milieux des cordes interceptées par* U, *sur* Δ.

Soit AB *l'un de ces segments,* I *son point milieu, et soit enfin* J, *le symétrique du point* P, *par rapport à* I. *Démontrer que la tangente en* I *à la courbe* V, *est parallèle à la droite qui, passant par* J, *est partagée par ce point, et par les tangentes à* U *aux points* A, B, *en deux parties égales.*

On appliquera l'idée des transversales réciproques à deux sécantes voisines Δ et Δ'.

3. *Soit* U *une courbe donnée,* AB *une corde mobile parallèle à une direction fixe, et soit* I *le milieu de* AB : *démontrer que la tangente en* I *à la courbe diamétrale* V, *s'obtient en joignant le point* I *au point de concours des tangentes à* U, *aux points* A *et* B.

4. *Trouver la courbe diamétrale des cordes de la strophoïde, qui sont parallèles à l'axe de cette courbe.*

L'équation de la strophoïde étant :

$$y = x\sqrt{\frac{x+a}{a-x}},$$

on trouve :

$$y^2 = -x\frac{(a+2x)^2}{a+x}.$$

Pour obtenir ce résultat, simplement, on peut employer une méthode particulière, mais très naturelle ; nous voulons parler du procédé qui consiste à couper par la droite ($y=\lambda$) et à remarquer que l'abcisse du point dont on cherche le lieu géométrique est une moyenne arithmétique entre les abcisses de deux des points d'intersection de la sécante et de la courbe.

On pourra vérifier sur la courbe trouvée quelques-unes des propriétés énoncées à l'exercice I.

5. *Trouver la courbe diamétrale des cordes qui sont parallèles à la direction dont le coefficient angulaire est m et qui appartiennent à la cubique dont l'équation est :*

$$y^2x = 1.$$

Le résultat est:

$$y(y+mx)^2 + \frac{m}{2} = 0.$$

On l'obtient, si l'on veut, par un procédé qui est ordinairement commode, mais qui est particulièrement avantageux dans le cas où la courbe proposée est une cubique.

On prend les formules : (§ 71)

$$x = x_0 + \alpha\rho, \quad y = y_0 + \beta\rho,$$

et l'on trouve une équation du troisième degré en ρ :

$$A\rho^3 + B\rho^2 + C\rho + D = 0.$$

Pour exprimer qu'elle a deux racines égales et de signes contraires, on a la condition $BC = AD$; on trouve ainsi, rapidement, l'équation de la courbe diamétrale.

6. *Si une cubique admet un centre ; ce point est un point d'inflexion de la courbe ; démontrer que c'est aussi un centre et un point d'inflexion pour toutes les courbes diamétrales.*

7. *Lorsqu'une courbe admet un centre les asymptotes passent par ce point, ou sont situées symétriquement, par rapport à lui.*

DIX-HUITIÈME LEÇON

HOMOTHÉTIE ET SIMILITUDE

186. Définitions. Soient deux courbes U et V, que nous supposons placées dans le même plan : s'il existe dans ce plan deux points O, O′ tels que deux semi-droites parallèles partant de ces points rencontrent U et V, respectivement, en des points $M_1, M_2, \ldots$; $m_1, m_2, \ldots$; et si les égalités :

$$\frac{OM_1}{O'm_1} = \frac{OM_2}{O'm_2} = \ldots = K,$$

sont vérifiées quelle que soit la direction des semi-droites considérées, nous dirons que U et V sont des *courbes homothétiques*. Les points O et O′ sont les *pôles* de l'homothétie, K est le rapport d'homothétie. Lorsque K est positif, l'homothétie est *directe*; elle est *inverse*, quand on suppose K négatif.

Nous dirons aussi que V est une transformée homothétique de V, et les points m_1, M_1; m_2, M_2;... seront appelés *points correspondants*.

Ces définitions étant données, on reconnait sans difficulté, par des considérations de géométrie élémentaire, les propriétés suivantes, que nous nous bornerons à énoncer.

Théorèmes divers. 1° Si par les pôles O, O′ on mène deux segments rectilignes dans la même direction ; ω et ω′ étant les extrémités de ces segments; si l'on a $\frac{O\omega}{O'\omega'} = K$, les deux courbes U et V sont encore homothétiques par rapport aux pôles ω et ω′

2° La droite qui joint deux points correspondants coupe la ligne des pôles en un point fixe quels que soient les points considérés ; il y a une infinité de pôles, mais ce point fixe est le même pour tous. C'est le centre d'homothétie.

3° Les tangentes aux points correspondants sont parallèles.

4° Les périmètres de deux lignes correspondantes ont un rapport constant, et égal à K.

5° Les surfaces des espaces fermés correspondants ont un rapport constant, et égal à K^2.

6° Si deux coniques à centre sont homothétiques, les centres peuvent être considérés comme deux pôles de l'homothétie.

7° Si deux coniques à centre sont homothétiques, elles peuvent être considérées comme homothétiques directes et comme homothétiques inverses : les centres de ces homothéties sont deux points situés sur la ligne des centres, partageant cette droite harmoniquement, et dans le rapport K.

8° Quand on transforme une courbe par l'homothétie ; à un point, correspond un point ; à une droite, une droite parallèle ; et, généralement, à une courbe f d'ordre m et de classe n, une courbe F également d'ordre m et de classe n.

8° Deux figures homothétiques à une troisième sont homothétiques entre elles.

187. Formules de transformation. Soient O et O' les deux pôles donnés ; prenons l'un d'entre eux, le point O, pour origine des coordonnées, et désignons par α, β les coordonnées du point O'. Soient m et M deux points correspondants ; les droites Om, O'M sont parallèles, et dans un rapport donné K. Les triangles semblables OmP, O'MQ donnent les relations :

$$\frac{X-\alpha}{x}=\frac{Y-\beta}{y}=K.$$

Telles sont les formules de transformation, et si le point m décrit une courbe f, dont l'équation soit,

$$f(x, y)=0;$$

DIX-HUITIÈME

HOMOTHÉTIE

186. Définitions. supposons placées d
plan deux points O
partant de ces po
des points M_1, M

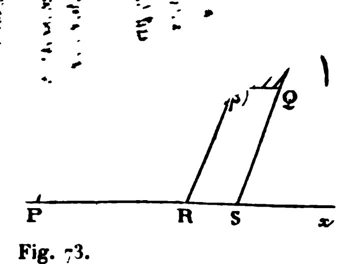


Fig. 73.

...othétie de deux coniques. — Théorème.

sont véri... *...eux coniques soient homothétiques, il est néces-*
considé... *suffisant que les coefficients des termes du second*
thétiq... *soient proportionnels.*
K es... *oient :*

$$(1)\quad U = ax^2 + a'y^2 + 2b''xy + 2by + 2b'x + a'' = 0,$$
$$(2)\quad V = Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'' = 0,$$

les équations des deux coniques proposées. D'après ce que nous venons de voir, l'équation générale des coniques homothétiques à la première est,

$$a(x-\alpha)^2 + a'(y-\beta)^2 + 2b''(x-\alpha)(y-\beta) + 2bk(y-\beta) + 2b'k(x-\alpha) + a''k^2 = 0,$$

ou, après développement,

$$(3)\quad ax^2 + a'y^2 + 2b''xy + \left.\begin{matrix} bk \\ -b''\alpha \\ -a'\beta \end{matrix}\right| 2y + \left.\begin{matrix} b'k \\ -a\alpha \\ -b''\beta \end{matrix}\right| 2x + \rho = 0;$$

$$+ 2b''\alpha\beta - 2b\beta k - 2b'\alpha k + a''k^2.$$

2) et (3), nous obtenons les rela-

$$\frac{b'k - a\alpha - b''\beta}{B'} = \frac{\rho}{A''}.$$

α, β et k : on voit

... $\frac{\alpha}{A}$, $\frac{a'}{A'}$, $\frac{b''}{B''}$ soient

... avons énoncée tout à l'heure

... nous reste à montrer qu'elle est suffi-

...ant, pourtant, que la valeur de k soit suscep-

...e prendre des valeurs imaginaires.

Désignons par λ la valeur commune des rapports $\frac{a}{A}$, $\frac{a'}{A'}$, $\frac{b''}{B''}$; les inconues α, β et k vérifient les équations suivantes :

$$(1)\quad \begin{aligned} a\alpha + b''\beta - b'k + B'\lambda &= 0,\\ b''\alpha + a'\beta - bk + B\lambda &= 0,\\ a\alpha^2 + a'\beta^2 + 2b''\alpha\beta - 2b\beta k - 2b'\alpha k + a''k^2 - A''\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Multiplions ces égalités, respectivement, par α, β et -1, puis ajoutons les résultats obtenus, nous avons :

$$\alpha(B'\lambda + b'k) + \beta(B\lambda + bk) + A''\lambda - a''k^2 = 0.$$

Les équations (1) donnent donc :

$$\begin{vmatrix} a & b'' & -b'k + B'\lambda \\ b'' & a' & -bk + B\lambda \\ B'\lambda + b'k & B\lambda + bk & -a''k^2 + \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en appliquant une règle connue (Alg. § 89),

$$-k\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b'k+B'\lambda & bk+B\lambda & a''k \end{vmatrix} + \lambda\begin{vmatrix} a & b'' & B' \\ b'' & a & B \\ b'k+B'\lambda & bk+B\lambda & A'' \end{vmatrix} = 0,$$

le lieu décrit par le point correspondant est une courbe ayant pour équation,

$$f\left(\frac{X-\alpha}{k}, \frac{Y-\beta}{k}\right)=0.$$

Fig. 73.

188. Homothétie de deux coniques. — Théorème. *Pour que deux coniques soient homothétiques, il est nécessaire et suffisant que les coefficients des termes du second degré soient proportionnels.*

Soient :

$$(1)\quad U = ax^2 + a'y^2 + 2b''xy + 2by + 2b'x + a'' = 0,$$
$$(2)\quad V = Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'' = 0,$$

les équations des deux coniques proposées. D'après ce que nous venons de voir, l'équation générale des coniques homothétiques à la première est,

$$a(x-\alpha)^2 + a'(y-\beta)^2 + 2b''(x-\alpha)(y-\beta) + 2bk(y-\beta)$$
$$+ 2b'k(x-\alpha) + a''k^2 = 0,$$

ou, après développement,

$$(3)\quad ax^2 + a'y^2 + 2b''xy + \left.\begin{array}{r} bk \\ -b''\alpha \\ -a'\beta \end{array}\right| 2y + \left.\begin{array}{r} b'k \\ -a\alpha \\ -b''\beta \end{array}\right| 2x + \rho = 0;$$

en posant :

$$(4)\quad \rho = a\alpha^2 + a'\beta^2 + 2b''\alpha\beta - 2b\beta k - 2b'\alpha k + a''k^2.$$

Identifions les équations (2) et (3), nous obtenons les relations :

$$\frac{a}{A} = \frac{a'}{A'} = \frac{b''}{B''} = \frac{bk - b''\alpha - a'\beta}{B} = \frac{b'k - a\alpha - b''\beta}{B'} = \frac{\rho}{A''}.$$

Dans ces égalités, les inconnues sont α, β et k : on voit d'abord qu'elles exigent que les rapports $\frac{a}{A}$, $\frac{a'}{A'}$, $\frac{b''}{B''}$ soient égaux ; la condition que nous avons énoncée tout à l'heure est donc nécessaire ; il nous reste à montrer qu'elle est suffisante, en admettant, pourtant, que la valeur de k soit susceptible de prendre des valeurs imaginaires.

Désignons par λ la valeur commune des rapports $\frac{a}{A}$, $\frac{a'}{A'}$, $\frac{b''}{B''}$; les inconues α, β et k vérifient les équations suivantes :

$$(1)\quad \begin{aligned} a\alpha + b''\beta - b'k + B'\lambda &= 0,\\ b''\alpha + a'\beta - bk + B\lambda &= 0,\\ a\alpha^2 + a'\beta^2 + 2b''\alpha\beta - 2b\beta k - 2b'\alpha k + a''k^2 - A''\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Multiplions ces égalités, respectivement, par α, β et -1, puis ajoutons les résultats obtenus, nous avons :

$$\alpha(B'\lambda + b'k) + \beta(B\lambda + bk) + A''\lambda - a''k^2 = 0.$$

Les équations (1) donnent donc :

$$\begin{vmatrix} a & b'' & -b'k + B'\lambda \\ b'' & a' & -bk + B\lambda \\ B'\lambda + b'k & B\lambda + bk & -a''k^2 + \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en appliquant une règle connue (Alg. § 89),

$$-k\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b'k + B'\lambda & bk + B\lambda & a''k \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a & b'' & B' \\ b'' & a & B \\ b'k + B'\lambda & bk + B\lambda & A'' \end{vmatrix} = 0,$$

ou, encore, par application de la même règle,

$$o = -k^2 \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} - \lambda k \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ B' & B & o \end{vmatrix} + \lambda k \begin{vmatrix} a & b'' & B' \\ b'' & a' & B \\ b' & b & o \end{vmatrix}$$

$$+ \lambda \begin{vmatrix} a & b'' & B' \\ b'' & a' & B \\ B'\lambda & B\lambda & A'' \end{vmatrix}$$

Si nous simplifions cette égalité, nous avons,

$$k^2 \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b'' & B' \\ b'' & a' & B \\ B'\lambda & B\lambda & A'' \end{vmatrix},$$

ou, finalement,

$$k^2\delta = \lambda^2\Delta;$$

δ et Δ désignant les discriminants des deux coniques proposées. On peut toujours supposer que A et a sont positifs; alors λ est une quantité positive et les valeurs de k sont réelles si les deux coniques considérées ont leurs discriminants de même signe ; elles sont imaginaires, dans le cas contraire. On peut aussi remarquer que la valeur de k^2, n'est jamais ni nulle, ni infinie, quand Δ et δ sont différents de zéro.

189. Théorème. *Lorsque l'équation d'une courbe ne renferme qu'un seul paramètre p, toutes ces courbes sont homothétiques, quand p varie.*

Soit :

$$f(x, y, p) = o,$$

l'équation de la courbe proposée U ; le premier membre de cette équation est une forme entière et homogène (§ 34) des lettres x, y et p. Donnons à p une valeur nouvelle P, et considérons la courbe V qui correspond à l'équation $f(x, y, P) = o$: nous allons montrer que U et V sont des courbes homothétiques.

Posons :

$$\frac{P}{p} = \lambda ;$$

l'équation de V peut s'écrire :

$$f(x, y, p\lambda) = 0.$$

Effectuons maintenant une transformation de coordonnées, conformément aux formules :

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \lambda ;$$

l'équation de V devient alors,

$$f(\lambda X, \lambda Y, \lambda p) = 0,$$

ou, en remarquant que f est une forme homogène en X, Y, et p.

$$f(X, Y, p) = 0.$$

Ainsi, une transformation homothétique de V la rend identique à U ; ces deux courbes sont donc homothétiques.

190. Similitude. *On dit que deux courbes* U *et* V *sont semblables lorsque un déplacement effectué sur l'une d'elles, la rend homothétique à l'autre.*

La méthode générale pour reconnaître que deux courbes U, V sont semblables peut être résumée de la manière suivante : On effectue d'abord, pour l'une des courbes, pour U par exemple, une rotation des axes proposés autour de l'origine ; on cherche ensuite l'équation générale des courbes homothétiques de U, dans le nouveau système d'axes. Si l'on peut, après cette rotation, et cette transformation, identifier la courbe obtenue avec la courbe donnée V, on peut conclure que U et V sont semblables.

Cette méthode donne lieu ordinairement à des calculs compliqués ; nous indiquerons plus loin un moyen plus rapide, permettant d'exprimer que deux coniques sont semblables.

191. Homographie. Les figures homothétiques peuvent être considérées comme constituant un cas particulier des figures homographiques. Sans entrer dans les développements que comporte la transformation homographique, nous indiquerons seulement les formules qui servent de base à cette transformation et qui sont dues à *Waring*.

Lorsque les coordonnées variables x, y d'un point m sont liées aux coordonnées X, Y d'un autre point M, par les formules :

$$(A) \quad x = \frac{aX + bY + c}{mX + nY + p}, \quad y = \frac{a'X + b'Y + c'}{mX + nY + p};$$

nous dirons, avec Chasles, que les deux points m, M se correspondent, homographiquement. Si le point m décrit une figure f, le point M décrit, lui aussi, une figure F ; nous dirons que les figures f et F se correspondent homographiquement, ou que F est une transformée homographique de f.

Il est facile de reconnaître que si F est une transformée homographique de f, *réciproquement*, on peut considérer F comme une transformée homographique de f.

En effet, les formules (A) donnent :

$$(A') \quad X = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\mu x + \nu y + \rho}, \quad Y = \frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma'}{\mu x + \nu y + \rho};$$

en posant :

$$\alpha = pb' - nc', \quad \alpha' = mc' - pa', \quad \mu = na' - mb',$$
$$\beta = nc - pb, \quad \beta' = pa - mc, \quad \nu = mb - na,$$
$$\gamma = bc' - cb', \quad \gamma' = ca' - ac', \quad \rho = ab' - ba'.$$

Ces formules (A′) prouvent que F est une figure qui peut être considérée comme une transformée homographique de f.

D'après les formules (A), à une droite δ, de la figure f, correspond, dans F, une droite Δ ; et si l'équation de δ est :

$$ux + vy + w = 0,$$

Celle de Δ est :

$$u(aX + bY + c) + v(a'X + b'Y + c') + w(mX + nY + p) = 0.$$

D'une façon plus générale, on voit que si l'équation d'une courbe est, en coordonnées homogènes,

$$f(x, y, z) = 0,$$

celle de la transformée est

$$f(aX + bY + c, a'X + b'Y + c', mX + nY + p) = 0.$$

De cette remarque, on déduit cette conséquence importante, indiquée par Waring, *dans la transformation homographique, l'ordre des courbes n'est pas modifié.*

192. Interprétation géométrique de l'homographie. Nous nous proposons de montrer que la transformation homographique revient, à la bien considérer, à un simple changement de coordonnées.

Pour simplifier la démonstration qui suit, supposons que les axes proposés soient rectangulaires et que les formules de transformation soient prises sous la forme :

$$x = \frac{X\cos\alpha + Y\sin\alpha - a}{X\cos\varphi + Y\sin\varphi - l}, \quad y = \frac{X\cos\beta + Y\sin\beta - b}{X\cos\varphi + Y\sin\varphi - l}.$$

Considérons les droites qui correspondent aux équations :

$$\begin{aligned} P &= X\cos\alpha + Y\sin\alpha - a = 0, \\ Q &= X\cos\beta + Y\sin\beta - b = 0, \\ R &= X\cos\varphi + Y\sin\varphi - l = 0. \end{aligned}$$

Et supposons, pour ne nous occuper que du cas général, que ces droites forment un triangle, que nous nommerons le triangle de référence de la transformation considérée. Soit :

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0,$$

l'équation de la courbe considérée ; l'équation transformée est donc :

$$f(P, Q, R) = 0.$$

Considérons maintenant un point m, et appelons ξ, η, ζ ses distances aux côtés du triangle de référence. Nous avons

$$\xi = P, \quad \eta = Q, \quad \zeta = R;$$

par conséquent, nous pouvons écrire :

$$(2) \quad f(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Si nous comparons maintenant les équations (1) et (2), nous voyons qu'elles ne diffèrent que par le simple changement des lettres : x, y, z, d'une part; ξ, η, ζ, d'autre part. La transformation homographique revient donc à conserver l'équation proposée, mais en donnant aux lettres x, y, z cette signification nouvelle, qu'elles représentent les distances d'un point aux côtés du triangle de référence, ou, du moins, des quantités proportionnelles.

193. Transformation homologique. La transformation homologique a été imaginée par Poncelet; elle constitue un cas particulier de la transformation homographique de Chasles et on peut la définir de la manière suivante :

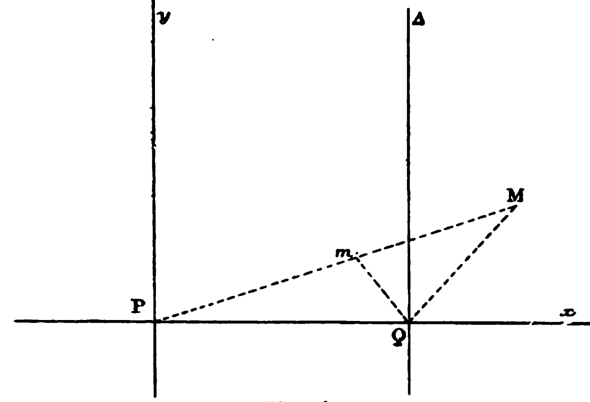


Fig. 74.

Imaginons une droite fixe Δ, que nous nommerons l'*axe d'homologie*, et un point fixe P qui sera le *pôle de la transformation*. Abaissons du point P une perpendiculaire PQ sur Δ et considérons deux points m et M se correspondant ainsi :

1° *La droite* mM *passe constamment par le pôle* P.

2° *La droite* Δ *est bissectrice de l'angle* mQM.

Ces points m et M, ainsi associés, sont des points qui se correspondent homologiquement ; et si m, (x, y), décrit une courbe f, le point M, (X, Y), décrit une courbe correspondante F; cette courbe F est la transformée homologique de f.

Ayant pris les axes indiqués par la figure, en posant $PQ = d$, on a :

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{d - x}{X - d}$$

De ces égalités, on tire :

$$x = \frac{dX}{2X - d}, \quad y = \frac{dY}{2X - d}.$$

Ce sont les formules de la transformation homologique, dans le système d'axes que nous avons adopté.

EXERCICES

1. *Démontrer que, dans la transformation homographique, à quatre points en ligne droite* a_1, a_2, a_3, a_4, *correspondent quatre points* A_1, A_2, A_3, A_4 *qui sont aussi en ligne droite et qui sont tels que leur rapport anharmonique soit égal à celui des quatre points a ; ce qui s'exprime par la notation conventionnelle,*

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (A_1, A_2, A_3, A_4).$$

Pour résoudre cette question par l'analyse, on établira d'abord que si l'on considère quatre points A, B, C, D en ligne droite et si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ leurs distances à une droite Δ, par $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ les distances

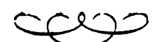
de ces mêmes points à une seconde droite Δ' (ou des quantités proportionnelles à ces distances), on a :

$$(A, B, C, D) = \frac{\left(\dfrac{\dfrac{\beta}{\beta'} - \dfrac{\alpha}{\alpha'}}{\dfrac{\delta}{\delta'} - \dfrac{\alpha}{\alpha'}}\right)}{\left(\dfrac{\dfrac{\beta}{\beta'} - \dfrac{\gamma}{\gamma'}}{\dfrac{\delta}{\delta'} - \dfrac{\gamma}{\gamma'}}\right)}.$$

2. *Démontrer que dans la transformation homologique deux droites correspondantes se coupent toujours sur l'axe d'homologie.*

3. *Démontrer que deux cercles quelconques peuvent être considérés comme transformés l'un de l'autre par homologie ; le centre d'homologie étant l'un des centres de similitude, et l'axe d'homologie, l'axe radical.*

Cette propriété est un cas particulier d'un théorème plus général, relatif à deux coniques quelconques. (Poncelet ; *Traité des propriétés projectives.*)



TROISIÈME LIVRE

LES CONIQUES D'APRÈS LEUR ÉQUATION GÉNÉRALE

DIX-NEUVIÈME LEÇON

CLASSIFICATION DES CONIQUES

194. L'équation générale des coniques étant, dans la notation que nous avons adoptée,

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Byz + 2B'zx + A''z^2 = 0,$$

nous désignerons par Δ le discriminant de cette forme quadratique et nous poserons, en conséquence,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}.$$

Suivant une notation usitée, nous représenterons par a, le mineur qui est le coefficient de A, et ainsi des autres. Nous poserons donc :

$$a = A'A'' - B^2, \quad a' = AA'' - B'^2, \quad a'' = AA' - B''^2;$$
$$b = -AB + B'B'', \quad b' = -A'B' + BB'', \quad b'' = -A''B'' + BB'.$$

Nous distinguerons particulièrement le mineur a'' ; la valeur et le signe de a'' ayant, comme nous allons le reconnaître, une importance notable dans la classification que nous avons en vue ; nous désignerons ce mineur par la lettre δ.

Ces conventions étant faites, nous examinerons d'abord le cas particulier où $\Delta = 0$.

195. Théorème. *Lorsque* Δ *est nul, l'équation proposée représente un système de deux droites ; réelles ou imaginaires, distinctes ou coïncidentes, sécantes ou parallèles.*

Nous supposerons d'abord que le coefficient du terme en x^2 soit différent de zéro. Nous avons alors :

$$Af(x, y, z) \equiv (Ax + B''y + B'z)^2 + a''y^2 - 2byz + a'z^2.$$

Observons maintenant, et cette remarque a déjà été faite en algèbre (p. 657), que nous avons : $a'a'' - b^2 = A\Delta$. Comme nous supposons $\Delta = 0$, le trinôme $a''y^2 - 2byz + a'z^2$ est un carré parfait et, en supposant $a'' \neq 0$, nous pouvons écrire

$$Af(x, y, z) \equiv (Ax + B''y + B'z)^2 + \frac{1}{a''}(a''y - bz)^2. \quad (\Delta = 0)$$

Si a'' est positif, f est une somme, dans le sens arithmétique de ce mot, de deux carrés ; f est décomposable en deux facteurs linéaires à coefficients imaginaires ; nous dirons que, dans ce cas, l'équation représente deux droites imaginaires. Si, au contraire, a'' est négatif, f est une différence de deux carrés et, à l'équation proposée, correspondent deux droites réelles et sécantes.

Enfin, dans le cas particulier où l'on suppose $a'' = 0$, la relation : $a'a'' - b^2 = A\Delta$, donne $b = 0$ et l'on a,

$$Af(x, y, z) \equiv (Ax + B''y + B'z)^2 + a'z^2. \quad (\Delta = 0, \ \delta = 0).$$

Cette équation représente deux droites parallèles ; ces droites sont réelles et distinctes, si a' est négatif ; coïncidentes, si a' est nul ; imaginaires, si a' est positif.

Nous résumerons, dans le tableau suivant, les résultats précédents.

VARIÉTÉ DES CONIQUES. (A) $\Delta = 0$	$\delta > 0$		deux droites imaginaires.
	$\delta < 0$		deux droites réelles et sécantes.
	$\delta = 0$	$a' > 0$	deux droites parallèles et imaginaires.
		$a' < 0$	deux droites parallèles et distinctes.
		$a' = 0$	deux droites parallèles et coïncidentes.

Il nous resterait à discuter le cas où l'on suppose $A = 0$; mais on trouvera, plus loin, les explications qui conviennent à ce cas particulier.

196. Distinction des trois coniques. Supposons maintenant $\Delta \neq 0$, et soit $A \neq 0$. Nous avons, en supposant d'abord $a'' \neq 0$,

$$\text{(c)} \quad Af(x,y,z) \equiv (Ax + B''y + B'z)^2 + \frac{1}{a''}(a''y - bz)^2 + \frac{1}{a''}A\Delta^2 z^2 = 0.$$

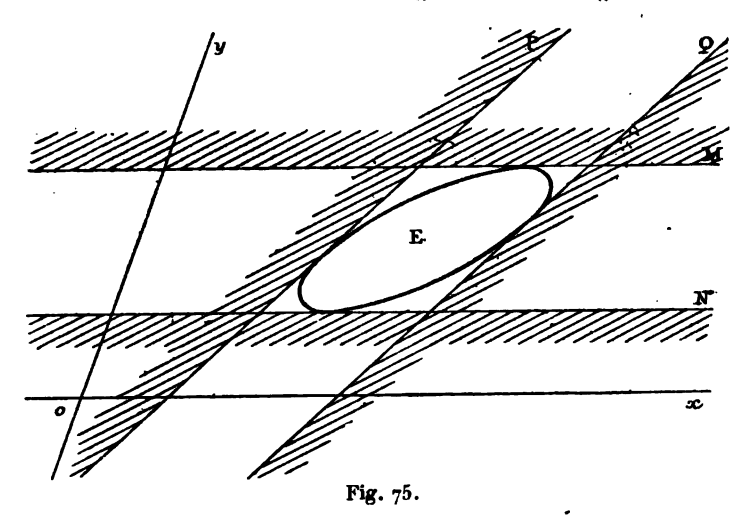


Fig. 75.

1° $\delta > 0$, **genre ellipse.** Admettons d'abord que a'' soit positif et distinguons deux cas suivant que l'on a $A\Delta < 0$, ou $A\Delta > 0$.

Dans la première hypothèse, posons $A\Delta = -h^2$; l'équation de la courbe que nous étudions peut s'écrire, en revenant aux coordonnées cartésiennes,

$$a''(Ax + B''y + B')^2 + (a''y - b)^2 = h^2,$$

ou encore, sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$(1)\quad a''(Ax + B''y + B')^2 = (h + b - a''y)(h - b + a''y),$$

$$(2)\quad (a''y - b)^2 = [h + \sqrt{a''}(Ax + B''y + B')][h - \sqrt{a''}(Ax + B''y + B')].$$

Prenons d'abord l'équation (1); le premier membre étant positif ou nul, quel que soit x et y, il est nécessaire que l'on ait,

$$(h + b - a''y)(h - b + a''y) \geqslant 0.$$

Il résulte de cette remarque que la courbe que nous étudions est comprise, toute entière, entre les parallèles M, N qui correspondent aux équations :

$$y = \frac{h + b}{a''}, \quad y = \frac{b - h}{a''}.$$

L'équation (2) prouve, de même, que si l'on construit les droites parallèles P et Q qui correspondent aux équations :

$$Ax + B''y + B' = -\frac{h}{\sqrt{a''}}, \quad Ax + B''y + B' = \frac{h}{\sqrt{a''}};$$

la courbe est comprise, toute entière, entre ces deux droites.

Enfin, si l'on considère une droite ayant pour équation :

$$y = \lambda,$$

λ désignant un paramètre variable, dont la valeur est toujours comprise entre les quantités $\frac{h + b}{a''}$, $\frac{b - h}{a''}$; on voit qu'à cette valeur de λ correspondent pour x deux valeurs réelles et l'on peut dire, en résumé, que l'équation proposée représente une courbe réelle, renfermée dans l'intérieur du

parallélogramme formé par les droites M, N, P, Q. Nous donnerons à une courbe du second degré, présentant ce caractère, le nom d'*ellipse*.

Dans le cas où l'on suppose $A\Delta > 0$, l'équation (c) n'est vérifiée par aucune valeur réelle d'x et d'y; nous dirons, pour rappeler ce fait, que la courbe qui correspond à l'équation proposée est une *ellipse imaginaire*, mais il ne faut voir dans cette dénomination qu'une manière rapide d'exprimer le résultat analytique précédent.

2° $\delta < 0$, **genre hyperbole**. Supposons maintenant que a'' soit négatif; écrivons l'équation (c) sous la forme :

$$(3)\quad \left\{ \sqrt{a''}\,(Ax + B''y + B') + a''y - b \right\} \left\{ -\sqrt{a''}\,(Ax + B''y + B') + a''y - b \right\} + A\Delta = 0.$$

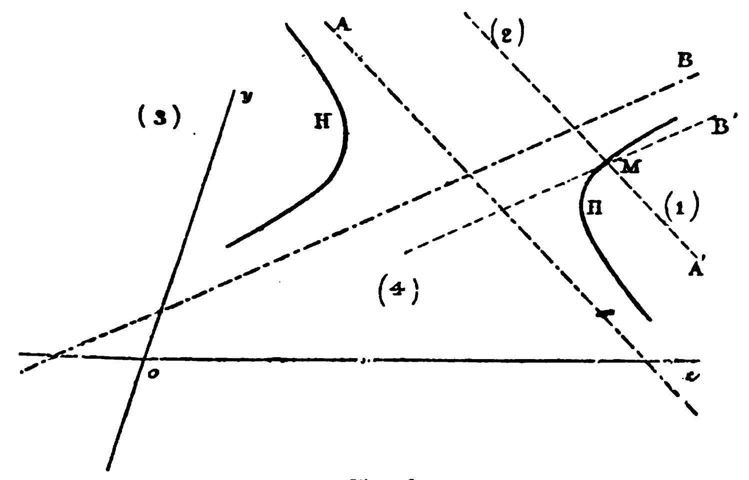


Fig. 76.

Si nous construisons les droites A, B, qui correspondent aux équations :

$$U = Ax + (B'' + \sqrt{a''})\,y + B' - \frac{b}{\sqrt{a''}} = 0,$$

$$V = -Ax + (-B'' + \sqrt{a''})\,y - B' - \frac{b}{\sqrt{a''}} = 0,$$

ces droites, qui sont sécantes puisqu'elles ont des coefficients

angulaires différents et qui coupent l'axe ox, puisque A n'est pas nul, partagent le plan en quatre régions. En supposant, pour fixer les idées, $A > 0$ et $\Delta > 0$ l'équation (3) montre qu'il n'y a aucun point de la courbe dans les régions (2) et (4). En effet, en donnant à y une valeur positive très petite et à x une valeur positive suffisamment grande, l'équation :

$$(4) \quad UV + A\frac{\Delta}{a''} = 0,$$

a son premier membre composé de deux termes ayant des signes contraires; le produit UV changeant de signe, quand le point dont les coordonnées sont x et y passe d'une région dans une autre, il y a donc impossibilité de vérifier l'équation proposée, quand on prend un point dans l'une des régions (2) ou (4).

D'ailleurs, si l'on considère l'équation :

$$U = \lambda,$$

dans laquelle λ désigne un paramètre variable arbitraire, les deux équations :

$$U = \lambda, \quad V = -\frac{A\Delta}{a''\lambda},$$

représentent deux parallèles A', B' aux droites A et B. Ces droites A', B' se coupent en un point M dont les coordonnées vérifient, quel que soit λ, l'équation proposée.

De ces considérations diverses, il résulte que la courbe est formée de deux branches séparées et situées : l'une dans la région (1), l'autre dans la région (3). Nous donnerons le nom d'*hyperbole* à une courbe du second degré présentant cette forme générale.

3° $\delta = 0$, **genre parabole**. Supposons maintenant $a'' = 0$. L'équation proposée est alors :

$$(Ax + B''y + B'z)^2 - 2byz + a'z^2 = 0.$$

Nous ferons d'abord remarquer que l'égalité, citée plus haut,

$$a'a'' - b^2 = A\Delta,$$

donne, lorsqu'on suppose $a'' = 0$,

$$b^2 = -A\Delta.$$

Les facteurs A et Δ étant supposés différents de zéro, on a $b \neq 0$.

Cette remarque étant faite, construisons la droite AB qui correspond à l'équation :

$$U = 2by - a' = 0.$$

L'équation de la parabole, si l'on pose,

$$V = Ax + B''y + B',$$

peut s'écrire :

$$V^2 - U = 0.$$

On doit donc avoir : $U > 0$, pour tous les points de la courbe ; si b est positif, la courbe est située au-dessus de la

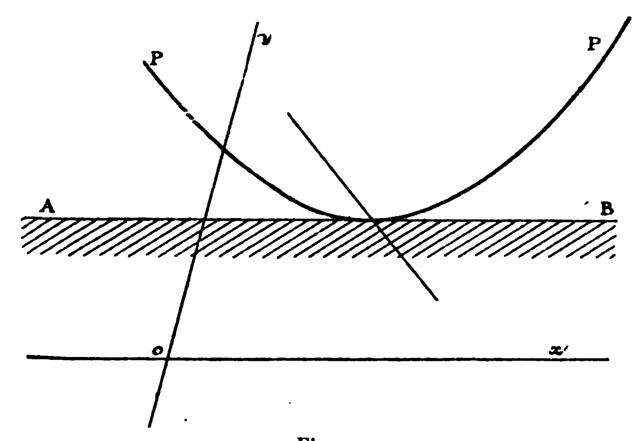


Fig. 77.

droite AB ; elle est, au contraire, située au-dessous de cette droite, si b est négatif.

D'ailleurs, la droite qui a pour équation :

$$U = \lambda,$$

coupe la courbe en deux points réels si l'on suppose $b > 0$, et $\lambda > \frac{a'}{2b}$. Il y a donc, dans cette hypothèse, une branche unique de courbe disposée comme l'indique la figure ci-dessus. Nous appellerons *Paraboïes* les courbes du second degré qui correspondent à cette nouvelle forme.

Nous résumons, dans le tableau suivant, la discussion qui précède.

VRAIES CONIQUES. (B) $\Delta \gtrless 0$

- $\delta > 0$
  - $A\Delta < 0$, Ellipse réelle.
  - $A\Delta > 0$, Ellipse imaginaire.
- $\delta < 0$ Hyperbole.
- $\delta = 0$ Parabole.

197. Examen du cas particulier : $A = 0$. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que A était différent de zéro; nous nous proposons de montrer que les résultats auxquels nous sommes parvenus subsistent, quand on suppose $A = 0$.

Remarquons d'abord que si A est nul, mais si A′ ne l'est pas, on peut reproduire les raisonnements que nous avons faits, il suffit de permuter les lettres x et y. Nous ferons seulement observer que l'on a, dans ce cas, $\delta = B''^2$. Si la courbe est une vraie conique, elle représente une hyperbole, ou une parabole, suivant que l'on a $B \gtrless 0$, ou $B = 0$. Si, au contraire, le discriminant est nul, l'équation représente deux droites sécantes, si B'' n'est pas nul; et deux droites parallèles, si B'' est nul. Dans ce dernier cas, le discriminant Δ étant nul et se réduisant au terme $-A'B'^2$, et A′ n'étant pas nul, il faut que B' *soit* nul. L'équation se réduit à la forme :

$$A'y^2 + 2By + A'' = 0,$$

elle représente deux droites parallèles à l'axe des y.

Mais supposons que l'on ait, à la fois, $A = 0$ et $A' = 0$; l'équation proposée peut s'écrire :

$$f(x, y, z) = 2B''xy + 2Byz + 2B'xz + A''z^2 = 0.$$

Le coefficient B″ n'est pas nul, si nous supposons que l'équation proposée soit du second degré par rapport aux lettres x et y. D'après cela, l'équation donnée peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2B''} f(x,y,z) = xy + \frac{B}{B''} yz + \frac{B'}{B''} xz + \frac{A''}{2B''} z^2 = 0,$$

ou,

$$\frac{1}{2B''} f(x,y,z) = \left(x + \frac{B}{B''} z\right) \left(y + \frac{B'}{B''} z\right) - \frac{2BB' - A''B''}{2B''^2} z2 = 0.$$

Remarquons aussi que la formule :

$$\Delta = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2,$$

dans l'hypothèse $A = 0$, $A' = 0$, donne :

$$\Delta = B''(2BB' - A''B'').$$

Nous avons donc, finalement,

$$\frac{1}{2B''} f(x,y,z) = \left(x + \frac{B}{B''} z\right) \left(y + \frac{B'}{B''} z\right) - \frac{\Delta}{2B''^2} z^2 = 0.$$

Considérons maintenant les droites qui ont pour équation, respectivement,

$$U = x + \frac{B}{B''} = 0,$$
$$V = y + \frac{B'}{B''} = 0,$$

Si nous supposons d'abord $\Delta = 0$, l'équation proposée représente deux droites parallèles aux axes de coordonnées; par conséquent, deux droites qui se coupent; et comme on a $\delta = -B''^2$, on peut dire que δ est négatif. En résumé, dans le cas particulier que nous considérons, on a : $\Delta = 0$, $\delta < 0$, et l'équation proposée représente deux droites sécantes. Ce cas particulier rentre donc dans celui qui est signalé dans le tableau (A).

Supposons maintenant que Δ ne soit pas nul, l'équation de la courbe étant,

$$UV = \frac{\Delta}{2B''^2}$$

on voit que les droites ($U = 0$, $V = 0$) séparent le plan en quatre régions. En raisonnant comme nous l'avons fait au paragraphe précédent, on reconnaît que la courbe est située dans deux de ces régions non contiguës, et que les droites qui correspondent aux équations :

$$U = \lambda, \quad V = \frac{\Delta}{2\lambda B''^2};$$

se coupent, quel que soit λ, sur la courbe proposée. Celle-ci a donc la forme de deux branches séparées, elle représente donc ce genre de coniques auxquelles nous avons donné le nom d'hyperbole. Nous avons d'ailleurs $\Delta \neq 0$ et $\delta = -B''^2$, *par* conséquent $\delta < 0$; en nous reportant au tableau (B), nous voyons que le cas particulier qui nous occupe rentre *encore* dans l'un de ceux qui figurent dans ce tableau.

198. Discussion d'une conique donnée. Soit :

$$F(x, y) = 0,$$

une équation du second degré en x et y. Si, comme nous le supposerons d'abord, les coefficients de cette équation sont numériques, la discussion que l'on peut proposer consiste simplement à reconnaitre si la courbe qui correspond à l'équation est une vraie conique, ou une variété; on doit ensuite rechercher quel est le genre de la conique, ou l'espèce de la variété, suivant que l'on est placé dans le premier, ou dans le second cas.

On calcule, à cet effet, les déterminants Δ et δ, et en se reportant aux tableaux (A) et (B), donnés plus haut, on pourra dire ce que représente, au juste, l'équation proposée.

On rencontre, assez souvent, une discussion plus délicate dont nous dirons ici quelques mots.

Imaginons que les coordonnées α, β, d'un certain point P, entrent dans les coefficients de l'équation de la conique, et supposons que l'on fasse varier α, β arbitrairement. Le point P se déplace dans le plan et l'on peut demander de déterminer le genre ou la variété de la conique d'après la situation de P.

A cet effet, considérons les deux équations :

$$A\Delta = 0, \quad \delta = 0;$$

et supposons que α et β soient des coordonnées courantes. La première équation représente une courbe U, que nous appellerons *courbe de la variété*, l'autre une courbe V, que nous nommerons *courbe du genre*. Ces deux courbes étant tracées, on pourra dire, d'après la position qu'occupe le point P, relativement à elles, ce que représente l'équation donnée.

On doit observer, en traçant ces deux courbes, que, en général, *elles sont mutuellement tangentes à tous les points qui leur sont communs.*

En effet, les deux relations :

$$(1) \quad A(AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B''^2 - A''B'''^2) = 0,$$
$$(2) \quad AA' - B'''^2 = 0,$$

donnent, par combinaison,

$$(3) \quad (AB - B'B'')^2 = 0.$$

Ainsi, en cherchant les points communs aux courbes (1) et (2), on peut associer l'une de ces équations, avec l'équation (3), dont le premier membre est un carré parfait. C'est pour ce motif que ces points communs sont, deux à deux, coïncidents et que, par suite, les deux courbes sont, en général, mutuellement tangentes.

En construisant la courbe qui correspond à l'équation $A\Delta = 0$, on peut faire abstraction de la courbe, $A = 0$. En effet, lorsque $A = 0$, la conique est une hyperbole, ou une parabole, et le passage de A par la valeur zéro, tout

en faisant, en général, changer le signe de la fonction $A\Delta$, ne donne pas lieu à une modification dans le genre ou dans la variété de la conique. Le tableau (B) fait comprendre la justesse de cette observation et, en résumé, la courbe de la variété est celle qui correspond à l'équation $\Delta = 0$.

199. Application. La discussion à laquelle nous venons de faire allusion se rencontre fréquemment dans les problèmes de la géométrie analytique : nous voulons montrer, sur un exemple, comment elle peut être dirigée.

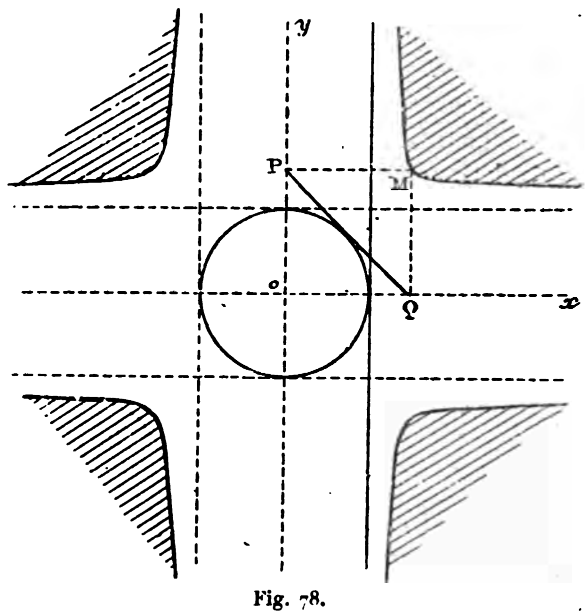


Fig. 78.

Prenons la conique dont l'équation est,

$$x^2\beta(\alpha - h) - 2\alpha hxy + y^2\beta(\alpha + h) + 2h^2xy - 2\alpha\beta hx = 0.$$

Nous avons, dans cet exemple,

$$\delta = \beta^2\alpha^2 - \beta^2h^2 - \alpha^2h^2,$$

$$\Delta = h^2\alpha^2\beta\ (\alpha + h)(h - \beta)(h + \beta).$$

La courbe du genre a la forme qu'indique la figure ci-dessus ; elle peut se construire, point par point, comme

nous l'avons indiqué sur cette figure; la droite PQ est supposée mobile et constamment tangente à un cercle ayant pour centre l'origine, et dont le rayon est égal à h. La courbe de la variété est formée par les lignes ponctuées; lorsque le point (α, β) est situé dans les régions ombrées, la conique correspondante est une ellipse toujours réelle; la conique est une parabole, si le point est placé sur la courbe; enfin c'est une hyperbole, dans tous les autres cas; et un système de deux droites concourantes, quand le point est placé sur l'une des lignes ponctuées.

EXERCICES

1. *Démontrer qu'en posant,*

$$(1)\quad P_h = a_h x + b_h y + c_h,$$

l'équation

$$P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_i^2 = 1$$

représente une ellipse, ou, dans le cas particulier où toutes les droites (1) *sont parallèles, un système de deux droites parallèles.*

2. *Reconnaître que l'équation,*

$$abx^2 + (b^2 - a^2)xy - aby^2 + h(a^2 + b^2)x + h^2ab = 0,$$

représente un système de deux droites rectangulaires.

On peut vérifier cet exercice en formant le discriminant; on peut aussi résoudre l'équation par rapport à l'une des lettres x et y, ou encore par rapport à h.

3. *Discuter le genre et la variété de la conique qui a pour équation,*

$$x^2(h + \alpha) + 2\beta xy + y^2(h - \alpha) + 2\alpha hx + 2\beta hy = 0,$$

quand α, β *varient arbitrairement.*

On trouve :

$$\delta = h^2 - \alpha^2 - \beta^2, \quad \Delta = h^2(\alpha - h)(\alpha^2 + \beta^2).$$

VINGTIÈME LEÇON

RÉDUCTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ

Lorsqu'on donne une équation $f(x,y) = 0$, à laquelle correspond une certaine courbe U, on peut rechercher s'il n'existe pas de nouveaux axes de coordonnées, choisis de telle sorte que l'équation de U, dans ce nouveau *système*, soit plus simple que l'équation proposée. Lorsqu'on peut trouver un pareil système, on dit qu'on a réduit l'équation.

L'utilité de cette réduction est manifeste et résulte de ce fait que : l'étude d'une courbe, son tracé, la recherche de ses propriétés géométriques, sont d'autant plus faciles que l'équation de cette courbe est plus simple.

La méthode la plus naturelle et la plus générale, pour opérer la réduction d'une équation, consiste à effectuer une transformation de coordonnées et à utiliser les paramètres qui se trouvent ainsi introduits de façon à faire disparaitre le plus grand nombre possible de termes.

200. Réduction des coniques à centre. Lorsqu'on suppose $\delta \neq 0$, nous avons reconnu que si l'on a $A \neq 0$, l'équation proposée peut s'écrire sous la forme (§ 196),

$$(Ax + B''y + B')^2 + \frac{1}{\delta}(\delta y - b)^2 + \frac{1}{\delta} A \Delta = 0.$$

Considérons les droites qui correspondent aux équations :

$$Ax + B''y + B' = 0, \quad \delta y - b = 0;$$

ces droites se coupent au point o′ et nous les prendrons pour nouveaux axes de coordonnées. Soit M un point quelconque, abaissons de ce point des perpendiculaires sur les droites o′X, o′Y, nous avons :

$$MA' = \varepsilon(\delta y - b),$$
$$MB' = \varepsilon'(Ax + B''y + B'),$$

ε, ε', désignant des coefficients indépendants d'x et d'y.

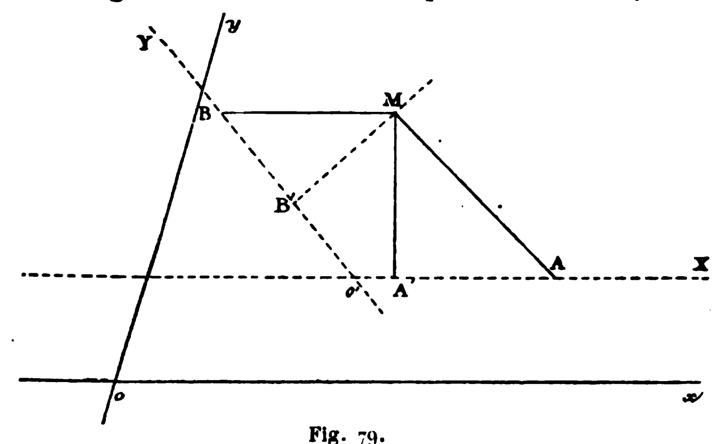


Fig. 79.

D'autre part, en désignant par θ l'angle Yo′X, nous avons :

$$MA' = Y \sin\theta,$$
$$MB' = X \sin\theta,$$

et, par suite,

$$\frac{X^2 \sin^2\theta}{\varepsilon'^2} + \frac{Y^2 \sin^2\theta}{\delta\varepsilon^2} = -\frac{1}{\delta} A\Delta.$$

Cette équation est de la forme :

$$(U) \quad \frac{X^2}{\alpha} + \frac{Y^2}{\beta} = 1,$$

et il faut observer que le produit $(\alpha . \beta)$ des coefficients des termes en X^2 et en Y^2, a le même signe que δ. Dans les courbes

du genre ellipse α et β ont donc le même signe; au contraire, dans les courbes du genre hyperbole on a $\alpha\beta < 0$.

Une forme quadratique pouvant d'ailleurs se décomposer d'une infinité de façons différentes en une somme de carrés, on peut dire, notamment, que la forme ternaire peut, d'une infinité de façons, être ramenée à la forme

$$\lambda P^2 + \mu Q^2 + \nu z^2.$$

Si l'on prend pour axes des coordonnées les droites Δ, Δ' qui correspondent aux équations :

$$(1) \quad P = 0, \quad Q = 0,$$

il résulte du raisonnement que nous venons de faire que l'on peut réduire l'équation d'une conique à centre, d'une *infinité* de façons, à la forme (U).

L'équation (U) ne renfermant pas de termes du premier degré, la nouvelle origine est un centre de la courbe; c'est un point unique, bien déterminé, par lequel passent toutes les droites analogues à Δ et à Δ', droites qui, étant prises pour axes de coordonnées, réduisent l'équation donnée à la forme (U). On peut encore observer qu'à une valeur de X correspondent pour Y deux valeurs égales et de signes contraires, et inversement. Les droites Δ, Δ', sont donc deux diamètres conjugués de la conique proposée.

201. Équation d'une conique rapportée à son centre et à ses axes. Les droites (1), que l'on met en évidence en décomposant en carrés la forme ternaire, ne sont pas, en général, des droites rectangulaires; nous nous proposons de montrer que l'on peut conserver la forme (U), mais en choisissant des axes rectangulaires.

Prenons pour nouvel axe OX', l'axe OX, quand il a tourné d'un angle arbitraire φ, et pour nouvel axe OY' la droite OX, quand elle a tourné, dans le même sens, de l'angle $\frac{\pi}{2} + \varphi$.

On a d'abord, par la projection des contours brisés sur OX' et sur OY',

$$X' = X \cos \varphi + Y \cos (\theta - \varphi),$$
$$Y' = Y \sin (\theta - \varphi) - X \sin \varphi.$$

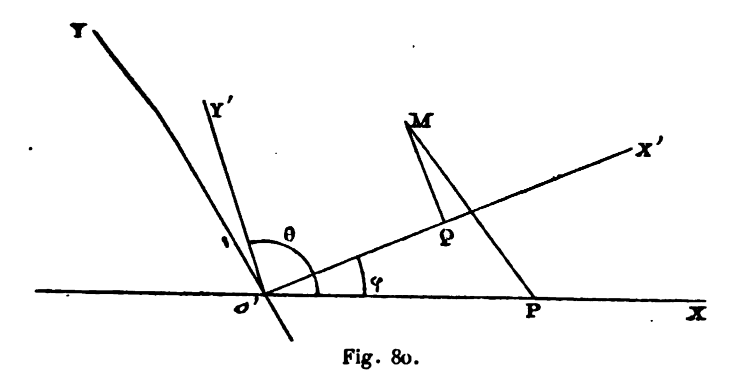


Fig. 80.

De ces formules, on déduit,

$$X \sin \theta = X' \sin (\theta - \varphi) - Y' \cos (\theta - \varphi),$$
$$Y \sin \theta = X' \sin \varphi + Y' \cos \varphi.$$

L'équation (U) devient alors :

$$\frac{1}{\alpha} \left\{ X' \sin (\theta - \varphi) - Y' \cos (\theta - \varphi) \right\}$$
$$+ \frac{1}{6} \left\{ X' \sin \varphi + Y' \cos \varphi \right\}^2 = \sin^2 \theta.$$

Disposons maintenant du paramètre φ de façon à faire disparaître le terme en X'Y', nous avons,

$$\frac{\text{Sin} (\theta - \varphi) \cos (\theta - \varphi)}{\alpha} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{6},$$

ou,

$$(1) \qquad \frac{\sin (2\theta - 2\varphi)}{\alpha} = \frac{\sin 2\varphi}{6}.$$

Cette formule donne pour φ un angle bien déterminé, dont la valeur, comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$, vérifie l'égalité :

$$\operatorname{cotg} 2\varphi = \frac{\frac{\alpha}{\beta} + \cos 2\theta}{\sin 2\theta}.$$

L'équation de la conique est alors de la forme,

$$(U') \quad \frac{X'^2}{\alpha'} + \frac{Y'^2}{\beta'} = 1,$$

en posant :

$$(2) \quad \frac{\sin^2 \theta}{\alpha'} = \frac{\sin^2 (\theta - \varphi)}{\alpha} + \frac{\sin^2 \varphi}{\beta},$$

$$(3) \quad \frac{\sin^2 \theta}{\beta'} = \frac{\cos^2 (\theta - \varphi)}{\alpha} + \frac{\cos^2 \varphi}{\beta}.$$

L'équation (U') représente alors la conique rapportée à son centre et à ses axes.

202. Calcul des axes; théorèmes d'Apollonius. Les formules (1), (2) et (3) que nous venons d'établir, prouvent qu'entre les paramètres α, β et θ, d'une part; α', β', d'autre part, il existe deux relations. Nous nous proposons de rechercher ces relations qui permettent de calculer la grandeur des axes d'une conique donnée.

Les égalités (2) et (3) donnent d'abord, par combinaison,

$$(4) \quad \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'}\right) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.$$

Ces mêmes égalités donnent encore :

$$\sin^2 \theta \left(\frac{1}{\beta'} - \frac{1}{\alpha'}\right) = \frac{\cos (2\theta - 2\varphi)}{\alpha} + \frac{\cos 2\varphi}{\beta}.$$

Nous avons aussi,

$$0 = \frac{\sin (2\theta - 2\varphi)}{\alpha} - \frac{\cos 2\varphi}{\beta}.$$

Ajoutons maintenant ces deux dernières égalités, membre à membre, après les avoir élevées au carré, et nous obtenons le résultat suivant :

$$(5) \quad \sin^4 \theta \left(\frac{1}{\alpha'^2} + \frac{1}{6'^2} - \frac{2}{\alpha' 6'}\right) = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{2 \cos 2\theta}{\alpha 6}.$$

Les relations (4) et (5) que nous venons de trouver sont susceptibles de simplifications remarquables.

Élevons (4) au carré et retranchons ensuite l'égalité obtenue et l'égalité (5), membre à membre, nous avons :

$$\frac{4 \sin^4 \theta}{\alpha' 6'} = \frac{2(1 - \cos 2\theta)}{\alpha 6},$$

ou,

$$(A) \quad \alpha' 6' = \alpha 6 \sin^2 \theta.$$

En tenant compte de cette relation, l'égalité (4) devient,

$$(B) \quad \alpha' + 6' = \alpha + 6.$$

Les relations (A) et (B) sont celles qui constituent les théorèmes d'Apollonius, et si l'on cherche à leur donner une interprétation géométrique, on est conduit aux énoncés suivants :

Théorème I. *La somme des carrés de deux diamètres conjugués est constante et égale à la somme des carrés des axes*

Théorème II. *Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués a une surface constante, égale à celle du rectangle construit sur les axes.*

203. Réduction dans le cas où l'on a : $A = 0$, $A' = 0$.
Nous avons supposé, dans les explications précédentes $A \neq 0$; si l'on a $A = 0$ et $A' \neq 0$, on pourra répéter les raisonnements et les calculs que nous avons produits, mais en permutant les lettres x et y. Il nous reste à examiner le cas particulier où l'on suppose, simultanément, $A = 0$ et $A' = 0$.

L'équation peut, dans ce cas particulier, s'écrire sous la forme :

$$xy + mx + ny + p = 0,$$

ou,

$$(x + n)(y + m) = mn - p,$$

ou, enfin,

$$(x + y + m + n)^2 - (x - y + n - m)^2 = 4(mn - p).$$

Les deux droites qui correspondent aux équations :

$$x + y + m + n = 0, \quad x - y + n - m = 0,$$

et qui sont parallèles aux bissectrices des axes de coordonnées, sont deux diamètres conjugués, rectangulaires; on a donc immédiatement les deux axes de la courbe.

204. Réduction dans le cas de la parabole. La méthode de décomposition en carrés prouve que l'on peut, d'une infinité de façons, ramener l'équation de la parabole à la forme :

$$(1) \quad P^2 = Q;$$

P et Q étant des fonctions linéaires d'x et d'y. Il y a donc une infinité d'axes par rapport auxquels l'équation de la parabole prend la forme suivante :

$$Y^2 = mX.$$

Nous allons montrer que parmi les équations (1) il y *en a* une pour laquelle les droites ($P = 0$, $Q = 0$) sont rectangulaires.

L'équation de la parabole peut d'abord se mettre sous la forme :

$$(Ax + B''y)^2 + A(2By + 2B'x + A'') = 0; \quad (A \neq 0).$$

et cette équation peut s'écrire

$$(Ax + B''y + \lambda)^2 + 2(AB - B''\lambda)y + 2(AB' - A\lambda)x + AA'' - \lambda^2 = 0.$$

Disposons maintenant du paramètre λ de façon que l'égalité,

$$(1)\quad \frac{A}{B''}\cdot\frac{AB'-A\lambda}{AB-B''\lambda}+1=0,$$

soit vérifiée ; les axes de coordonnées étant rectangulaires, les deux droites ayant pour équation, respectivement :

$$(2)\quad P=Ax+B''y+\lambda=0,$$
$$(3)\quad Q=2(AB-B''\lambda)y+2A(B'-\lambda)x+AA''-\lambda^2=0,$$

sont rectangulaires. C'est la transformation que nous voulions réaliser et en prenant pour axes de coordonnées les droites $P=0$, $Q=0$; l'équation de la parabole est ramenée à la forme.

$$(4)\quad Y^2=2pX$$

p désignant un coefficient sur le calcul duquel nous reviendrons dans la leçon suivante. Quand à la valeur de λ, c'est une quantité finie, et bien déterminée, qui se calcule au moyen de l'égalité :

$$(1')\quad \lambda=\frac{A(AB'+BB'')}{A^2+B''^2}.$$

Remarque. Lorsque A est nul, l'égalité :

$$AA'-B''^2=0,$$

prouve que, dans ce cas, B'' est nul. L'équation proposée est alors :

$$A'y^2+2By+2B'x+A''=0.$$

Si les axes sont rectangulaires, la réduction s'effectue en les transportant parallèlement à eux-mêmes ; si non, on doit d'abord, par une rotation de l'axe des y, autour de l'origine, transformer les axes obliques en axes rectangulaires. Les formules qui servent à cette transformation sont les suivantes :

$$Y=y\sin\theta,\quad X=x+y\cos\theta.$$

205. Equation en S. Les directions principales, dans les courbes du second ordre, se déterminent encore au moyen d'une équation du second degré, dite équation en S, que nous allons faire connaitre.

Soit α, β, les paramètres directeurs d'une corde principale; le diamètre conjugué a pour équation :

$$x(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}''\beta) + y(\mathrm{B}''\alpha + \mathrm{A}'\beta) + \mathrm{B}'\alpha + \mathrm{B}\beta = 0,$$

et cette droite sera perpendiculaire sur la direction de la corde conjuguée, si les paramètres α, β vérifient la relation :

$$(1)\quad 1 - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}''\beta}{\mathrm{B}''\alpha + \mathrm{A}'\beta} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}''\beta}{\mathrm{B}''\alpha + \mathrm{A}'\beta}\right)\cos\theta = 0.$$

Au lieu de résoudre cette équation du second degré, il est plus simple d'introduire une inconnue auxiliaire, comme nous allons le montrer.

Écrivons la relation (1) sous la forme suivante :

$$1 + \frac{\beta}{\alpha}\cos\theta = \frac{\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}''\beta}{\mathrm{B}''\alpha + \mathrm{A}'\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha} + \cos\theta\right),$$

ou, sous celle-ci,

$$(2)\quad \frac{\mathrm{B}''\alpha + \mathrm{A}'\beta}{\beta + \alpha\cos\theta} = \frac{\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}''\beta}{\alpha + \beta\cos\theta} = \mathrm{S},$$

S, désignant la valeur commune des deux rapports. Cette quantité S, est l'inconnue auxiliaire que nous avons annoncée. Pour trouver l'équation en S, remarquons que les relations (2) donnent, successivement,

$$\alpha(\mathrm{A} - \mathrm{S}) + \beta(\mathrm{B}'' - \mathrm{S}\cos\theta) = 0.$$
$$\alpha(\mathrm{B}'' - \mathrm{S}\cos\theta) + \alpha(\mathrm{A}' - \mathrm{S}) = 0.$$

Ces équations, linéaires et homogènes en α, β, étant vérifiées par des valeurs de α et de β qui, nous le savons, ne sont pas nulles à la fois, nous obtenons, pour déterminer S, l'équation :

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} - \mathrm{S} & \mathrm{B}'' - \mathrm{S}\cos\theta \\ \mathrm{B}'' - \mathrm{S}\cos\theta & \mathrm{A}' - \mathrm{S} \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le déterminant du premier membre, l'équation en S s'écrit :

$$S^2 \sin^2\theta - (A + A' - 2B'' \cos\theta) S + AA' - B''^2 = 0.$$

Il est facile de vérifier que cette équation a ses racines réelles. Nous n'insisterons pas sur ce point, ni sur quelques autres qui se rattachent à cette équation remarquable, parce que nous aurons, dans la géométrie analytique à trois dimensions, l'occasion de revenir sur cette question algébrique. On trouvera d'ailleurs, dans la leçon suivante, une interprétation géométrique des racines de l'équation en S.

Pour le moment, nous dirons seulement comment on peut déterminer les directions principales, sans avoir recours à l'équation en S.

Joignons l'origine au point directeur, α, β, de la direction principale ; et désignons par φ l'angle que fait cette semi-droite avec Ox ; nous avons :

$$\frac{\beta}{\sin\varphi} = \frac{\alpha}{\sin(\theta - \varphi)},$$

ou

$$\frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{tg}\varphi \sin\theta - \cos\theta.$$

En portant cette expression de $\frac{\alpha}{\beta}$ dans l'égalité (2), nous obtenons, pour déterminer $\operatorname{tg}\varphi$, l'équation :

$$\text{(P)}\quad \operatorname{tg}^2\varphi \sin\theta\,(B'' - A\cos\theta) + \operatorname{tg}\varphi\,(A' + A\cos 2\theta - 2B''\cos\theta) - \sin\theta\,(B'' - A\cos\theta) = 0.$$

Cette équation du second degré a deux racines réelles, dont le produit est égal à -1. Ce résultat prouve qu'il y a toujours deux directions principales, lesquelles sont réelles et rectangulaires. On voit aussi que la valeur de $\operatorname{tg}\varphi$ n'est indéterminée que si l'on suppose, en même temps, $A\cos\theta = B''$ et

$A = A'$. Dans ce cas, la courbe qui correspond à l'équation proposée est une circonférence ; et l'indétermination que nous rencontrons trouve son explication naturelle.

Nous ferons remarquer encore que dans le cas où les axes sont rectangulaires, l'équation (P) devient :

$$B'' \operatorname{tg}^2 \varphi + (A' - A) \operatorname{tg} \varphi - B'' = 0 ;$$

et comme nous avons :

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

nous obtenons la relation remarquable,

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2B''}{A' - A}.$$

Lorsque les axes sont parallèles aux axes de coordonnées, on a $\varphi = 0$, et, par suite, $B'' = 0$. La réciproque est vraie; l'hypothèse : $B'' = 0$, entraine la conclusion $\varphi = 0$. Ainsi : *Lorsque les axes d'une conique sont parallèles aux axes de coordonnées, le terme en xy n'existe pas dans l'équation de la conique ; et réciproquement.*

EXERCICES

1. *On considère un angle droit yox, et deux droites Δ, Δ', mobiles autour de l'origine et symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle yox ; d'un point fixe A, placé sur ox, on abaisse une perpendiculaire AP, sur Δ ; enfin, d'un autre point fixe B, situé sur oy, on abaisse sur Δ', une perpendiculaire BQ : on propose de trouver le lieu décrit par le milieu de PQ.*

En posant :

$$OA = a, \quad OB = b,$$

le résultat se présente sous la forme :

$$(4ax - 4by + b^2 - a^2)^2 + 16(ay - bx)^2 = (a^2 - b^2)^2,$$

on voit que le lieu est une ellipse dont le centre est à l'intersection des droites qui correspondent aux équations :

$$4ax - 4by + b^2 - a^2 = 0, \quad ay - bx = 0\,;$$

c'est-à-dire au point dont les coordonnées sont $x = \frac{a}{4}, y = \frac{b}{4}$. Les directions principales sont celles des bissectrices. Enfin, en appliquant la méthode pour la réduction de l'équation, on trouve que l'ellipse trouvée, rapportée à son centre et à ses axes, a pour équation :

$$\frac{X^2}{\left(\frac{a+b}{4}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{a-b}{4}\right)^2} = 1.$$

2. *Démontrer que si φ désigne l'angle d'une direction principale avec ox, θ représentant, comme toujours, l'angle des axes, on a :*

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2 \sin \theta \frac{B'' - A \cos \theta}{A' + A \cos 2\theta - 2B'' \cos \theta}$$

On prend, pour point de départ, l'équation (P), (§ 205), et on utilise les formules connues :

$$1 + \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi, \quad 1 - \cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi, \quad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

3. *Réduire l'équation :*

$$x^2(6\lambda^2 + 1) + y^2(\lambda^2 + 6) + 10\lambda xy - 2x(6\lambda^2 + 5\lambda + 1)$$
$$- 2y(\lambda^2 + 5\lambda + 6) + 6\lambda^2 + 10\lambda + 6 = 0.$$

On voit d'abord que les coordonnées du centre sont $x = y = 1$; on trouve ensuite $\operatorname{tg} \varphi = \lambda$, et l'équation cherchée est, finalement,

$$X^2 + 6Y^2 = 1.$$

VINGT ET UNIÈME LEÇON

LES INVARIANTS

206. Définition des invariants[1]. Soit une forme quadratique U, des lettres x, y, z,

$$U = f(x, y, z).$$

Si l'on effectue une transformation algébrique de cette forme au moyen des formules suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z, \\ y &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z, \\ z &= Z = 1\,; \end{aligned}$$

et si une certaine fonction des coefficients, et de l'angle θ des coordonnées, conserve la même valeur, après la transformation, quels que soient les paramètres $\alpha, \alpha', \alpha''; \beta, \beta', \beta''$; on dit que cette fonction est un *invariant de la forme proposée.*

1. On a donné pour les invariants, des définitions diverses; celle que nous adoptons ici n'est pas aussi générale que celle que l'on propose ordinairement dans l'étude des formes algébriques ; mais elle suffit aux développements que nous avons en vue et elle nous paraît correspondre nettement à l'idée que l'on doit se faire, dans la géométrie analytique cartésienne, de la propriété de l'invariance.

207. Théorème I. *Lorsqu'on passe d'un système yox, d'angle* θ, *à un système* YO'X, *d'angle* θ'; *les fonctions* :

$$\rho = \frac{AA' - B''^2}{\sin^2\theta}, \quad \sigma = \frac{A + A' - 2B''\cos\theta}{\sin^2\theta};$$

jouissent de la propriété de l'invariance: A, A', B'', *représentant les coefficients des termes en* x^2 *en* y^2 *et en* xy, *dans la forme ternaire.*

Pour passer du système *yox* au système YO'X on peut imaginer que l'on effectue d'abord un transport des axes *ox, oy*, parallèlement à eux-mêmes; puis, cette première transformation une fois produite, qu'on fasse une rotation des axes transportés, autour de la nouvelle origine O'. Le premier calcul ne modifie pas les termes du second degré et nous avons seulement à reconnaître, pour établir le théorème en question, que les fonctions ρ et σ sont *invariantes* quand on change les axes, en conservant l'origine.

Posons :

$$u = Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy,$$

et,

$$v = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta.$$

Nous avons :

$$\text{(A)} \quad \lambda u + \mu v = (\lambda A + \mu)x^2 + (\lambda A' + \mu)y^2 + 2(\lambda B'' + \mu\cos\theta)xy.$$

Si nous effectuons un changement de coordonnées autour de l'origine, les formules de transformation sont :

$$x = \alpha X + \alpha' Y,$$
$$y = \beta X + \beta' Y;$$

et les fonctions u et v, prennent des formes nouvelles U, V qui sont quadratiques et homogènes par rapport aux lettres X, Y. Nous pouvons donc poser :

$$U = aX^2 + a'Y^2 + 2b''XY,$$
$$V = X^2 + Y^2 + 2XY\cos\theta'.$$

Cette dernière égalité a déjà été établie précédemment (§ 50). Disposons maintenant des paramètres λ, μ de façon que le second membre de (A) soit un carré parfait. Nous avons alors à vérifier l'égalité :

$$(\lambda B'' + \mu \cos\theta)^2 = (\lambda A + \mu)(\lambda A' + \mu),$$

ou la suivante,

$$(B) \quad \lambda^2(AA' - B''^2) + \lambda\mu(A + A' - 2B''\cos\theta) + \mu^2 \sin^2\theta = 0.$$

D'ailleurs, l'identité,

$$\lambda u + \mu v \equiv \lambda U + \mu V,$$

prouve que si λ et μ sont des racines de l'équation (B), $\lambda U + \mu V$ est un carré parfait. Il résulte de là que si dans (B), on change θ en θ', et, respectivement, A, A', B''; en a, a', b''; cette équation admet les mêmes racines pour λ et μ. On a donc,

$$\frac{AA' - B''^2}{aa' - b''^2} = \frac{A + A' - 2B''\cos\theta}{a + a' - 2b''\cos\theta'} = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta'}.$$

Les fonctions :

$$\frac{AA' - B''^2}{\sin^2\theta}, \quad \frac{A + A' - 2B''\cos\theta}{\sin^2\theta};$$

sont donc des invariants quand on passe du système yox, à un autre système quelconque $YO'X$.

208. Théorème II. *Le rapport* $\tau = \frac{\Delta}{\sin^2\theta}$, *du discriminant de l'équation d'une conique, au carré du sinus de l'angle des axes, est une fonction invariante, quand on passe d'un système d'axes, à un autre système.*

Soit : $U = 0$,

$$U \equiv Ax^2 + A'y + 2B''xy + 2Byz + 2B'x.z + A''z^2,$$

l'équation d'une conique dans le système yox. Effectuons

une transformation de coordonnées pour passer au nouveau système Yo′X. Les coordonnées qui servent à cette transformation sont (§ 46 et 47),

$$(T) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z, \\ y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z. \end{cases}$$

L'équation proposée devient : $U_1 = 0$,

$$U_1 \equiv aX^2 + a'Y^2 + 2b''XY + 2bYZ + 2b'XZ + a''Z^2,$$

et l'on a $U_1 \equiv U$, si l'on suppose que l'on remplace dans le second membre x et y au moyen des formules (T).

Considérons maintenant un cercle C, de rayon R, et soit $V = 0$,

$$V \equiv x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta + 2Mxz + 2Nyz + Pz^2,$$

son équation dans le système yox. Après la transformation, V devient V_1, en posant :

$$V_1 \equiv X^2 + Y^2 + 2XY \cos \theta' + 2mXZ + 2nYZ + pZ^2.$$

Nous nous appuyons encore ici sur la remarque que nous avons rappelée dans le paragraphe précédent et en vertu de laquelle, la forme :

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta$$

devient identiquement, après la transformation,

$$X^2 + Y^2 + 2XY \cos \theta'.$$

Des identités :

$$U \equiv U_1, \quad V \equiv V_1,$$

on déduit,

$$(1) \quad \lambda U + \mu V \equiv \lambda U_1 + \mu V_1$$

Disposons maintenant des paramètres λ et μ de façon que la forme ternaire du premier membre de cette identité soit la somme de deux carrés. En écrivant que son discriminant est nul, nous avons l'équation :

$$\begin{vmatrix} A\lambda + \mu & B''\lambda + \mu \cos\theta & B'\lambda + N\mu \\ B''\lambda + \mu\cos\theta & A'\lambda + \mu & B\lambda + M\mu \\ B'\lambda + N\mu & B\lambda + \mu M & A''\lambda + P\mu \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant nous obtenons la relation suivante :

$$(2) \quad \Delta\lambda^3 + F\lambda^2\mu + G\mu^2\lambda + \Delta_0\mu^3 = 0,$$

dans laquelle Δ désigne le discriminant de la forme U, et Δ_0 celui de V. Nous rappelons ici que l'on a, par une formule connue (§ 89),

$$R^2 \sin\theta + \Delta_0 = 0.$$

Formons maintenant le discriminant de la forme $\lambda U_1 + \mu V_1$, nous obtenons, entre λ et μ, la relation :

$$(3) \quad \Delta'\lambda^3 + F'\lambda^2\mu + G'\mu^2\lambda + \Delta'_0\mu^3 = 0.$$

D'ailleurs les équations (2) et (3) doivent avoir les mêmes solutions; ceci résulte de l'identité (1), les deux membres de cette identité devenant une somme de deux carrés pour les mêmes valeurs de λ et de μ.

Nous déduisons, de cette remarque,

$$(4) \quad \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\Delta_0}{\Delta'_0}.$$

D'autre part (§ 89), les égalités :

$$R^2 \sin^2\theta + \Delta_0 = 0, \quad R^2 \sin^2\theta' + \Delta'_0 = 0;$$

donnent,

$$(5) \quad \frac{\Delta_0}{\Delta'_0} = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta'}.$$

Nous avons donc, par comparaison des égalités (4) et (5),

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta'};$$

ou, enfin,

$$\frac{\Delta}{\sin^2\theta}=\frac{\Delta}{\sin^2\theta'}.$$

Remarque. On peut objecter à la démonstration précédente que deux équations du troisième degré peuvent s'annuler pour les mêmes valeurs de x, sans être identiques et sans avoir, par conséquent, les coefficients proportionnels. En effet, il suffit d'imaginer que la première équation ayant pour racine double x', et pour racine simple x'', l'autre ait pour racine double x'', et pour racine simple x'.

Mais cette circonstance particulière, exigeant que les équations (2) et (3) aient des racines multiples, ne peut avoir lieu pour tous les cercles C, les paramètres M, N, P étant arbitraires.

APPLICATIONS DES INVARIANTS.

209. Équation aux carrés des longueurs des demi-axes. Nous avons vu plus haut (§ 201), que dans les coniques à centre, l'équation :

$$(1)\quad Ax^2+A'y^2+2B''xy+2By+2B'x+A''=0,$$

pouvait toujours être réduite à la forme,

$$(2)\quad MX^2+NY^2-P=0;$$

les nouveaux axes étant rectangulaires. Cette transformation peut se faire par les formules :

$$x=\alpha X+\alpha' Y+\alpha'',$$
$$y=\beta X+\beta' Y+\beta'',$$

et l'on peut, par conséquent, appliquer aux équations (1) et (2) les théorèmes précédents. On trouve ainsi :

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} M+N=\dfrac{A+A'-2B''\cos\theta}{\sin^2\theta}=\sigma, \\ MN=\dfrac{\delta}{\sin^2\theta}=\rho, \\ -MNP=\dfrac{\Delta}{\sin^2\theta}=\tau. \end{cases}$$

Les carrés des demi-axes ont pour valeur, d'après l'équation (2), $\frac{P}{M}$ et $\frac{P}{N}$; par suite, l'équation qui donne ces longueurs est :

$$Z^2-\frac{P(M+N)}{MN}Z+\frac{P^2}{MN}=0.$$

Les égalités (I) donnent pour P la valeur $-\frac{\Delta}{\delta}$, et l'on a, finalement,

$$(\mathrm{A})\quad Z^2+\frac{A+A'-2B''\cos\theta}{\delta^2}\Delta Z+\frac{\Delta^2\sin^2\theta}{\delta^3}=0,$$

ou,

$$Z^2+\frac{\sigma\tau}{\rho^2}Z+\frac{\tau^2}{\rho^3}=0.$$

C'est l'équation que nous voulions obtenir.

210. Calcul du paramètre de la parabole. Si l'équation (1) représente une parabole, nous savons que, par une transformation linéaire, on peut toujours ramener son équation à la forme :

$$mY^2-2nX=0.$$

La forme de la courbe dépend seulement de la valeur du rapport $\frac{n}{m}$; c'est ce nombre qui détermine la forme de la courbe. Nous poserons $p=\frac{n}{m}$, p est nommé le *paramètre de la parabole* ; nous nous proposons de le calculer.

Les invariants donnent les relations :

$$(\mathrm{J})\quad \left\{\begin{aligned} m &= \frac{\mathrm{A}+\mathrm{A}'-2\mathrm{B}''\cos\theta}{\sin^2\theta}\\ -mn^2 &= \frac{\Delta}{\sin^2\theta} \end{aligned}\right.$$

et l'on a, par suite,

$$(\mathrm{A}')\quad p^2 = \frac{\Delta\sin^4\theta}{(2\mathrm{B}''\cos\theta-\mathrm{A}-\mathrm{A}')^3} = \frac{-\tau}{\sigma^3}.$$

211. Invariants absolus. Pour appliquer les théorèmes sur les invariants, on doit bien observer que la nouvelle équation a été obtenue : 1° en effectuant la substitution linéaire, 2° en calculant les nouveaux coefficients des termes en X^2, Y^2, etc... C'est dans ces conditions, bien déterminées, que les formes algébriques que nous avons signalées, ont la propriété de l'invariance.

Soit $f(x,y,z)=0$ l'équation de la conique proposée dans le système yox, et soit $F(X,Y,Z)=0$ l'équation de cette même conique, dans le nouveau système. On appelle **invariants absolus**, ou encore, **invariants de courbe** *des fonctions de coefficients qui conservent la même valeur, quand on considère les équations de la même courbe, dans deux systèmes d'axes différents.*

Dans le cas des coniques à centre, les coefficients de l'équation (A) sont, pour une raison évidente, des invariants absolus. Dans le cas de la parabole, δ, et $\dfrac{\Delta\sin^4\theta}{(2\mathrm{B}''\cos\theta-\mathrm{A}-\mathrm{A}')^3}$, sont aussi des invariants absolus.

212. Similitude de deux courbes du second ordre. Deux paraboles sont toujours semblables, puisque, en déplaçant l'une d'elles on peut toujours lui donner le même axe et le même sommet que l'autre. Dans ces conditions, les deux courbes ayant pour équation, respectivement,

$$y^2-2px=0,\quad y^2-2p'x=0,$$

nous savons qu'elles sont homothétiques (§ 189).

Nous nous proposons de chercher la condition que doivent vérifier les coefficients des deux équations :

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'' = 0,$$
$$ax^2 + a'y^2 + 2b''xy + 2by + 2b'x + a'' = 0,$$

pour que les coniques qui leur correspondent soient semblables.

Il suffit d'exprimer que le rapport des carrés des axes est le même pour les deux courbes. On voit d'ailleurs, facilement, que si deux équations :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,$$
$$\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma' = 0;$$

sont telles que le rapport des racines de la première soit égal au rapport des racines de la seconde, on a :

$$\frac{\beta^2}{\alpha\gamma} = \frac{\beta'^2}{\alpha'\gamma'}.$$

En appliquant cette relation aux coefficients des équations qui font connaître les longueurs des carrés des demi-axes des deux coniques données, on trouve la condition :

$$\frac{(A + A' - 2B''\cos\theta)^2}{AA' - B''^2} = \frac{(a + a' - 2b''\cos\theta)^2}{aa' - b''^2}.$$

Nous allons donner une interprétation géométrique de cette égalité. Les directions asymptotiques des courbes du second ordre sont celles des droites qui correspondent à l'équation :

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy = 0.$$

Si nous désignons par V l'angle de ces droites, nous avons, par application d'une formule connue (§ 60),

$$\operatorname{Tg} V = \pm \frac{2\sin\theta\sqrt{B''^2 - AA'}}{A + A' - 2B''\cos\theta}.$$

En rapprochant cette formule de la relation trouvée au

paragraphe précédent nous voyons que la condition qui exprime que deux coniques sont semblables est susceptible de cette interprétation géométrique : *deux coniques sont semblables lorsque les angles formés par deux droites parallèles à leurs directions asymptotiques sont deux figures superposables.*

Cet énoncé sous-entend que l'on accepte une expression imaginaire pour le rapport d'homothétie de deux coniques.

213. Théorèmes d'Apollonius (2e *démonstration*). On peut encore déduire des invariants une démonstration très simple des théorèmes d'Apollonius.

Soit,

$$(1) \quad mX^2 + nY^2 - p = 0,$$

l'équation d'une conique à centre rapportée à ses axes; et soit,

$$(2) \quad m'X'^2 + n'Y'^2 - p' = 0,$$

l'équation de cette même conique rapportée à deux diamètres conjugués. On peut passer du système (1) au système (2) par une transformation linéaire, au moyen des formules :

$$X = \alpha X' + \alpha' Y',$$
$$Y = \beta X' + \beta' Y'.$$

On a d'abord $p = p'$, et l'on peut appliquer aux coefficients $m, n; m' n'$; le théorème I. On obtient ainsi les égalités :

$$m + n = \frac{m' + n'}{\sin^2\theta'},$$
$$mn = \frac{m'n'}{\sin^2\theta'}.$$

Ces relations donnent les suivantes :

$$\frac{p}{m} + \frac{p}{n} = \frac{p}{m'} + \frac{p}{n'},$$
$$\frac{p^2}{mn} = \frac{p^2}{m'n'}\sin^2\theta'.$$

Ces égalités sont, précisément, celles que nous avons trouvées plus haut (§ 202), et qui conduisent, comme on l'a vu, aux théorèmes d'Apollonius.

214. Théorème. *Lorsqu'on effectue une transformation de coordonnées, pour rapporter une courbe du second ordre à son centre et à ses axes, l'équation réduite est :*

$$S'X^2 + S''Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

S', S'' *désignant les racines de l'équation en* S.

Nous avons vu que l'équation réduite des coniques, rapportées à leur centre et à leurs axes, était (§ 209),

$$mX^2 + nY^2 - p = 0,$$

et que les coefficients $m\ n\ p$, vérifiaient les relations :

$$m + n = \frac{A + A' - 2B''\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

$$mn = \frac{\delta}{\sin^2\theta},$$

$$-mnp = \frac{\Delta}{\sin^2\theta},$$

ces deux dernières donnent, par combinaison, et comme nous l'avons déjà fait remarquer, au paragraphe cité,

$$-p = \frac{\Delta}{\delta}.$$

D'autre part, l'équation en S étant (§ 205),

$$S^2 \sin^2\theta - (A + A' - 2B''\cos\theta)\, S + AA' - B''^2 = 0;$$

on a ;

$$S' + S'' = \frac{A + A' - 2B''\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

$$S'S'' = \frac{AA' - B''^2}{\sin^2\theta};$$

et, par suite,

$$S' + S'' = m + n,$$
$$S'S'' = mn.$$

Ainsi on a : $S' = m$, $S'' = n$, et $-p = \frac{\Delta}{\delta}$; l'équation réduite est donc, finalement,

$$S'X^2 + S''Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

EXERCICES

1. *Démontrer que si une corde* AB *d'une conique est vue du centre* O *sous un angle droit, la distance du centre à la droite* AB *est constante.*

On peut reconnaître cette propriété en remarquant que l'on a $\frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} = A + A'$; $A + A'$ étant un invariant, $\frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2}$ a une valeur fixe.

2. *Exprimer que les deux droites qui ont, respectivement, pour équation :*

$$U = ax + by + cz = 0,$$
$$V = a'x + b'y + c'z = 0,$$

se coupent sur la conique qui correspond à l'équation :

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'' = 0.$$

On peut trouver la condition demandée sous la forme d'un déterminant en remarquant que la forme quadratique φ :

$$\varphi = f(x, y, z) + uU + vV,$$

entre les lettres x, y, z, u, v ; a un discriminant nul.

On a, en effet,

$$\varphi'_x = f'_x + ua + va'$$
$$\varphi'_y = f'_y + ub + vb'$$
$$\varphi'_z = f'_z + uc + vc'$$
$$\varphi'_u = ax + by + cz$$
$$\varphi'_v = a'x + b'y + c'z.$$

D'autre part, l'identité d'Euler,

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z = 2 f(x, y, z)$$

prouve que si les équations :

$$f(x, y, z) = 0, \quad U = 0, \quad V = 0,$$

ont une solution commune x, y, z, on a

$$x\varphi'_x + y\varphi'_y + z\varphi'_z + u\varphi'_u + v\varphi'_v = 0.$$

Les équations, linéaires et homogènes,

$$\varphi'_x = 0, \quad \varphi'_y = 0, \quad \varphi'_z = 0, \quad \varphi'_u = 0, \quad \varphi'_v = 0\,;$$

admettent donc une solution non nulle; le déterminant de ces équations est donc nul.

En désignant par Δ le discriminant de l'équation de la conique, le résultat cherché peut s'écrire :

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} & & & a & a' \\ & \Delta & & b & b' \\ & & & c & c' \\ \hline a & b & c & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & 0 & 0 \end{array}\right| = 0.$$

VINGT-DEUXIÈME LEÇON

ÉQUATION GÉNÉRALE DES CONIQUES
FORMULES DIVERSES

215. Rappel de formules trouvées. L'équation générale des courbes du second ordre étant $f(x, y, z) = 0$;

$$f(x,y,z) = Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'',$$

nous nous proposons de trouver, d'après cette équation, quelques propriétés de ces courbes, nous réservant de les étudier ensuite plus particulièrement, au moyen des équations réduites établies précédemment. Nous rappellerons d'abord quelques formules que nous avons déjà démontrées.

1° Tangente. Les coordonnées du point de contact étant x_0, y_0, z_0; l'équation de la tangente est,

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0,$$

ou, (§ 98)

$$x_0f'_x + y_0f'_y + z_0f'_z = 0.$$

2° Polaire. En désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du pôle, l'équation de la polaire est, comme celle de la tangente,

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0,$$

ou, (§ 121)

$$x_0f'_x + y_0f'_y + z_0f'_z = 0.$$

3° Faisceau des tangentes. D'un point dont les coordon-

données sont x_0, y_0, z_0, partent deux tangentes ; l'ensemble de ces deux droites a pour équation :

$$\left(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0}\right)^2 = 4f(x_0, y_0, z_0)\,f(x, y, z). \qquad (\S\ 125)$$

4° Directions asymptotiques. Si l'on désigne par c le coefficient angulaire d'une de ces directions, c est racine de l'équation :

$$A'c^2 + 2B''c + A = 0. \qquad (\S\ 143)$$

5° Hyperbole équilatère. Pour qu'une courbe du second ordre soit une hyperbole équilatère, il faut et il suffit que les deux droites qui correspondent à l'équation :

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy = 0,$$

soient rectangulaires. La condition cherchée est donc :

$$A + A' - 2B'' \cos\theta = 0. \qquad (\S\ 60)$$

6° Faisceau des asymptotes. L'ensemble des deux asymptotes est donnée par l'équation :

$$Af'^2_y + A'f'^2_x - 2B''f'_xf'_y = 0. \qquad (\S\ 143)$$

On peut aussi prendre pour l'ensemble des deux asymptotes l'équation :

$$f(x, y) - \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Cette seconde forme peut se déduire de la précédente ; on l'obtient aussi, soit en considérant les asymptotes comme étant constituées par le faisceau des tangentes issues du centre ; soit aussi en appliquant l'identité (c) (§ 196). Cette identité donne, en supposant $A \neq 0$,

$$f(x, y) - \frac{\Delta}{\delta} = \frac{1}{A}\left(P^2 + \frac{Q^2}{\delta}\right);$$

P et Q étant des fonctions linéaires. Si δ est négatif, le second

membre est décomposable en deux facteurs et l'on peut écrire,

$$f(x,y) = UV + \frac{\Delta}{\delta}.$$

En appliquant un théorème précédent (§ 155), on voit que les asymptotes sont les droites *non parallèles*, qui ont pour équation : l'une $U = 0$, l'autre $V = 0$. Ainsi : *l'ensemble des asymptotes s'obtient en retranchant, de l'équation proposée, le rapport* $\frac{\Delta}{\delta}$.

7° Centre. Lorsque δ est différent de zéro, la conique proposée a un centre qui est au point de concours des droites qui correspondent aux équations

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0. \qquad (\S\ 177)$$

Les coordonnées de ce point peuvent se calculer par les formules suivantes :

$$x = \frac{BB'' - A'B'}{AA' - B''^2} = \frac{b'}{a''}, \quad y = \frac{B'B'' - AB}{AA' - B''^2} = \frac{b}{a''}. \quad (\S\ 177)$$

8° Diamètre. En désignant par α, β les coordonnées d'un point fixe P, le diamètre, lieu des milieux des cordes parallèles à la droite qui joint l'origine au point P, a pour équation :

$$\alpha f'_x + \beta f'_y = 0. \qquad (\S\ 182)$$

9° Directions conjuguées. Si l'on désigne par m et m' les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués, on a :

$$A'mm' + B''(m + m') + A = 0. \qquad (\S\ 184)$$

10° Diamètres conjugués. L'équation qui donne l'ensemble de deux diamètres étant :

$$(f'_x + mf'_y)(f'_x + m'f'_y) = 0,$$

ou,

$$f'^2_x + (m+m')f'_x f'_y + mm'f'^2_y = 0\,;$$

Si ces diamètres sont conjugués les] paramètres m et m' doivent vérifier la relation :

$$A'mm' + B''(m+m') + A = 0.$$

Ces deux égalités donnent, par combinaison,

$$B''f'^2_x - (A+A'\lambda)f'_x f'_y + B''\lambda f'^2_y = 0.$$

Dans cette équation, on doit considérer λ comme un paramètre arbitraire représentant le produit des coefficients angulaires des deux diamètres conjugués qui lui correspondent.

11° Grandeur des axes. En supposant $\delta \neq 0$, les carrés des longueurs des demi-axes sont les deux racines de l'équation :

$$Z^2 + \frac{A+A'-2B''\cos\theta}{\delta^2}\Delta Z + \frac{\Delta^2\sin^2\theta}{\delta^3} = 0. \qquad (\S\ 208)$$

12° Paramètre de la parabole. Lorsque l'on a $\delta = 0$, le paramètre de la parabole peut se calculer par la formule :

$$p^2 = \frac{\Delta}{(2B''\cos\theta - A - A')^3\sin^2\theta}. \quad (\S\ 209)$$

Nous allons maintenant ajouter, à ces formules, quelques résultats nouveaux.

216. Directions principales. Les directions principales, comme nous l'avons déjà dit, sont celles qui jouissent de la double propriété d'être conjuguées et rectangulaires.

En désignant par m et m' les coefficients angulaires des directions principales, on a :

$$A'mm' + B''(m+m') + A = 0,$$
$$mm' + (m+m')\cos\theta + 1 = 0.$$

Si l'on écarte le cas du cercle, celui où l'on a :

$$\frac{A'}{1} = \frac{B''}{\cos\theta} = \frac{A}{1},$$

ces égalités donnent :

$$m + m' = \frac{A - A'}{A'\cos\theta - B''}, \quad mm' = \frac{B'' - A\cos\theta}{A'\cos\theta - B''}.$$

On peut donc considérer les directions principales comme étant les racines de l'équation du second degré,

$$\text{(A)} \quad M^2(A'\cos\theta - B'') + (A' - A)M + B'' - A\cos\theta = 0.$$

Il est facile de reconnaître que cette équation a ses racines réelles : et que, par suite, comme nous l'avons déjà vérifié (§ 205), il y a dans les coniques deux directions principales réelles. Formons, à cet effet, la fonction caractéristique U :

$$U = (A' - A)^2 + 4(B'' - A'\cos\theta)(B'' - A\cos\theta).$$

Nous avons d'abord,

$$U = 4B''^2 - 4B''\cos\theta(A + A') + (A - A')^2 + 4AA'\cos^2\theta;$$

puis,

$$U = \left\{ 2B'' - (A + A')\cos\theta \right\}^2 + (A - A')^2 - (A + A')^2\cos^2\theta + 4AA'\cos^2\theta;$$

ou, enfin,

$$U = \left\{ 2B'' - (A + A')\cos\theta \right\}^2 + (A - A')^2\sin^2\theta.$$

Cette identité prouve que U est une quantité toujours positive et qui ne peut prendre la valeur zéro que si l'on suppose : $A = A' = \frac{B''}{\cos\theta}$. Mais, dans ce cas particulier, la conique proposée est une circonférence ; en même temps, on voit que l'équation (A) se réduit à une identité et ce résultat s'explique en observant qu'il y a, en effet, dans le cercle, une infinité de directions principales.

217. Équation quadratique des axes. D'après la définition donnée précédemment pour les axes (§ 185), l'axe d'une conique est le diamètre conjugué des cordes parallèles à une direction principale.

Soient α, β les paramètres qui définissent une direction principale. Ces paramètres vérifient la relation :

$$(1) \quad \beta^2(A'\cos\theta - B'') + \alpha\beta(A' - A) + \alpha^2(B'' - A\cos\theta) = 0.$$

Le diamètre correspondant a pour équation :

$$(2) \quad \alpha f'_x + \beta f'_y = 0.$$

Désignons par x, y les coordonnées d'un point quelconque pris sur l'un des axes, les égalités (1) et (2) seront vérifiées, simultanément, par les nombres α, β ; x, y ; nous pouvons donc dire que x, y, vérifient aussi l'égalité suivante :

$$f'^2_x(A'\cos\theta - B'') + f'_x f'_y(A - A') + f'^2_y(B'' - A\cos\theta) = 0.$$

Dans le cas des coniques ayant un centre, cette équation du second degré représente l'ensemble des deux axes.

Nous allons examiner, dans le paragraphe suivant, le cas particulier, et remarquable, de la parabole.

218. Équation de l'axe de la parabole. Lorsqu'on suppose $AA' = B''^2$, l'équation (A), (§ 213), se décompose rationnellement en deux facteurs. On trouve, en effet,

$$U = (2B''\cos\theta - A - A')^2 ;$$

par suite, l'équation (A) donne pour M deux racines qui sont :

$$M' = \frac{B''\cos\theta - A'}{A'\cos\theta - B''}, \quad M'' = \frac{A - B''\cos\theta}{A'\cos\theta - B''}.$$

Considérons d'abord la racine M'' ; la valeur de M'' est toujours bien déterminée, même quand on suppose que l'on a :

$$A = B''\cos\theta, \quad \text{et,} \quad B'' = A'\cos\theta$$

En effet, l'équation (A) prouve que dans l'hypothèse où nous nous plaçons, l'une des racines M' devient infinie et que la seconde racine M'' a pour valeur $-\cos\theta$. Le diamètre qui correspond aux cordes dont le coefficient angulaire est M'' a pour équation :

$$(Ax+B''y+B')(A'\cos\theta-B'')+(B''x+A'y+B)(A-B''\cos\theta)=0.$$

En développant les calculs, on voit que cette relation se réduit à la suivante :

$$AB-B'B''+\cos\theta(A'B'-BB'')=0.$$

En remarquant que $B''=\frac{AA'}{B''}$, cette égalité peut s'écrire sous la forme :

$$(1)\quad (AB-B'B'')(A'\cos\theta-B'')=0.$$

On peut maintenant distinguer deux cas selon que l'on a :

$$A'\cos\theta-B''\neq 0,\quad \text{ou}\quad A'\cos\theta-B''=0.$$

Dans la première hypothèse, l'égalité (1) se réduit à la suivante :

$$AB-B'B''=0,$$

et comme l'on a, dans le cas de la parabole,

$$-A\Delta=(AB-B'B'')^2,$$

on voit que le diamètre qui correspond à la direction M'' est *rejeté à l'infini* si Δ n'est pas nul, c'est à dire si la conique proposée est une vraie parabole. Ce résultat s'explique en observant que M'' est le coefficient angulaire des cordes parallèles à la direction singulière de la courbe. Si l'on suppose, au contraire, $\Delta=0$; le diamètre correspondant à la direction considérée est *indéterminé*. Cette conclusion trouve son explication dans ce fait que la courbe proposée est constituée par un système de deux droites parallèles et que la direction donnée est précisément celle de ces droites : or l'on peut

considérer une perpendiculaire quelconque à deux droites parallèles, comme un axe de symétrie de ce système. De là l'indétermination signalée par l'analyse.

Si nous supposons maintenant que l'on ait : $A'\cos\theta - B'' = 0$; comme $B''^2 = AA'$, on a, aussi, $B''\cos\theta - A = 0$: la valeur de M'' se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, mais, comme nous l'avons déjà remarqué tout à l'heure, cette indétermination n'est qu'apparente, et la valeur de M'' est $-\cos\theta$. Le diamètre correspondant a pour équation :

$$Ax + B''y + B' - \cos\theta\,(B''x + A'y + B) = 0,$$

ou, après réduction,

$$B' - B\cos\theta = 0.$$

Le premier membre de cette égalité ne peut être nul, dans l'hypothèse présente, que si l'on a $AB - B'B'' = 0$, et, par suite, $\Delta = 0$.

En résumé, le diamètre qui correspond à la racine M'' est toujours rejeté à l'infini, lorsque la courbe proposée est une vraie parabole.

Enfin, à la racine M' correspond un diamètre, qui est l'axe de la parabole, et qui a pour équation :

$$(A'\cos\theta - B'')\,f'_x - (A' - B''\cos\theta)\,f'_y = 0.$$

219. Équation de la tangente au sommet de la parabole. Cherchons d'abord l'équation générale des tangentes à la parabole, en fonction du coefficient angulaire. Soit,

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'' = 0,$$

l'équation de la parabole proposée P; et soit,

$$y = mx + n,$$

l'équation d'une droite Δ, tangente à P. Les abscisses des points communs à P et à Δ, sont données par l'équation :

$$Ax^2 + A'(mx+n)^2 + 2B''x(mx+n) + 2B(mx+n) + 2B'x + A'' = 0;$$

en développant les calculs, cette équation s'écrit :

$$x^2(A + 2B''m + A'm^2) + 2x(B' + Bm + B''n + A'mn) + A'' + 2Bn + A'n^2 = 0.$$

Pour que la droite Δ soit tangente à P, il est nécessaire et suffisant que la relation :

$$(B' + Bm + B''n + A'mn)^2 = (A + 2B''m + A'm^2)(A'' + 2Bn + A'n^2) = 0,$$

soit vérifiée. En tenant compte de l'égalité : $A'A - B''^2 = 0$, cette relation peut être simplifiée et elle devient :

$$2n\left\{(A'B' - BB'')m + B'B'' - AB\right\} + m^2(B^2 - A'A'') + 2m(BB' - A''B'') + B'^2 - AA'' = 0.$$

Si l'on veut introduire les mineurs du discriminant (§ 194), la relation précédente s'écrit :

$$y = mx + \frac{am^2 - 2b''m + a'}{2(b - b'm)};$$

c'est l'équation générale des tangentes à la parabole.

En remplaçant m par $\dfrac{B''\cos\theta - A'}{A'\cos\theta - B''}$ (§ 215), on a l'équation de la tangente au sommet.

220. Équation du cercle de Monge. *Le lieu des points d'où l'on peut mener à une conique donnée deux tangentes rectangulaires, est un cercle si la conique a un centre ; ce lieu est une droite, si la courbe proposée est une parabole.*

Nous nous proposons de démontrer ce théorème.

Soit $f(x, y, z) = 0$, l'équation de la conique donnée U, soient x_0, y_0, z_0, les coordonnées d'un point I, du lieu ; le faisceau des tangentes, issues de I à la courbe, a pour équation :

$$4(Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'')f(x_0, y_0, z_0) = (xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0})^2$$

ou,

$$x^2\left(Af - \frac{1}{4}f'^2_{x_0}\right) + y^2\left(A'f - \frac{1}{4}f'^2_{y_0}\right) + 2\left(B''f - \frac{1}{4}f'_{x_0}f'_{y_0}\right)xy + \dots = 0.$$

Ces deux droites étant rectangulaires, on a (§ 60):

$$Af-\frac{1}{4}f'^2_{x_0}+A'f-\frac{1}{4}f'^2_{y_0}-2\cos\theta\,(B''f-\frac{1}{4}f'_{x_0}f'_{y_0})=0,$$

ou,

$$(A+A'-2B''\cos\theta)f(x_0,y_0,z_0)-f'^2_{x_0}-f'^2_{y_0}+2f'_{x_0}f'_{y_0}\cos\theta=0.$$

En développant les calculs et en prenant la notation des mineurs du discriminant, on obtient l'équation du lieu sous la forme :

$$a''(x^2+y^2+2xy\cos\theta)-2y(b+b'\cos\theta)-2x(b'+b\cos\theta)$$
$$+a+a'+2b''\cos\theta=0.$$

Si a'' n'est pas nul, le lieu est une circonférence et nous allons déterminer le centre et le rayon de cette circonférence.

En prenant les dérivées du premier membre par rapport à x et à y, nous avons :

$$a''(x+y\cos\theta)=b'+b\cos\theta,$$
$$a''(x\cos\theta+y)=b+b'\cos\theta.$$

Ces équations admettent la solution évidente :

$$x=\frac{b'}{a'},\quad y=\frac{b}{a''}.$$

La circonférence trouvée a donc (§ 177) le même centre que la conique proposée.

Pour calculer le rayon, cherchons d'abord la valeur du discriminant Δ_0 de l'équation (1), après avoir divisé les deux membres par a''. Nous avons :

$$\Delta_0=\frac{a+a'+2b''\cos\theta}{a''}+2\cos\theta\frac{(b'+b\cos\theta)(b+b'\cos\theta)}{a''^2}-\frac{(b+b'\cos\theta)^2}{a''^2}$$
$$-\frac{(b'+b\cos\theta)^2}{a''^2}-\cos^2\theta\frac{a+a'+2b''\cos\theta}{a''},$$

ou,

$$\Delta_0 = \sin^2\theta\,\frac{a+a'+2b''\cos\theta}{a''} - \frac{\sin^2\theta}{a''^2}(b^2+b'^2+2bb'\cos\theta);$$

ou, encore,

$$\Delta_0 = \frac{\sin^2\theta}{a''^2}\left\{(aa''-b'^2)+(a'a''-b^2)-2(bb'-a''b'')\cos\theta\right\}$$

Les relations :

$$aa''-b'^2 = A\Delta,\quad a'a''-b^2 = A'\Delta,\quad bb'-a''b'' = B''\Delta;$$

permettent d'écrire la valeur de Δ_0 sous la forme :

$$\Delta_0 = (A+A'-2B''\cos\theta)\frac{\sin^2\theta}{\delta^2}\Delta.$$

D'autre part, nous avons (§ 89)

$$R^2\sin^2\theta = -\Delta_0.$$

et, par suite,

$$R^2 = -\frac{A+A'-2B''\cos\theta}{a''^2}\Delta.$$

Si nous raprochons cette formule de celle que nous avons établie plus haut (§ 212), et qui donne les carrés des longueurs des demi-axes, nous voyons que *le carré du rayon de la circonférence de Monge est égal à la somme des carrés des longueurs des demi-axes*.

Dans cet énoncé, le mot *somme* est pris dans son sens algébrique.

Enfin si nous supposons que la conique proposée soit une parabole, l'équation (1) se réduit et prend la forme :

$$\text{(D)}\quad y(b+b'\cos\theta)+x(b'+b\cos\theta)+\frac{a+a'}{2}+b''\cos\theta = 0.$$

C'est l'équation d'une droite D. On peut vérifier que son coefficient angulaire, en tenant compte de l'égalité $AA' - B''^2 = 0$, est

$$\frac{B' \cos \theta - A'}{A' \cos \theta - B''};$$

ainsi, dans la parabole, le lieu des points de concours des tangentes rectangulaires est une droite perpendiculaire à l'axe de la courbe.

Cette droite remarquable est appelée *directrice*. Ce nom va recevoir sa signification véritable dans la leçon suivante, où nous allons compléter les formules qui précèdent en faisant connaître celles qui se rattachent aux foyers et aux directrices des courbes du second ordre.

EXERCICES

1. *On considère un point* M *mobile sur un cercle* Δ; *soit* AB *un diamètre de ce cercle. On joint* MA, MB *et l'on considère une ellipse* E, *qui a pour axes (en grandeur et en position) les droites* MA, MB. *A ces ellipses, on mène des tangentes parallèles à* AB, *trouver le lieu des points de contact ainsi obtenus.*

Ce lieu est un système de deux cercles concentriques au cercle proposé.

2. *Les conditions de l'exercice précédent étant maintenues, trouver le lieu décrit par les points de contact des tangentes menées à l'ellipse* E, *parallèlement au diamètre de cette ellipse qui est conjugué de la corde* AB.

On trouve encore un système de deux cercles.

Ces deux dernières questions se traitent facilement par des considérations géométriques. Pour avoir une solution analytique assez simple on cherchera d'abord l'équation générale des ellipses E. A cet effet, on exprimera que l'ensemble des deux axes de la courbe coupe les droites AB, prise pour axe des x, aux points A et B. On trouve ainsi, pour l'équation générale :

$$x^2 \cos \varphi + 2xy \sin \varphi + \frac{\sin^2 \varphi + 1}{\cos \varphi} y^2 + 2Ry - R^2 \cos \varphi = 0,$$

φ désignant un paramètre variable.

VINGT-TROISIÈME LEÇON

FOYERS ET DIRECTRICES

221. Définition des foyers et des directrices. Dans les courbes du second ordre, nous appellerons *foyer* de la courbe : *un point tel que sa distance à un point* M, *quelconque de la conique puisse s'exprimer par une forme linéaire des coordonnées de* M.

Il résulte de cette définition que si l'on désigne par α, β, les coordonnées du foyer F, par x, y celles du point M de la courbe, l'expression :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta,$$

est, quels que soient x et y, le carré de l'expression $mx+ny+t$; m, n, t désignant des coefficients constants ; en d'autres termes, l'égalité :

$$\text{(F)}\quad (x-\alpha)^2+(y+\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta=(mx+ny+t)^2,$$

est vérifiée par les coordonnées de tous les points de la courbe. Cette équation est donc celle de la conique; nous aurons à la considérer quelquefois dans les développements qui vont suivre et nous l'appellerons *l'équation générale au foyer*, pour rappeler que les coordonnées de l'un des foyers sont en évidence, dans cette équation.

Si l'on égale à zéro le second membre de (F), l'équation :

$$\text{(D)}\quad mx+ny+t=0$$

représente une droite D, que nous appellerons *directrice correspondante du foyer* F.

Avant de nous engager dans l'étude de ces points et de ces droites remarquables, il importe d'observer que l'équation d'une conique peut toujours se mettre sous la forme (F), de telle sorte que cette équation ne représente pas certaines coniques particulières, mais bien *une conique quelconque*.

Imaginons, en effet, une conique quelconque Γ et soit :

$$F(x, y) = 0,$$

son équation. Supposons, pour fixer les idées et pour mieux préciser notre raisonnement, que Γ soit une ellipse. Nous avons vu que l'on pouvait trouver des axes tels que l'équation de Γ dans ce système, fût :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

En posant : $a^2 - b^2 = c^2$, cette équation peut s'écrire

$$(X - c)^2 + Y^2 = \frac{1}{a^2}(cX - a^2)^2.$$

Revenons aux anciens axes, nous savons que :
$(X - c)^2 + Y^2$, devient $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta)\cos\theta$; de même,

$$cX - a^2, \text{ devient } mx + ny + t;$$

et l'équation de Γ, dans le système proposé, est,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta)\cos\theta = (mx + ny + t)^2.$$

Ce raisonnement, évidemment valable pour l'hyperbole, s'applique aussi à la parabole; il suffit de remarquer que l'équation de cette courbe, rapportée à ses axes, peut s'écrire :

$$\left(X - \frac{p}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(X + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Ainsi l'équation d'une conique peut toujours se mettre sous

la forme (F), et l'on peut considérer cette équation comme l'une des représentations de l'équation générale des coniques.

228. Invariants de l'équation générale au foyer. L'équation (F) peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} x^2(1-m^2)+y^2(1-n^2)+2xy(\cos\theta-mn)-2(\alpha+\beta\cos\theta+mp)x \\ -2(\alpha\cos\theta+\beta+np)y+\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta-t^2=0. \end{aligned}$$

Elle représente d'ailleurs une conique réelle et l'on peut vérifier ce fait, en cherchant l'intersection de la courbe avec une droite passant par le point (α, β). Nous allons calculer les invariants qui correspondent à l'équation (F).

Nous avons, d'abord,

$$\begin{aligned} \Delta = & (1-m^2)(1-n^2)(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta-t^2) \\ & +2(\cos\theta-mn)(\alpha+\beta\cos\theta+mt)(\alpha\cos\theta+\beta+nt) \\ & -(1-m^2)(\alpha\cos\theta+\beta+nt)^2-(1-n^2)(\alpha+\beta\cos\theta+mt)^2 \\ & -(\cos\theta-mn)^2(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta-t^2). \end{aligned}$$

Si nous développons les calculs indiqués dans le second membre de cette égalité, nous trouvons, après avoir effectué les simplifications qu'elle comporte,

$$\frac{\Delta}{\sin^2\theta} = -(m\alpha+n\beta+t)^2.$$

Nous avons aussi,

$$\delta = (1-m^2)(1-n^2)-(\cos\theta-mn)^2,$$

ou,

$$\delta = \sin^2\theta-(m^2+n^2-2mn\cos\theta).$$

Enfin le troisième invariant, celui qui, dans la notation ordinaire des coniques, est désigné par :

$$\frac{A+A'-2B''\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

est ici :

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\left\{2-m^2-n^2-2\cos\theta(\cos\theta-mn)\right\}$$

ou,

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\left\{ 2\sin^2\theta - (m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta) \right\}$$

Nous pouvons conclure de ces calculs qu'en représentant, comme nous l'avons déjà fait, par σ, ρ, τ, les trois invariants de l'équation (F), nous avons, pour les calculer, les relations suivantes :

$$\text{(I)} \quad \tau = -(m\alpha + n\beta + t)^2, \quad \rho = 1 - \frac{m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

$$\sigma = 2 - \frac{m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Nous rappelons, pour éviter toute confusion, que les invariants σ, ρ, τ correspondent aux formules :

$$\sigma = \frac{A + A' - 2B''\cos\theta}{\sin^2\theta}, \quad \rho = \frac{AA' - B''^2}{\sin^2\theta}, \tau = \frac{\Delta}{\sin^2\theta}.$$

Ces formules conduisent à plusieurs conséquences.

La première que nous voulions signaler est que la courbe qui correspond à l'équation (F) est une vraie conique quand on suppose $D' \neq 0$, en posant :

$$D = mx + ny + t,$$

et,

$$D' = m\alpha + n\beta + t.$$

On voit aussi que l'on a, par une conséquence immédiate des formules (I),

$$\text{(I')} \quad \sigma = \rho + 1.$$

Cette dernière relation conduit à quelques résultats remarquables et que nous allons développer maintenant.

223. Considérons d'abord le cas des coniques ayant un

centre, et soit $\rho \not\leq 0$. Nous avons montré précédemment (§ 209), que les axes de la courbe étaient donnés par l'équation :

$$Z^2 + \frac{\sigma\tau}{\rho} Z + \frac{\tau^2}{\rho^3} = 0.$$

En tenant compte de la relation (I'), cette égalité peut s'écrire :

$$Z^2 + (\rho + 1) \frac{\tau}{\rho^2} Z + \frac{\tau^2}{\rho^3} = 0;$$

ou

$$\left(Z + \frac{\tau}{\rho^2}\right)\left(Z + \frac{\tau}{\rho}\right) = 0.$$

Nous pouvons donc dire : lorsque l'équation d'une *conique à centre, affecte la forme que nous avons appelée* **équation au foyer**, *les carrés des axes ont pour valeur, respectivement,*

$$-\frac{\tau}{\rho}, \quad -\frac{\tau}{\rho^2}.$$

224. Supposons maintenant que l'on ait $\rho = 0$. La relation (I') prouve que, dans cette hypothèse, on a aussi $\sigma = 1$; et la formule (A') (§ 210), donne, pour déterminer le paramètre de la parabole considérée, la relation :

$$p^2 = -\tau,$$

ou,

$$p = \pm(m\alpha + n\beta + t) = \pm D'.$$

Dans cette formule, p désigne une quantité positive et l'on doit prendre le signe $+$, ou le signe $-$, suivant que le foyer considéré est placé dans la région positive ou dans la région négative de la directrice.

225. Paramètre et excentricité. Si l'on suppose que l'on ait $\rho \not\leq 0$, et que l'équation $(\overline{F})$ ait été réduite, comme il

a été dit précédemment ; la conique qui lui correspond, rapportée à son centre et à ses axes, a pour équation :

$$Ax^2 + A'y^2 = 1,$$

et nous pouvons poser, d'après ce que nous venons de voir (§ 223),

$$(1) \quad \frac{1}{A} = -\frac{\tau}{\rho^2}, \quad \frac{1}{A'} = -\frac{\tau}{\rho}.$$

Le *paramètre* de la courbe est une ligne p, qui peut se calculer par la formule :

$$p^2 = \frac{A}{A'^2};$$

on a donc,

$$(P) \quad p^2 = -\tau,$$

ou,

$$(P') \quad \pm p = m\alpha + n\beta + t.$$

Telle est la formule qui permet de calculer le paramètre de la conique ; on remarquera que cette formule est la même que celle que nous avons donnée, au paragraphe précédent, pour calculer le paramètre de la parabole. On verra tout à l'heure (§ 227), le motif de l'identité des deux formules:

On nomme *excentricité*, dans les coniques à centre, un rapport, que l'on désigne ordinairement par la lettre e, et dont la valeur vérifie l'égalité :

$$e^2 = 1 - \frac{A}{A'}.$$

Les relations (1) donnent :

$$(E) \quad e^2 = 1 - \rho,$$

ou,

$$(E') \quad e^2 = \frac{m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

L'égalité (E) prouve que le nombre ρ est toujours plus petit que l'unité. Les axes étant $-\frac{\tau}{\rho}$ et $-\frac{\tau}{\rho^2}$, c'est donc celui-ci qui représente le grand axe, dans le cas de l'ellipse.

Nous ferons encore remarquer que si du foyer on abaisse une perpendiculaire sur la directrice, la longueur z de cette distance est donnée par la formule :

$$z^2 = \frac{(m\alpha + n\beta + t)^2 \sin^2\theta}{m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta},$$

qui peut s'écrire :

$$z^2 = \frac{\tau}{\rho - 1}.$$

226 Théorème I. *La directrice est parallèle à une des directions principales de la conique.*

La relation (A), (§ 216), appliquée à (F), donne, pour déterminer les directions principales de cette conique, l'équation :

$$\mu^2 n(m - n\cos\theta) + \mu(m^2 - n^2) + m(m\cos\theta - n) = 0;$$

cette égalité peut s'écrire sous la forme,

$$(n\mu + m)\left\{\mu(m - n\cos\theta) + m\cos\theta - n\right\} = 0.$$

Les coefficients angulaires des directions principales sont donc:

$$-\frac{n}{m}, \quad \text{et} \quad -\frac{m\cos\theta - n}{m - n\cos\theta};$$

Ainsi la directrice est parallèle à l'une de ces directions et perpendiculaire sur l'autre.

227. Théorème II. *Le paramètre d'une conique est la demi-corde principale qui passe par le foyer et qui est parallèle à la directrice.*

Désignons le foyer par F, la directrice correspondante

par D, et la conique proposée par C. Par F menons une corde Δ, parallèle à D, son équation est :

$$(\Delta) \quad ym(x-\alpha)+n(y-\beta)=0.$$

Pour obtenir l'intersection de Δ et de C, il suffit de résoudre les équations (F) et (Δ) ; x, y représentant les coordonnées d'un des points communs à C et à Δ. Mais on peut remarquer que l'on a, par combinaison de (F) et de (Δ),

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta=(m\alpha+n\beta+t)^2.$$

Cette équation représente un cercle ayant son centre au point α, β et pour rayon $m\alpha+n\beta+t$, c'est-à-dire p. Les points cherchés sont donc les extrémités d'une corde principale égale à $2p$.

On peut encore exprimer ce résultat en disant que *dans les courbes du second ordre l'ordonnée principale du foyer est égale au paramètre de la conique.*

228. Théorème III. *Le rapport des distances d'un point de la conique à un foyer, et à la directrice correspondante, est constant, et égal à l'excentricité.*

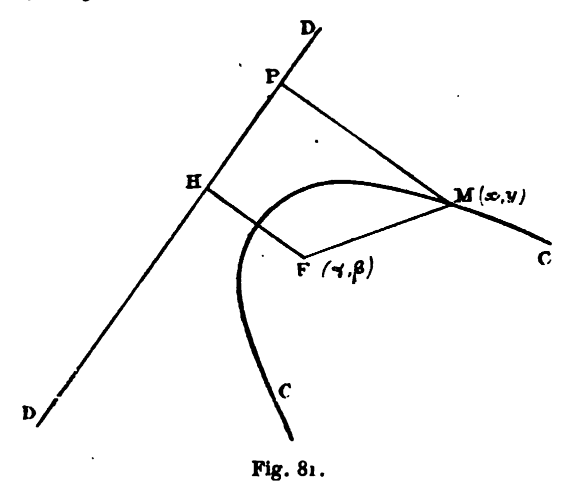


Fig. 81.

Soit C la conique proposée, D la directrice, F le foyer.

Prenons sur C un point quelconque M, nous avons :

$$\overline{MF}^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta,$$

et,

$$\overline{MP}^2 = \frac{(mx+ny+p)^2 \sin^2\theta}{m^2+n^2-2mn\cos\theta}.$$

De ces égalités, et de l'équation (F), nous déduisons :

$$\frac{\overline{MF}^2}{\overline{MP}^2} = \frac{m^2+n^2-2mn\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

En comparant ce résultat avec la formule (E′) (§ 225), nous avons bien,

$$\frac{MF}{MP} = e.$$

Dans l'ellipse on a $\rho > 0$ et, par conséquent, $e < 1$. Dans la parabole, l'excentricité est égale à l'unité, tous les points de la courbe sont également éloignés du foyer et de la directrice; enfin dans l'hyperbole on a $\rho < 0$ et, par suite, $e > 1$.

229. Théorème IV. *La directrice est la polaire du foyer correspondant.*

Posons :

$$f(x,y,z) \equiv (x-\alpha z)^2 + (y-\beta z)^2 + 2(x-\alpha z)(y-\beta z)\cos\theta - D^2;$$

nous avons alors,

$$\frac{1}{2}f'_x \equiv (x-\alpha z) + (y-\beta z)\cos\theta - mD,$$

$$\frac{1}{2}f'_y \equiv (x-\alpha z)\cos\theta + (y-\beta z) - nD,$$

$$\frac{1}{2}f'_z \equiv (x-\alpha z) + (y-\beta z) - [\alpha(y-\beta z) + \beta(x-\alpha z)]\cos\theta - tD;$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2}f'_\alpha = -mD', \quad \frac{1}{2}f'_\beta = -nD', \quad \frac{1}{2}f'_\gamma = -tD'.$$

L'équation de la polaire du point (α, β) est donc :

$$(mx + ny + t)\,D' = 0,$$

ou,

$$DD' = 0.$$

Mais D' n'est pas nul si, comme nous le supposons formellement, le discriminant est différent de zéro ; la courbe qui correspond à l'équation proposée étant une vraie conique. Nous avons donc finalement :

$$D = 0.$$

220. Théorème V. *Les tangentes issues d'un foyer à une conique sont parallèles aux directions isotropes du plan.*

Les notations précédentes étant conservées, remarquons que nous avons :

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = -D'^2,\ \frac{1}{2}f'_\alpha = -mD',\ \frac{1}{2}f'_\beta = -nD',\ \frac{1}{2}f'_\gamma = -tD'.$$

L'équation du faisceau des tangentes issues du point (α, β, γ) est donc :

$$f(x, y, z)(-D'^2) - (mxD' + nyD' + tzD')^2 = 0.$$

ou,

$$D'^2 \left\{ f(x, y, z) + D^2 \right\} = 0.$$

ou, enfin,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta)\cos\theta = 0.$$

Cette équation représente deux droites, issues du point dont les coordonnées sont α, β, et qui sont parallèles aux droites qui correspondent à l'équation :

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = 0.$$

Les tangentes considérées sont donc parallèles aux directions isotropes du plan (§ 145).

231. Théorème VI. *Les foyers sont situés sur les axes de la conique.*

L'équation quadratique des axes est (§ 217)

$$f_x'^2(A'\cos\theta - B'') + f_x' f_y'(A - A') + f_y'^2(B'' - A\cos\theta) = 0,$$

et nous nous proposons de vérifier la relation :

$$f_\alpha'^2 \left\{ (1 - n^2)\cos\theta - \cos\theta + mn \right\} + f_\alpha' f_\beta'(n^2 - m^2)$$
$$+ f_\beta'^2 \left\{ \cos\theta - mn - (1 - m^2)\cos\theta \right\} = 0.$$

A cet effet remarquons que nous avons :

$$\frac{1}{2} f_\alpha' = -mD', \text{ et } \frac{1}{2} f_\beta' = -nD';$$

nous devons donc reconnaître l'identité :

$$m^2(mn - n^2\cos\theta) + mn(n^2 - m^2) + n^2(m^2\cos\theta - mn) = 0,$$

identité qui est manifeste.

232. Théorème VII. *Si les tangentes, issues d'un point* M *à une conique* C, *sont parallèles aux directions isotropes du plan, ce point* M *est un foyer de* C.

Cette propriété est la réciproque du théorème V et cette réciproque a une importance évidente, parce quelle établit que la propriété visée dans l'énoncé de ce théorème est caractéristique des *points foyers.*

Désignons par $U = 0$, l'équation du faisceau μ, des tangentes issus de M à C ; nous avons, par hypothèse,

$$U = (x - \alpha z)^2 + (y - \beta z)^2 + 2(x - \alpha z)(y - \beta z)\cos\theta.$$

D'autre part, si $f(x, y, z) = 0$, représente l'équation de C, on sait que l'équation du faisceau μ est ;

$$4f(x, y, z)\,f(\alpha, \beta, \gamma) - (x f_\alpha' + y f_\beta' + z f_\gamma')^2 = 0.$$

Les deux formes :

$$4f(x,y,z)\,f(\alpha,\beta,\gamma) - \left(xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma\right)^2,$$

et,

$$(x-\alpha z)^2 + (y-\beta z)^2 + 2\,(x-\alpha z)(y-\beta z)\cos\theta,$$

sont donc identiques, à un facteur constant près, et nous pouvons poser :

$$4\lambda f(x,y,z)\,f(\alpha,\beta,\gamma) - \lambda\left(xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma\right)^2$$
$$= (x-\alpha z)^2 + (y-\beta z)^2 + 2(x-\alpha z)(y-\beta z)\cos\theta.$$

L'équation de la conique étant $f(x,y,z) = 0$, l'identité précédente prouve que cette équation peut s'écrire :

$$(1)\quad \lambda\left(xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma\right)^2 + (x-\alpha z)^2 + (y-\beta z)^2 + 2(x-\alpha z)(y-\beta z)\cos\theta = 0.$$

Si λ est positif, cette équation n'admet que la solution α, β, γ ; encore faut-il que l'on ait :

$$\alpha f'_\alpha + \beta f'_\beta + \gamma f'_\gamma = 0.$$

L'équation proposée représente donc une ellipse imaginaire, ou une ellipse évanouissante.

Écartons cette hypothèse et supposons que la courbe considérée soit une vraie conique ; alors nous devons admettre que λ est négatif et nous pouvons poser $\lambda = -\rho^2$. L'équation (1) devient :

$$\left(\rho xf'_\alpha + \rho yf'_\beta + \rho zf'_\gamma\right)^2 = (x-\alpha z)^2 + (y-\beta z)^2 + 2\,(x-\alpha z)(y-\beta z)\cos\theta,$$

et, sous cette forme, on voit que le point (α, β, γ) est bien un foyer de la conique.

C'est cette propriété caractéristique des foyers qui a été adoptée pour définir les foyers dans les courbes d'un ordre supérieur et l'on dit *qu'un point* F *est un foyer d'une courbe* U, *lorsque parmi les tangentes issues de* F *à* U, *il y en a deux qui sont parallèles aux directions isotropes du plan.*

233. Hyperboles focales. La propriété que nous venons de démontrer peut servir à déterminer les foyers des courbes du second ordre, et nous allons montrer que ces points sont à l'intersection des deux hyperboles équilatères que nous nommerons *hyperboles focales*. Pour plus de simplicité dans les calculs, nous supposerons les axes rectangulaires et d'ailleurs, pour le remarquer en passant, les questions relatives aux foyers doivent, autant que possible, être traitées dans ce système d'axes.

Le faisceau des tangentes issues du point (α, β) a pour équation :

$$(Ax^2+A'y^2+2B''xy+2By+2B'x+A'')(A\alpha^2+A'\beta^2+2B''\alpha\beta+2B\beta+2B'\alpha+A'')$$
$$=\{x(A\alpha+B''\beta+B')+y(B''\alpha+A'\beta+B)+B'\alpha+B\beta+A''\}^2.$$

Ces droites étant parallèles aux directions isotropes du plan, et les axes étant rectangulaires, nons pouvons écrire : 1° que les coefficients des termes en x^2 et en y^2 sont égaux ; 2° que le coefficient du terme en xy est nul. Nous avons ainsi, pour déterminer α et β, les deux équations :

$$A(A\alpha^2+A'\beta^2+2B''\alpha\beta+2B\beta+2B'\alpha+A'')-(A\alpha+B''\beta+B')^2$$
$$=A'(A\alpha^2+A'\beta^2+2B''\alpha\beta+2B\beta+2B'\alpha+A'')-(B''\alpha+A'\beta+B)^2,$$

et,

$$B''(A\alpha^2+A'\beta^2+2B''\alpha\beta+2B\beta+2B'\alpha+A'')$$
$$=(A\alpha+B''\beta+B')(B''\alpha+A'\beta+B).$$

En développant les calculs indiqués, nous obtenons, après réductions, et en rendant α et β coordonnées courantes :

$$(AA'-B''^2)(x^2-y^2)+2(A'B'-BB'')x+2(B''B'-AB)y+B'^2-AA''-B^2+A'A''=0,$$
$$(AA'-B''^2)xy+(AB-B'B'')x+(A'B'-BB'')y+BB'-A''B''=0.$$

En revenant à la notation abrégée (§ 194), les équations prennent la forme suivante :

$$(H'_F)\qquad a''(x^2-y^2)+2by-2b'x+a'-a=0,$$
$$(H''_F)\qquad a''xy-b'y-bx+b''=0.$$

On doit alors distinguer deux cas. Si $a'' = 0$, chacune des équations précédentes représente une droite, et l'on peut conclure de cette remarque que la parabole a un foyer unique.

Si l'on suppose, au contraire, $a'' \neq 0$; les équations que nous venons de trouver, représentent deux hyperboles équilatères, et l'on vérifie facilement les propriétés suivantes :

1° *Les deux hyperboles focales sont équilatères et elles ont pour centre commun, le centre de la conique considérée.*

2° *Elles ont pour asymptotes, respectivement, des parallèles aux axes des coordonnées et des parallèles aux bissectrices de ces axes.*

3° *Elles ont deux points communs réels, symétriques par rapport au centre de la conique donnée ; et deux autres points communs, imaginaires.*

Ces résultats sont la conséquence évidente des équations (H'_F), (H''_F), mises sous la forme :

$$\left(x-\frac{b}{a''}\right)^2-\left(y-\frac{b'}{a''}\right)^2=\frac{(A'-A)\Delta}{\delta^2},$$
$$\left(x-\frac{b}{a''}\right)\left(y-\frac{b'}{a''}\right)=\frac{B''\Delta}{\delta^2}.$$

EXERCICES

1. *Démontrer que les coniques focales ont pour équation, respectivement,*

$$4B''f(x,y)=f'_x f'_y,$$
$$f'^2_x - f'^2_y = 4(A-A')f(x,y).$$

2. *Démontrer que les tangentes issues du foyer sont rectangulaires à elles-mêmes.* (Théorème de *la Hire*.)

Expliquer, d'après cette remarque, pourquoi l'on trouve ordinairement le facteur x^2+y^2, dans le premier membre de l'équation de la podaire du foyer ; montrer pourquoi la présence de ce facteur singulier est évitée dans le calcul exposé plus loin (§ 242).

VINGT-QUATRIÈME LEÇON

FOYERS ET DIRECTRICES (suite)

234. Problème. *Étant donnée l'équation d'une courbe du second ordre, déterminer ses foyers et ses directrices.*

La directrice étant la polaire du foyer, le problème que nous nous proposons de traiter se réduit à la recherche des foyers. Cette recherche peut se faire par trois méthodes principales que nous allons exposer.

1re méthode. L'équation de la conique donnée étant :

$$f(x,y,z)=0,$$

on l'identifie avec l'équation générale au foyer.

Les axes étant rectangulaires, cette identification conduit aux équations suivantes :

$$(\mathrm{H})\ \left\{\begin{aligned} 1-m^2 &= \rho A,\\ 1-n^2 &= \rho A',\\ -mn &= \rho B'', \end{aligned}\right. \qquad (\mathrm{K})\ \left\{\begin{aligned} \alpha+mt &= -\rho B',\\ \beta+nt &= -\rho B,\\ \alpha^2+\beta^2-t^2 &= \rho A''. \end{aligned}\right.$$

Dans ces égalités, les inconnues sont les quantités $m,n,\rho\,;\alpha,\beta,t$. Ces équations, séparées en deux groupes, conformément au tableau précédent, prouvent que la recherche des inconnues α,β dépend d'une solution quadratique ; nous entendons par là une solution qui peut être réalisée par des équations du second degré, tout au plus.

On remarque, en effet, que les équations (H), permettent de déterminer ρ par la relation :

$$(1) \quad \rho^2(AA' - B''^2) - \rho(A + A') + 1 = 0.$$

Cette équation, qui est une combinaison évidente des égalités (H), a ses racines réelles, la quantité placée sous le radical étant :

$$(A - A')^2 + 4B''^2.$$

Dans le cas de la parabole, cette équation est du premier degré ; mais la valeur de ρ n'est pas infinie parce qu'on ne peut pas avoir, simultanément,

$$B''^2 = AA', \quad \text{et} \quad A = -A'.$$

En effet ces relations entraineraient cette conséquence que les coefficients A, A', B'', seraient nuls en même temps.

Revenons au cas général ; supposons $\delta \neq 0$, et pour *bien* marquer que le problème de la recherche des foyers est un problème quadratique, nous ferons observer qu'après avoir calculé les racines ρ', ρ'', de l'équation (1) si nous prenons l'une d'elles, ρ' par exemple, à cette valeur ρ', correspondent, pour les inconnues α, β, deux systèmes de valeurs :

$$\alpha'_1, \beta'_1 ; \quad \alpha'_2, \beta'_2.$$

D'ailleurs, il n'y en a pas d'autres.

En effet, les équations (H) et (K) donnent, par combinaison, les deux relations :

$$\frac{\alpha + \rho B'}{\beta + \rho B} = \frac{m}{n} = \frac{-1 + \rho A}{\rho B''}$$

et,

$$(\alpha^2 + \beta^2)\rho B'' + \alpha\beta + \rho(\alpha B + \beta B') + \rho^2(BB' - A''B'') = 0.$$

Ces deux équations en α, β, : l'une du premier degré, l'autre du second degré, prouvent qu'à la racine ρ', correspondent, en général, deux solutions, réelles ou imaginaires,

pour les inconnues α, β. Le problème qui nous occupe et qui est, à le bien considérer, un problème du quatrième degré, se trouve donc résolu par deux équations du second degré, qui s'obtiennent en considérant successivement les deux racines ρ', ρ''.

2e méthode. La seconde méthode que nous voulons indiquer, pour la détermination des foyers, est celle qui prend pour base les équations des coniques focales. En écrivant que l'ensemble des tangentes issues du point (α, β) a pour équation celle d'un *point-cercle*, on obtient deux relations du second degré, entre les inconnues α, β.

Cette méthode donne lieu, ordinairement, à des calculs pénibles ; dans tous les cas, si on croit devoir l'adopter, il faut diriger les calculs avec quelque attention et tenir compte de ce fait (§ 233) que les coniques focales sont des hyperboles *concentriques*. Le changement d'inconnues indiqué par les équations qui terminent le paragraphe cité, permet de résoudre ce problème du quatrième degré par une équation bicarrée.

3e méthode. Enfin, si l'on remarque que l'équation d'une conique peut se mettre sous les deux formes :

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$\Sigma - D^2 = 0 ;$$

D étant une forme linéaire et $\Sigma = 0$ représentant l'équation d'un point-cercle, on voit que l'on a :

$$\lambda f(x, y, z) + \Sigma \equiv D^2.$$

De cette identité résulte le principe suivant dont l'application permet, le plus souvent, de trouver très simplement les foyers d'une conique : *Si, au premier membre de l'équation de la courbe, multiplié par un facteur arbitraire, on ajoute* :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta)\cos\theta,$$

la forme ainsi obtenue est le carré d'une forme linéaire en x et y.

La première méthode indiquée a l'inconvénient grave d'introduire six inconnues dans une analyse qui n'en vise directement que deux ; la deuxième présente des longueurs de calcul qui tiennent à la forme compliquée de l'équation des coniques focales ; c'est la troisième méthode qui, ordinairement, conduit au résultat par la voie la plus courte et la moins sujette aux fautes de calcul.

Nous allons l'appliquer à quelques exemples.

235. Détermination des foyers et des directrices. 1° *Coniques ayant un centre.* Nous supposons que la courbe est rapportée à son centre et à ses axes ; son équation est alors :

$$\text{(K)}\quad Ax^2+A'y^2-1=0.\quad (A>0)\quad \begin{cases} A'>0 \text{ Ellipse } (A'>A) \\ A'<0 \text{ Hyperbole.} \end{cases}$$

et, dans le tableau qui accompagne cette équation, nous avons rappelé les conditions que vérifient les coefficients A, A'.

Posons :

$$U=\lambda(Ax^2+A'y^2-1)+(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2;$$

U doit être le carré d'une forme linéaire ; ordonnons U par rapport à l'une des lettres x ou y, nous avons alors :

$$(1)\quad U=(\lambda A'+1)y^2-2\beta y+(\lambda A+1)x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2-\lambda=0.$$

Nous devons écrire maintenant que ce trinôme en y *est un carré parfait quel que soit* x.

Deux cas doivent être distingués ici, car U peut renfermer le terme en y^2, ou être privé de ce terme.

Soit supposé, d'abord,

$$(2)\quad \lambda A'+1=0.$$

Pour que U soit un carré parfait il faut que le terme $2\beta y$ n'existe pas ; on a donc,

$$(3)\quad \beta=0$$

Il faut aussi que le trinôme :

$$(\lambda A+1)x^2-2\alpha x+\alpha^2-\lambda,$$

soit un carré parfait. On doit donc avoir :

$$\alpha^2 = (\alpha^2 - \lambda)(\lambda A + 1).$$

ou,

$$0 = \lambda(A\alpha^2 - 1 + \lambda A).$$

Le paramètre λ n'étant pas nul, comme le prouve l'égalité (2), on a donc :

$$(4) \quad \alpha^2 = \frac{1}{A} - \frac{1}{A'}.$$

Soit pris, maintenant, le cas où l'on suppose $\lambda A' + 1 \neq 0$. On a :

$$\beta^2 = (\lambda A' + 1) \left\{ (\lambda A + 1)x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 - \lambda \right\}.$$

Cette relation devant être vérifiée pour toutes les valeurs de x, on voit d'abord que le coefficient de x^2 est nul ; et, comme l'on suppose $\lambda A' + 1 \neq 0$, on a donc :

$$\lambda A + 1 = 0 ;$$

puis,

$$(3') \quad \alpha = 0,$$

et,

$$\beta^2 = (\lambda A' + 1)(\beta^2 - \lambda).$$

De cette égalité, on déduit :

$$(4') \quad \beta^2 = \frac{1}{A'} - \frac{1}{A}.$$

Il reste à discuter les résultats trouvés et qui correspondent aux formules (3) et (4) d'une part, (3') et (4') d'autre part.

En se reportant au tableau (K) on voit immédiatement :

1° Que la formule (4) donne des foyers réels pour l'ellipse et pour l'hyperbole.

2° Que la formule (4') donne au contraire des foyers imaginaires pour l'une et l'autre de ces courbes.

Nous pouvons donc conclure : *Il y a dans les coniques à centre, quatre foyers ; deux sont réels, les deux autres sont imaginaires. Les foyers réels sont situés sur le grand axe de l'ellipse, ou sur l'axe transverse de l'hyperbole, de part et d'autre du centre, à la même distance de ce point ; cette distance, désignée ordinairement par la lettre* c, *se calcule par la formule :*

$$c^2 = \frac{1}{A} - \frac{1}{A'},$$

lorsque l'équation de la conique rapportée à ses axes est représentée par :

$$Ax^2 + A'y^2 = 1.$$

2° *Parabole.* L'équation réduite de la courbe étant :

$$y^2 - 2px = 0,$$

nous avons à considérer la forme U :

$$U \equiv \lambda(y^2 - 2px) + (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2,$$

ou,

$$U \equiv (\lambda + 1)y^2 - 2\beta y + x^2 - 2x(\alpha + \lambda p) + \alpha^2 + \beta^2.$$

En supposant, d'abord,

$$\lambda + 1 = 0,$$

on a,

$$\beta = 0,$$

puis,

$$(\alpha - p)^2 = \alpha^2$$

ou,

$$\alpha = \frac{p}{2}.$$

D'ailleurs, on ne peut supposer $\lambda + 1 \neq 0$; le calcul le prouve immédiatement, mais on peut aussi reconnaître cette

impossibilité en remarquant que U étant le carré d'une forme linéaire en x et y, ne peut renfermer un terme en x^2, et un terme en y^2, sans avoir, aussi, un terme en xy.

Ainsi : *il y a dans la parabole un seul foyer situé sur l'axe de la courbe, à une distance du sommet égale à* $+\frac{p}{2}$.

Les directrices étant les polaires du foyer, on voit que dans les coniques à centre il y a deux directrices réelles, correspondant aux équations :

$$x = +\frac{1}{Ac}, \quad x = -\frac{1}{Ac};$$

Dans la parabole, au foyer que nous avons trouvé, correspond une directrice dont l'équation est :

$$x = -\frac{p}{2}.$$

PROPRIÉTÉS DIVERSES DES FOYERS ET DES DIRECTRICES

236. Nous nous proposons, en terminant cette étude des foyers et des directrices, de signaler quelques propriétés remarquables de ces points et de ces droites, quand on leur associe une ou plusieurs tangentes de la courbe. Nous établirons d'abord quelques formules nécessaires à cette étude.

Nous prendrons pour origine O, un foyer de la courbe et, pour axes des coordonnées, deux droites rectangulaires quelconques passant par ce point. L'équation de la conique est alors :

$$(1) \quad x^2 + y^2 = D^2,$$

en posant :

$$D = mx + ny + l.$$

Les coordonnées d'un point M, pris sur la courbe, peuvent être représentées par $x = D \cos\varphi$, $y = D \sin\varphi$; φ désignant l'angle variable que fait avec OX, la direction OM. Si l'on prend deux points M et M' sur la conique, l'équation de la droite MM' est :

$$\begin{vmatrix} x & y & D \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \\ \cos\varphi' & \sin\varphi' & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant le déterminant, et en divisant par $2\sin\frac{\varphi - \varphi'}{2}$,

$$x \cos\frac{\varphi + \varphi'}{2} + y \sin\frac{\varphi + \varphi'}{2} = D \cos\frac{\varphi - \varphi'}{2}.$$

Dans le cas où les deux points M, M' viennent se confondre, cette égalité devient :

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = D;$$

c'est l'équation générale des tangentes à la conique qui correspond à l'équation (1).

237. Théorème I. *Si l'on considère une corde* AB, *dans une conique* C, *la droite qui va d'un foyer* F *de cette conique, au pôle de* AB, *est bissectrice de l'angle* AFB.

En posant : $AFX = \varphi$, $BFX = \varphi'$, les équations des tangentes à C, aux points A et B, sont, respectivement :

$$\text{(AP)} \quad x \cos\varphi + y \sin\varphi = D,$$
$$\text{(BP)} \quad x \cos\varphi' + y \sin\varphi' = D.$$

L'équation de la droite qui va de l'origine au point de concours de ces deux droites est :

$$x(\cos\varphi - \cos\varphi') + y(\sin\varphi - \sin\varphi') = 0;$$

ou, en transformant, et en simplifiant,

$$\text{(FP)} \quad y = x \operatorname{tg}\frac{\varphi + \varphi'}{2}.$$

Cette égalité prouve que l'angle PFX est égal à $\frac{\varphi+\varphi'}{2}$, et que, par suite, FP est la bissectrice de l'angle AFB.

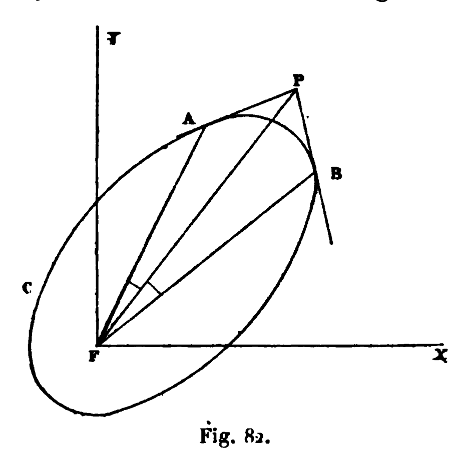


Fig. 82.

238. Théorème II. *Un point quelconque* P *du plan d'une conique et le point de rencontre de la polaire de* P *avec une directrice de cette conique, sont vus, du foyer correspondant, sous un angle droit.*

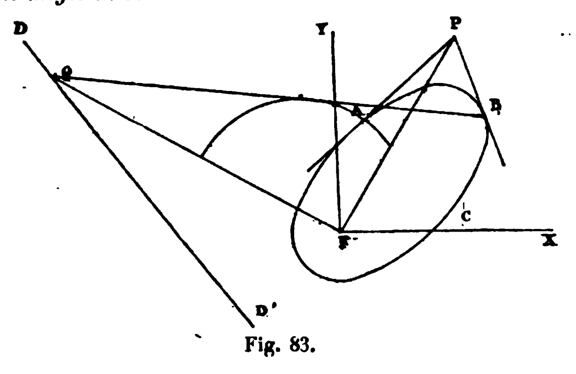


Fig. 83.

Soit AB la polaire du point P ; les notations précédentes étant conservées, l'équation de AB est :

$$\text{(AB)} \quad x\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}+y\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}=\mathrm{D}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}.$$

La droite FQ qui joint l'origine au point Q, point de rencontre de AB avec la directrice DD′ qui correspond au foyer F, a donc pour équation :

$$(\mathrm{FQ}) \quad x \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2} + y \sin \frac{\varphi + \varphi'}{2} = 0,$$

et l'on voit ainsi que cette droite est perpendiculaire sur la droite FP, droite qui, comme nous l'avons vu tout à l'heure a pour équation :

$$x \sin \frac{\varphi + \varphi'}{2} - y \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2} = 0.$$

239. Théorème III. *Si l'on considère une conique* C *et, dans son plan, une transversale quelconque rencontrant cette conique aux points* A, B *; la droite qui joint un foyer* F, *au point de rencontre de* AB *avec la directrice correspondante, est bissectrice de l'angle formé, par le rayon vecteur* FA, *et le prolongement de* BF.

Cette propriété peut s'établir très simplement par une analyse toute semblable à celle que nous venons d'employer. On peut aussi remarquer que le théorème en question est, par des considérations géométriques évidentes, un corollaire immédiat des théorèmes I et II.

Ces réflexions s'appliquent aux deux théorèmes suivants, que nous nous contenterons d'énoncer.

240. Théorème IV. *Si l'on considère une tangente quelconque* Δ, *à une conique* C, *la portion de* Δ *qui est comprise entre le point de contact et son point de rencontre avec une directrice, est vue du foyer correspondant, sous un angle droit.*

241. Théorème V. *Si d'un point* M *pris sur une directrice, on mène à la conique les tangentes* MA, MB; *la projection de* M *sur* AB *est le foyer correspondant de la directrice considérée.*

242. Théorème VI. *La podaire du foyer est un cercle, pour les coniques à centre ; et une droite, pour la parabole.*

L'équation d'une tangente T étant prise sous la forme :

$$(1)\quad x\cos\varphi + y\sin\varphi = mx + ny + t,$$

la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite T aura pour équation :

$$x(n - \sin\varphi) - y(m - \cos\varphi) = 0,$$

ou,

$$(2)\quad x\sin\varphi - y\cos\varphi = nx - my,$$

Pour avoir la podaire du foyer il suffit d'éliminer φ entre (1) et (2). Élevons au carré les équations (1) et (2), puis ajoutons les résultats, membre à membre, nous obtenons l'équation du lieu :

$$(3)\quad x^2 + y^2 = (m^2 + n^2)(x^2 + y^2) + 2mtx + 2nty + t^2.$$

Dans les coniques à centre, on a : $\delta = 1 - m^2 - n^2$; l'équation que nous venons d'obtenir représente alors une circonférence ; dans le cas de la parabole, on a : $m^2 + n^2 = 1$ et la podaire du foyer est une droite Δ ayant pour équation :

$$mx + ny + \frac{t}{2} = 0.$$

Cette droite Δ est parallèle à la directrice et équidistante de celle-ci et de la parallèle à la directrice menée par le foyer. C'est la tangente au sommet de la parabole.

Si nous revenons au cas des coniques à centre, nous avons à nous demander quel est le cercle qui correspond à l'équation (3) ; et pour cela nous devons déterminer le centre et le rayon dè ce cercle. A cet effet, remarquons que l'équation (3) peut s'écrire ainsi :

$$\left(x - \frac{tm}{1 - m^2 - n^2}\right)^2 + \left(y - \frac{tn}{1 - m^2 - n^2}\right)^2 = \frac{t^2}{(1 - m^2 - n^2)^2}.$$

C'est un cercle toujours réel qui a pour centre le point dont les coordonnées sont :

$$\frac{tm}{1 - m^2 - n^2},\quad \frac{tn}{1 - m^2 - n^2};$$

c'est-à-dire, comme on le vérifie sans peine, le centre même de la conique. De plus, si l'on observe que l'on a ici (notation des invariants) :

$$\tau = -t^2, \quad \rho = 1 - m^2 - n^2;$$

on voit que l'on peut écrire :

$$R^2 = -\frac{\tau}{\rho^2}.$$

Le rayon du cercle trouvé est donc (§ 225) le demi-grand axe, dans le cas de l'ellipse ; et le demi-axe tranverse, dans le cas de l'hyperbole.

243. Théorème VII. *Le produit des distances des deux foyers d'une conique à centre à une tangente quelconque est constant.*

Les deux foyers F,F′ étant symétriques par rapport au centre O de la courbe, et les coordonnées (x_0, y_0) de O étant :

$$x_0 = \frac{tm}{1 - m^2 - n^2}, \quad y_0 = \frac{tn}{1 - m^2 - n^2};$$

il en résulte que les coordonnées x', y', de F′ sont données par les formules :

$$x' = \frac{2mt}{1 - m^2 - n^2}, \quad y' = \frac{2nt}{1 - m^2 - n^2}.$$

Considérons une tangente quelconque Δ et soit :

$$x(m - \cos\varphi) + y(n - \sin\varphi) + t = 0,$$

son équation. Désignons par u, u', les distances des points F,F′ à Δ. Nous avons, en supposant $t > 0$ pour fixer les idées,

$$(1) \quad u = \pm t \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1 - 2m\cos\varphi - 2n\sin\varphi}},$$

$$u' = \pm t \frac{2m(m - \cos\varphi) + 2n(n - \sin\varphi) + 1 - m^2 - n^2}{(1 - m^2 - n^2)\sqrt{m^2 + n^2 + 1 - 2m\cos\varphi - 2n\sin\varphi}};$$

ou,

$$(2) \quad u' = \pm t \frac{\sqrt{m^2 + n^2 + 1 - 2m\cos\varphi - 2n\sin\varphi}}{1 - m^2 - n^2}.$$

Les égalités (1) et (2) donnent :

$$uu' = \pm \frac{t^2}{1 - m^2 - n^2}, \text{ ou } (3) \quad uu' = \mp \frac{\tau}{\rho}.$$

Le produit uu' est donc constant : il est égal au carré du demi petit axe, dans l'ellipse ; et, dans l'hyperbole, égal au carré du demi-axe non transverse.

Dans l'ellipse, on a : $1 - m^2 - n^2 > 0$, et dans la formule (2) il faut prendre le signe $+$; les deux foyers sont situés dans la même région par rapport à une tangente quelconque. Au contraire, dans l'hyperbole, on a $1 - m^2 - n^2 < 0$, il faut prendre le signe $-$, dans la formule (2) ; les deux foyers sont toujours situés dans deux régions différentes, par rapport à une tangente quelconque.

Dans la formule (3), le signe $+$ correspond au cas de l'hyperbole et le signe $-$, au cas de l'ellipse.

244. Théorème VIII. *La somme des distances d'un point de l'ellipse aux deux foyers réels est constante ; dans l'hyperbole, c'est la différence de ces distances qui est constante.*

Cette propriété qui a été adoptée le plus souvent, comme définition élémentaire de l'ellipse et de l'hyperbole, parce qu'elle donne une génération simple et frappante de ces courbes, peut se démontrer de la manière suivante :

Soit M un point de la courbe ; x, y ses coordonnées. On a :

$$\overline{MF}^2 = x^2 + y^2,$$

et, par conséquent,

$$(1) \quad \pm MF = mx + ny + t.$$

D'autre part, on a :

$$\overline{MF'}^2 = \left(x - \frac{2mt}{1 - m^2 - n^2}\right)^2 + \left(y - \frac{2nt}{1 - m^2 - n^2}\right)^2,$$

ou,

$$\overline{MF'}^2 = x^2 + y^2 - 4(mx+ny)\frac{t}{1-m^2-n^2} + \frac{4t^2(m^2+n^2)}{(1-m^2-n^2)^2}.$$

En tenant compte de la relation :

$$x^2+y^2 = (mx+ny)^2 + 2t(mx+ny) + t^2,$$

on trouve :

$$\pm MF' = mx+ny - t\frac{1+m^2+n^2}{1-m^2-n^2}$$

ou, encore,

$$(2) \quad \pm MF' = mx+ny+t - \frac{2t}{1-m^2-n^2}.$$

On peut, par des considérations diverses, notamment en observant que l'ellipse est située tout entière, dans la région comprise entre les deux directrices, tandis que l'hyperbole est extérieure à cette région, reconnaître que dans les égalités (1) et (2) il faut prendre des signes contraires, dans le cas de l'ellipse, et le même signe, dans le cas de l'hyperbole.

On a donc :

$$MF + MF' = \frac{\pm 2t}{\rho}, \quad \text{ou} \quad MF - MF' = \frac{\pm 2t}{\rho},$$

suivant que la courbe considérée est une ellipse, ou une hyperbole.

EXERCICES

1. *Un diamètre d'une ellipse est donné en grandeur et en position ; son conjugué a une longueur constante, mais sa position est mobile ; trouver le lieu des foyers.*

On trouve un ovale de Cassini ayant pour foyers les extrémités du diamètre fixe. Ce résultat s'établit facilement par des considérations géométriques.

2. *Par le foyer d'une ellipse on mène deux rayons vecteurs situés du même côté de l'axe et rencontrant la courbe aux points* A, B. *Démontrer que* AB *passe par un point fixe.*

3. *Un point* M *est mobile sur une ellipse dont les foyers sont* F *et* F'; *on considère le cercle ex-inscrit qui a son point de contact sur le segment* MF; *trouver le lieu décrit par le centre de ce cercle.*

4. *Soient* Δ, Δ' *deux tangentes d'une ellipse* E, *se coupant en* P; F *et* F' *désignant les deux foyers de* E, *on projette* F *sur* Δ *en* A, *et sur* Δ' *en* A'. *Démontrer que* AA' *est perpendiculaire sur* PF'.

5. *On considère deux coniques homofocales* E, E'; *soit* AB *une tangente à* E, *soit* C *son point de contact, et* P *son pôle par rapport à* E'. *Démontrer que* PC *est une normale à* E.

6. *Vérifier par l'analyse le théorème suivant, qui se démontre très simplement par des considérations géométriques élémentaires* (§ 328).

Les tangentes issues d'un point P *à une conique et les droites qui joignent* P *aux foyers admettent les mêmes bissectrices.*

Appliquer cette propriété à deux coniques homofocales.

VINGT-CINQUIÈME & VINGT-SIXIÈME LEÇONS

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES CONIQUES

245. Théorème I. *Par cinq points réels, distincts, situés dans un plan, et tels que, parmi eux, trois quelconques ne soient pas en ligne droite, on peut faire passer une courbe du second degré réelle, et on n'en peut faire passer qu'une seule.*

Désignons les points donnés par A, B, C, D, E.

En joignant le point C aux points D et E, on obtient deux droites distinctes et l'une de ces droites, au moins, n'est pas parallèle à AB. Nous supposerons donc que CD et AB se coupent en un point O, et nous prendrons ces droites pour axes de coordonnées.

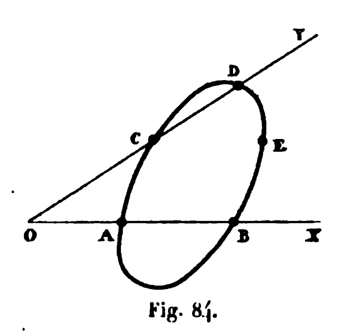


Fig. 84.

Nous poserons :

$$OA = a, \quad OB = b : \quad OC = c, \quad OD = d.$$

L'équation générale des coniques étant :

$$(1)\quad Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'' = 0,$$

la courbe qui correspond à cette équation passera par les points A, B, si, en faisant, dans (1), $y = 0$, l'équation obtenue :

$$Ax^2 + 2B'x + A'' = 0,$$

a pour racines a et b. Nous avons donc :

$$-\frac{2B'}{A} = a + b, \quad \text{et} \quad \frac{A''}{A} = ab.$$

Nous trouverons de même :

$$-\frac{2B}{A'} = c + d, \quad \text{et} \quad \frac{A''}{A'} = cd.$$

En divisant l'équation (1) par A″, quantité différente de zéro, d'après le choix que nous avons fait des axes de coordonnées, nous obtenons l'équation :

$$(1')\quad \frac{x^2}{ab} + \frac{y^2}{cd} + 2\lambda xy - x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - y\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) + 1 = 0,$$

équation dans laquelle λ représente le rapport $\frac{B''}{A''}$.

Désignons maintenant par x', y', les coordonnées du point E et déterminons λ par l'équation :

$$(2)\quad \frac{x'^2}{ab} + \frac{y'^2}{cd} + 2\lambda x'y' - x'\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - y'\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) + 1 = 0.$$

Le point E n'étant situé, d'après l'hypothèse même que nous avons faite, ni sur OX, ni sur OY, nous avons : $x'y' \neq 0$. L'égalité (2) donne donc, pour λ, une valeur finie et bien déterminée.

Ceci posé, l'équation (1′) représente, pour cette valeur de λ, une courbe du second ordre qui passe par les points A, B, C, D, E ; il est donc démontré que l'on peut toujours faire passer une conique par les cinq points donnés.

D'ailleurs on n'en peut faire passer qu'une. Ceci résulte de l'analyse précédente qui, si on la suit avec attention, prouve qu'il n'y a pas d'autres coniques passant par les points A, B, C, D que celles qui correspondent à l'équation (1). On peut aussi remarquer que si l'on trouvait deux coniques distinctes passant par les points A, B, C, D, E, les équations de ces courbes admettraient cinq solutions distinctes, et nous savons (Théorème de Bezout) que deux équations, dont les degrés sont p et q, ont tout au plus pq solutions distinctes. D'après cela, deux équations du second degré ont, tout au plus, quatre solutions distinctes.

246. Remarque I. La démonstration précédente s'applique, avec les modifications connues, au cas où deux points A, B, sont : ou coïncidents, ou imaginaires conjugués, mais en étant situés sur une droite, donnée de position. Elle subsiste encore dans le cas où, parmi les points considérés, quatre points sont deux à deux coïncidents, ou deux à deux imaginaires conjugués, mais placés sur deux droites Δ, Δ', données de position.

Pour établir la démonstration, dans l'une ou l'autre de ces hypothèses, on prendra pour axes de coordonnées Δ et Δ', ou, s'il arrivait que Δ et Δ' fussent parallèles, une droite équidistante de Δ et de Δ' et une autre droite passant par le cinquième point, la démonstration donnée plus haut subit, bien entendu, de légères modifications que nous signalons, sans y insister davantage.

Si trois points A, B, C deviennent coïncidents sur une droite Δ, il y a encore une seule conique passant par les cinq points donnés, cette conique étant constituée par Δ et par la droite DE. On peut même supposer que les points D et E coïncident sur une droite donnée Δ'.

Mais il y a deux cas où le problème qui nous occupe est indéterminé ; 1° quand les quatre points (A, B, C, D) coïncident sur une droite Δ ; 2° quand ils coïncident, deux à deux, sur des droites Δ, Δ', au point qui est commun à ces droites.

Dans la première hypothèse, une conique formée de Δ et *d'une droite quelconque* issue du cinquième point E, passe par les cinq points donnés; dans l'autre cas une conique formée par un faisceau de deux droites, ayant pour centre commun le point d'intersection de Δ et de Δ', l'une des branches passant par le cinquième point E, est une conique indéterminée et qui passe par les cinq points donnés.

Nous appellerons *cas singulier*, ce second cas d'indétermination.

Remarque II. En transformant le théorème précédent, par la méthode des polaires réciproques on obtient la proposition corrélative; cette proposition peut s'énoncer ainsi :

Etant données cinq droites situées dans un plan, et telles que trois quelconques de ces droites ne soient pas concourantes ; on peut toujours tracer une courbe du second ordre tangente à ces droites, et on ne peut en tracer qu'une seule.

247. Théorème II. *Si l'on imagine un quadrilatère dont les côtés aient pour équation, respectivement,*

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0;$$

si P *et* Q *correspondent à deux côtés opposés, l'équation :*

$$(1) \quad \alpha PQ + \beta RS = 0,$$

est l'équation générale des coniques circonscrites à ce quadrilatère.

On voit d'abord que la conique C, qui correspond à l'équation (1) est vérifiée par la solution de l'un ou de l'autre des systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{llll} P = 0 & P = 0 & Q = 0 & Q = 0 \\ R = 0, & S = 0, & R = 0, & S = 0. \end{array} \right.$$

Ainsi C, représente une conique circonscrite au quadrilatère proposé.

D'ailleurs toute conique circonscrite à ce quadrilatère peut être representée par (1) si l'on fait un choix convenable des paramètres α, β.

En effet, soit C′ une de ces coniques, et soit M un point quelconque de C′. En désignant par x', y', les coordonnées de M ; P′, Q′, R′, S′, ayant leur signification ordinaire, l'équation :

$$(1') \quad PQR'S' - RSP'Q' = 0,$$

représente une conique passant par les sommets du quadrilatère proposé et par le point x', y'. Mais nous avons vu, tout à l'heure, que par cinq points on ne pouvait faire passer qu'une seule conique ; concluons donc que la conique qui correspond à l'équation (1′) n'est autre chose que C′. Par conséquent, en prenant :

$$\alpha = R'S', \quad \beta = -P'Q',$$

l'équation (1) représentera la conique C′.

248. Théorème III. *L'équation générale des coniques* Δ, *qui passent par les points communs aux coniques* Γ, γ, *qui correspondent aux équations :*

$$U = 0, \quad u = 0,$$

est (sauf dans le cas singulier) :

$$(1) \quad \alpha U + \beta u = 0.$$

Imaginons en effet une des coniques Δ. Les courbes U et u étant du second ordre, ont quatre points communs (A,B,C,D) : réels, ou imaginaires conjugués, distincts ou coïncidents, à distance finie ou infinie. Nous reviendrons sur ce point dans la leçon suivante, mais il peut être admis, dès maintenant, comme un fait algébrique démontré.

Prenons sur Γ un point M, et soient x', y', ses coordonnées. L'équation :

$$u'U - uU' = 0,$$

représente une courbe du second ordre qui passe par les cinq points A, B, C, D, M. Mais, par cinq points on ne peut faire passer qu'une conique ; l'équation (1) représente donc la conique Γ, si l'on prend :

$$\alpha = u', \quad \text{et} \quad \beta = U'.$$

D'ailleurs, ces quantités, u' et U′, ne sont pas nulles, du moins simultanément ; le point M ne pouvant pas appartenir, à la fois, aux deux coniques Γ, γ.

En résumé, l'équation (1) représente, pour des valeurs convenablement attribuées aux paramètres α, β, une conique quelconque passant par les points communs à Γ, et à γ.

Ce raisonnement est pourtant en défaut dans un cas qui, malgré sa particularité, doit être signalé ; c'est le cas singulier où $U = 0$, et $u = 0$, représentent deux variétés de coniques ayant le même centre O. Dans cette hypothèse, en effet, l'équation (1) ne peut pas représenter une conique quelconque δ passant par les points communs à Γ et à γ ; δ étant formé par *deux droites arbitraires* passant par O.

Réciproquement, toute conique correspondant à (1), passe par les points A, B, C, D.

Lorsque α et β varient, on obtient une infinité de coniques qui, suivant une expression adoptée, constituent un *réseau linéaire de coniques*.

En général, le mot *réseau* correspond à l'idée de coniques mobiles, en nombre infini ; le réseau est *linéaire* quand, parmi ces coniques, *une seule passe par un point donné*.

249. Théorème de Desargues. *Un réseau linéaire détermine, sur une droite fixe* D *deux divisions homographiques en involution.*

Prenons, pour exprimer les coordonnées d'un point de D, les formules :

$$x = x_0 + \alpha\rho, \quad y = y_0 + \beta\rho;$$

et cherchons l'intersection de D avec Γ et γ. En substituant,

à cet effet, x et y dans les formes U, u, on obtient des trinômes du second degré en ρ :

$$M\rho^2 + N\rho + P,$$
$$m\rho^2 + n\rho + p.$$

Par suite, en cherchant l'intersection de D, avec une des coniques Δ du réseau, l'équation de cette courbe étant :

$$\lambda U + u = 0,$$

on a, pour déterminer ρ, l'équation :

$$(1) \quad (\lambda M + m)\rho^2 + (\lambda N + n)\rho + \lambda P + p = 0.$$

Désignons par M_0 le point de D qui a pour coordonnées x_0, y_0; la droite D rencontre Δ en deux points M', M'', et *si* l'on pose :

$$M_0M' = \rho', \quad M_0M'' = \rho'',$$

L'équation (1) donne :

$$\rho' + \rho'' = -\frac{\lambda N + n}{\lambda M + m}, \quad \text{et} \quad \rho'\rho'' = \frac{\lambda P + p}{\lambda M + m}$$

Si entre ces deux relations on élimine λ on obtient, entre ρ' et ρ'', une relation de la forme :

$$H\rho'\rho'' + I(\rho' + \rho'') + J = 0.$$

Les points mobiles M' et M'' décrivent donc deux divisions homographiques, en involution [1].

1. Nous avons donné plus haut (§ 118) la définition des divisions homographiques. Lorsque l'équation homographique :

$$\alpha uv + \beta u + \gamma v + \delta = 0,$$

entre les variables u, v présente le caractère remarquable d'être symétrique par rapport à ces deux lettres (par conséquent, lorsque l'on a $\beta = \gamma$), on exprime ce fait en disant que la relation homographique proposée est en involution.

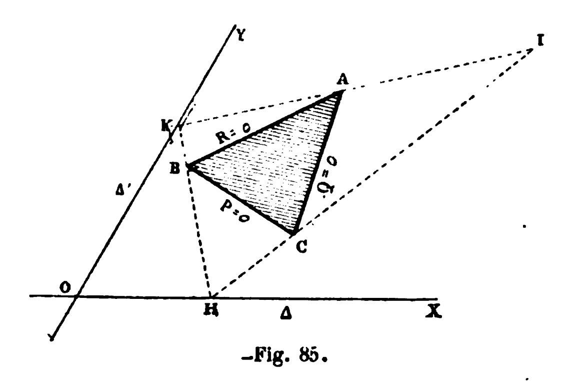
Au point de vue géométrique, on peut remarquer que le théorème précédent est une conséquence immédiate de ce fait que *cinq points donnent une conique bien déterminée.* On voit ainsi qu'au point M′ correspond sur D le seul point M″ et inversement.

De là, la relation homographique en involution, entre les variables ρ', ρ''.

Remarque. Quand un quadrilatère est inscrit à une conique Γ, les deux couples de côté opposés, et Γ, peuvent être considérés comme formant trois coniques du réseau linéaire. *Une transversale quelconque rencontre ces couples, et* Γ, *en six points qui sont en involution.*

Ce corollaire du théorème que nous venons d'établir constitue la propriété qu'avait donnée *Desargues.*

250. Théorème de Mac-Laurin et de Braikenridge. *Étant données deux droites fixes* Δ, Δ′, *et un triangle* ABC ; *autour du sommet* B, *on fait tourner une transversale, qui rencontre* Δ *en* H, *et* Δ′ *en* K : *les droites* CH, AK *se coupent en un point* I, *dont le lieu géométrique est une conique.*



-Fig. 85.

Prenons le triangle ABC pour triangle de référence ; nous savons (§ 73) que les droites Δ et Δ′ ont des équations qui peuvent se mettre sous la forme :

$$(\Delta)\quad \alpha P + \beta Q + \gamma R = 0$$
$$(\Delta')\quad \alpha' P + \beta' Q + \gamma' R = 0$$

La transversale HK a pour équation :

$$(\text{HK}) \quad R - \lambda P = 0,$$

et les intersections de HK avec Δ et Δ' sont déterminées par les relations :

$$(\text{CH}) \quad P(\alpha + \lambda\gamma) + \beta Q = 0,$$

$$(\text{AK}) \quad R\left(\gamma + \frac{\alpha}{\lambda}\right) + \beta Q = 0.$$

La forme des premiers membres de ces équations prouve que la première représente une droite passant par C, l'autre une droite passant par A ; en résumé, ces équations sont celles des droites CH et AK. L'équation du lieu s'obtiendra donc en éliminant λ entre ces deux équations, et l'on trouve ainsi :

$$(\alpha P + \beta Q)(\gamma R + \beta Q) = \alpha\gamma PR.$$

C'est l'équation d'une conique passant par les points A, C.

Cette génération des coniques peut être considérée comme constituant un cas particulier, mais très remarquable, de la génération que nous allons faire connaître et qui est due à Chasles.

251. Théorème de Chasles. *Lorsqu'autour de deux pôles fixes on fait tourner des droites formant des faisceaux homographiques, le point d'intersection des branches correspondantes décrit une conique, passant par les pôles.*

Soient O et O' les pôles des deux faisceaux ; supposons que le premier soit à l'intersection de deux droites fixes ($P = 0$, $Q = 0$) ; l'autre étant le point commun de deux autres droites fixes ($R = 0$, $S = 0$).

Une droite quelconque Δ, passant par O, a pour équation :

$$P - \lambda Q = 0,$$

et une droite Δ', passant par O' correspond à l'équation :

$$R - \mu S = 0.$$

Les droites Δ et Δ' qui sont mobiles, quand on suppose que λ et μ sont variables, décrivent des faisceaux homographiques si les paramètres λ, μ, vérifient constamment l'équation homographique :

$$\alpha\lambda\mu + \beta\lambda + \gamma\mu + \delta = 0.$$

L'équation du lieu est donc :

$$\alpha PR + \beta PS + \gamma RQ + \delta QS = 0.$$

La courbe qui correspond à cette équation est bien une conique passant par les points O, O'.

La réciproque est vraie et s'établit sans difficulté.

252. Théorème de Pappus. *Quand un quadrilatère est inscrit dans une conique donnée* Γ, *le produit des distances d'un point* M, *mobile sur* Γ, *à deux côtés opposés, est au produit des distances du même point aux deux autres côtés, dans un rapport constant.*

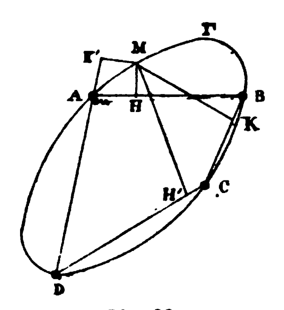


Fig. 86.

En effet, soient :

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

les équations des côtés AB, CD ; et soient :

$$R = 0, \quad S = 0,$$

celles des droites BC, AD. L'équation de la conique est :

$$(1) \quad \alpha PQ + \beta RS = 0.$$

D'autre part, si on abaisse du point M des perpendiculaires sur les côtés du quadrilatère ABCD, m_1, m_2, m_3, m_4 étant des coefficients convenablement choisis, on a :

$$MH = m_1 P, \quad MK = m_2 R, \quad MH' = m_3 Q, \quad MK' = m_4 S.$$

Ces égalités donnent :

$$\frac{MH.MH'}{MK.MK'} = \frac{m_1 m_3}{m_2 m_4} \cdot \frac{PQ}{RS},$$

et, en tenant compte de (1),

$$\frac{MH.MH'}{MK.MK'} = -\frac{6 m_1 m_3}{\alpha m_2 m_4}.$$

Le rapport qui est représenté dans le premier membre de cette égalité a donc une valeur constante.

Il est facile de vérifier que, dans le cas où la conique considérée est une circonférence, la raison constante est égale à l'unité.

253. Théorème de Pascal. *Étant donnés six points placés sur une conique* Γ ; *si l'on joint ces points par un trait continu, de façon à revenir au point de départ, on obtient six cordes qui, d'après l'ordre dans lequel elles ont été obtenues, peuvent être numérotées* 1, 2, 3, 4, 5, 6. *Les cordes* 1, 4 ; 2, 5 ; 3, 6 ; *se coupent en trois points situés en ligne droite, et réciproquement.*

Joignons le point de départ A, au troisième point rencontré par le circuit brisé que nous avons tracé, c'est-à-dire au point D de la figure ci-après ; désignons par $\varphi = 0$, l'équation de AD, et représentons par $P_n = 0$, l'équation de la corde qui porte le numéro n. Considérons maintenant les deux quadrilatères (φ, 1, 2, 3), (φ, 4, 5, 6) qui sont inscrits dans la conique proposée. D'après ce que nous avons vu (§ 247), les équations :

$$(1) \quad \alpha P_2 \varphi + 6 P_1 P_3 = 0,$$

$$(2) \quad \alpha' P_5 \varphi + 6' P_4 P_6 = 0,$$

représentent, l'une et l'autre, l'équation de Γ. Considérons maintenant la combinaison suivante, des équations (1) et (2),

$$(3) \quad \alpha\beta' P_2 P_4 P_6 - \beta\alpha' P_1 P_3 P_5 = 0 ;$$

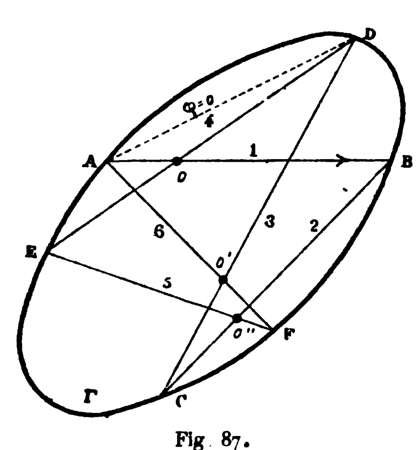


Fig. 87.

cette équation est vérifiée par les coordonnées d'un point quelconque de Γ ; et comme elle est du troisième degré, on peut dire qu'elle représente l'ensemble formé par Γ, et par une certaine droite Δ.

Cette remarque étant faite, on peut observer que les points O, O′, O″ ont des coordonnées qui satisfont à l'équation (3). En effet, si l'on a : $P_1 = 0$ et $P_4 = 0$, cette équation est vérifiée. Il en est encore ainsi, quand on suppose, simultanément :

$$P_2 = 0, \quad \text{et} \quad P_5 = 0, \quad \text{ou:} \quad P_3 = 0, \quad \text{et} \quad P_6 = 0.$$

Ainsi les points O, O′, O″, sont situés sur D ; ce qui démontre la propriété en question, l'une des plus remarquables de la géométrie des coniques.

La réciproque du théorème de Pascal est exacte, elle s'énonce et se démontre sans difficulté, en s'appuyant sur le théorème établi plus haut (§ 245).

254. Théorème de Brianchon. *Étant données six droites tangentes à une conique* Γ, *si l'on imagine un mobile*

parcourant ces droites, de façon à revenir au point de départ, si l'on a numéroté I, II, III, IV, V, VI, *les sommets de l'hexagone que l'on a, ainsi, successivement rencontrés* ; *les droites qui joignent les sommets* I, IV ; II, V ; III, VI ; *concourent au même point ; et réciproquement.*

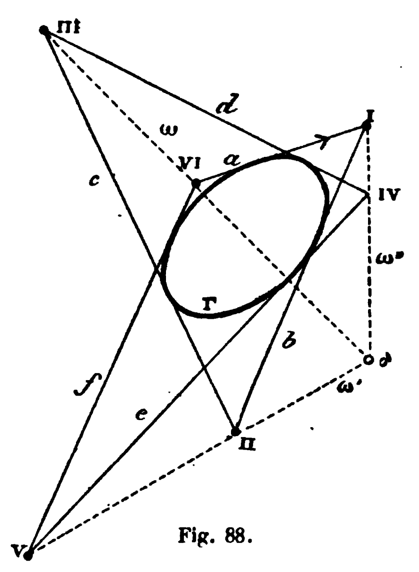


Fig. 88.

Ce théorème se déduit immédiatement du théorème de Pascal par la méthode des polaires réciproques. Aux sommets A, B, C, D, E, F de l'hexagone inscrit (fig. 87), correspondent des tangentes a, b, c, d, e, f qui forment un hexagone circonscrit. A la corde AB correspond le point I (fig. 88) intersection des tangentes a, b ; et ainsi des autres. Les points o, o', o'' (fig. 87) étant en ligne droite, les droites $\omega, \omega', \omega''$ dans la figure corrélative, sont concourantes.

255. Théorème de Newton. *Soit* Γ *une conique fixe, et soient* Δ, Δ' *deux transversales sécantes au point* O, *mobiles, mais restant parallèles à des directions fixes ; ces droites rencontrent* Γ, *la première aux points* A, A' ; *l'autre aux points* B, B' ; *le rapport* $\frac{oA \cdot oA'}{oB \cdot oB'}$ *conserve une valeur constante.*

Ce théorème est vrai pour des courbes d'un ordre quelconque comme le prouve la démonstration suivante.

Soit :

$$F(x,y)=0,$$

l'équation de la courbe Γ; menons par le point $O(x_0,y_0)$, une droite Δ parallèle à la direction (α,β) ; les coordonnées d'un point de Δ sont données par les formules :

$$x=x_0+\alpha\rho, \quad y=y_0+\beta\rho.$$

Si nous désignons par $\varphi_m(x,y)$ l'ensemble des termes homogènes, et du degré m, en x et y, nous aurons pour déterminer les distances OA_1, OA_2, ... OA_m, des points communs à Δ et à Γ, au point O, l'équation :

$$F(x_0,y_0)+\ldots+\rho^m\varphi(\alpha,\beta)=0.$$

Nous déduisons de là :

$$OA_1 \,.\, OA_2 \,.\, \ldots\, OA_m=(-1)^m\frac{F(x_0,y_0)}{\varphi_m(\alpha,\beta)}.$$

Nous trouverions de même :

$$OB_1 \,.\, OB_2 \,.\, \ldots\, OB_m=(-1)^m\frac{F(x_0,y_0)}{\varphi_m(\alpha',\beta')}.$$

Nous avons donc :

$$\frac{OA_1 \,.\, OA_2 \,.\, \ldots\, OA_m}{OB_1 \,.\, OB_2 \,.\, \ldots\, OB_m}=\frac{\varphi_m(\alpha',\beta')}{\varphi_m(\alpha,\beta)}.$$

C'est cette relation qui constitue le théorème de Newton.

256. Théorème de Carnot. *Soit une conique* Γ *et un triangle* ABC, *dans son plan ; un mobile partant du point* A, *par exemple, et parcourant le périmètre du triangle dans le sens* ABC *rencontre successivement la courbe aux points* C_1, C_2 ; A_1, A_2, B_1, B_2; *cela posé, on a la relation* :

$$\frac{AC_1 \,.\, AC_2}{AB_1 \,.\, AB_2}\cdot\frac{BA_1 \,.\, BA_2}{BC_1 \,.\, BC_2}\cdot\frac{CB_1 \,.\, CB_2}{CA_1 \,.\, CA_2}=1.$$

Ce théorème, comme le précédent, appartient aux courbes d'un degré quelconque, et à un nombre quelconque de transversales situées dans le plan de la courbe.

Prenons, pour fixer les idées, trois transversales et soient (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées des points A, B, C. La droite AB rencontre Γ en des points $C_1, C_2, \ldots C_m$ et nous avons, d'après ce que nous venons de voir,

$$BC_1 . BC_2 . \ldots BC_m = (-1)^m \frac{F(x_1, y_1)}{\varphi_m(\alpha, \beta)}.$$

$$AC_1 . AC_2 \ldots AC_m = (-1)^m \frac{F(x_0, y_0)}{\varphi_m(\alpha, \beta)};$$

α, β désignant les paramètres directeurs de AB. Ces relations donnent :

$$(1) \quad \frac{AC_1 . AC_2 \ldots AC_m}{BC_1 . BC_2 \ldots BC_m} = \frac{F(x_0, y_0)}{F(x_1, y_1)}.$$

Nous trouverons, de la même façon, les relations :

$$(2) \quad \frac{BA_1 . BA_2 . \ldots BA_m}{CA_1 . CA_2 \ldots CA_m} = \frac{F(x_1, y_1)}{F(x_2, y_2)},$$

$$(3) \quad \frac{CB_1 . CB_2 \ldots CB_m}{AB_1 . AB_2 \ldots AB_m} = \frac{F(x_2, y_2)}{F(x_0, y_0)}.$$

Si nous multiplions, membre à membre, les égalités (1), (2) et (3), nous avons :

$$\frac{AC_1 . AC_2 \ldots AC_m}{BC_1 . BC_2 \ldots BC_m} \cdot \frac{BA_1 . BA_2 \ldots BA_m}{CA_1 . CA_2 \ldots CA_m} \cdot \frac{CB_1 . CB_2 \ldots CB_m}{AB_1 . AB_2 \ldots AB_m} = 1.$$

Cette égalité démontre, dans le cas de trois transversales, le théorème de Carnot, qui, pour des raisons rendues évidentes par ce calcul précédent, est vrai, quel que soit le nombre des transversales considérées.

257. Corollaires des théorèmes de Pascal et de Brianchon. Si nous supposons que dans la figure (87) les

points A, B, ... F, viennent coïncider dans les conditions suivantes : 1° A et B, 2° A et B d'une part, C et D d'autre part 3° A et B, d'un coté; C et D, d'un autre coté; et, enfin, E et F, d'un troisième coté ; on obtient de nombreux et intéressants corollaires du théorème de Pascal donnant des propriétés sur les pentagones, les quadrilatères et les triangles inscrits dans les coniques.

Cette remarque importante s'applique à la figure (88) quand on suppose que l'on fait coïncider, deux à deux, les tangentes a, b ; c, d ; e, f.

Par exemple, on peut considérer la proposition suivante comme un corollaire du théorème de Pascal.

Théorème. *Si un triangle* ABC *est inscrit dans une conique* Γ, *la tangente à* Γ, *au point* A, *rencontre* BC *en un point* A'; *les trois points* A', B', C', *ainsi obtenus sont en ligne droite.*

De même, la propriété que nous allons énoncer peut être considérée comme un corollaire du théorème de Brianchon.

Théorème. *L'orsqu'une conique* Γ *est inscrite à un triangle* ABC, *si l'on désigne par* A' *le point de contact de* BC *avec* Γ, *la droite* AA' *et les droites analogues* BB', CC', *concourent au même point.*

Nous allons d'ailleurs établir directement ces deux propositions et faire connaître, à ce propos, les équations des coniques inscrites et circonscrites à un triangle.

258. Coniques circonscrites à un triangle. Désignons par :

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$

les équations des côtés du triangle proposé ABC et prenons ABC pour triangle de référence. L'équation générale des coniques situées dans son plan (§ 74) est :

$$(1) \quad \alpha P^2 + \alpha' Q^2 + \alpha'' R^2 + 2\beta QR + 2\beta' RP + 2\beta'' PQ = 0.$$

Soient x_0, y_0, les coordonnées du point A ; les trois droites AB, AC, BC, n'étant pas concourantes, on a :

$$Q_0 = 0, \quad R_0 = 0, \quad \text{et} \quad P_0 \neq 0.$$

La conique Γ passant par A, on doit avoir :

$$\alpha P_0^2 = 0,$$

et, par conséquent, $\alpha = 0$. On trouve de même, $\alpha' = 0$, et $\alpha'' = 0$. L'équation (1) prend donc la forme :

$$(C) \quad \beta QR + \beta' RP + \beta'' PQ = 0.$$

Cette équation peut s'écrire encore :

$$(C') \quad \frac{\beta}{P} + \frac{\beta'}{Q} + \frac{\beta''}{R} = 0.$$

et, sous la forme (C), ou sous la forme (C'), représente l'équation générale des coniques circonscrites au triangle considéré.

Cherchons l'équation de la tangente au point A. Une droite quelconque Δ, passant par ce point peut être représenté par l'équation :

$$(\Delta) \quad \lambda Q - \mu R = 0.$$

Son intersection avec la conique (C) est déterminée par la relation :

$$R\,[\beta\mu R + (\beta'\lambda + \beta''\mu)\,P] = 0.$$

laquelle donne :

$$R = 0, \quad \text{et}, \quad \beta\mu R + (\beta'\lambda + \beta''\mu)\,P = 0.$$

On conclut de là que la condition nécessaire et suffisante pour que Δ soit tangente à (C) est :

$$\beta'\lambda + \beta''\mu = 0.$$

L'équation de la tangente au point A est donc :

$$\beta' R + \beta'' Q = 0,$$

ou,

$$\frac{Q}{\beta'} + \frac{R}{\beta''} = 0.$$

Si l'on appelle A′ le point de rencontre A, avec BC, les coordonnées de ce point sont déterminées par les relations :

$$P = 0, \quad \frac{Q}{\beta'} + \frac{R}{\beta''} = 0.$$

On voit donc que le point A′, et les points analogues B′, C′, appartiennent à la droite qui a pour équation :

$$\frac{P}{\beta} + \frac{Q}{\beta'} + \frac{R}{\beta''} = 0.$$

Le corollaire du théorème de Pascal, signalé plus haut, se trouve ainsi établi, par une analyse directe.

259. Coniques inscrites à un triangle. Les notations précédentes étant conservées, si l'on suppose que la droite BC soit tangente à la conique Γ qui correspond à l'équation (1), on a :

$$\beta^2 = \alpha'\alpha''.$$

On trouve, de même,

$$\beta'^2 = \alpha\alpha'',$$
$$\beta''^2 = \alpha\alpha'.$$

Ces relations donnent, par combinaison, $\beta\beta'\beta'' = \pm \alpha\alpha'\alpha''$. Prenons d'abord le signe — ; l'équation (1) devient :

$$\text{(I)} \quad \frac{P^2}{\beta^2} + \frac{Q^2}{\beta'^2} + \frac{R^2}{\beta''^2} - \frac{2RQ}{\beta'\beta''} - \frac{2PR}{\beta\beta''} - \frac{2PQ}{\beta\beta'} = 0.$$

Le signe + conduit à l'équation :

$$\left(\frac{P}{\beta} + \frac{Q}{\beta'} + \frac{R}{\beta''}\right)^2 = 0.$$

à laquelle correspond une droite double. Ainsi l'équation (I) représente, seule, l'équation générale des coniques inscrites dans le triangle de référence.

En faisant P = 0 dans l'équation (I), on voit que si l'on

appelle A′ le point de contact de BC avec Γ, les coordonnées de ce point vérifient la relation :

$$\frac{Q}{6'} - \frac{R}{6''} = 0.$$

La droite qui correspond à cette équation passant évidemment par le point A, on conclut de cette remarque que les droites AA′, BB′, CC′ ont, respectivement, pour équation :

$$\frac{Q}{6'} - \frac{R}{6''} = 0, \quad \frac{R}{6''} - \frac{P}{6} = 0, \quad \frac{P}{6} - \frac{Q}{6'} = 0.$$

Ces trois droites concourent au point dont les coordonnées vérifient les relations :

$$\frac{P}{6} = \frac{Q}{6'} = \frac{R}{6''}.$$

Cette propriété constitue le corollaire, cité plus haut (§ 257), du théorème de Brianchon.

260. Coniques inscrites à un angle. Nous avons vu que l'équation générale des coniques circonscrites à un quadrilatère, pouvait être mise sous la forme :

$$\alpha PQ + 6RS = 0.$$

On peut supposer que les paramètres $\alpha, -6$, sont introduits dans les formes P et R et nous prendrons l'équation :

$$PQ = RS,$$

comme représentant l'équation générale des coniques circonscrites au quadrilatère, les côtés opposés ayant pour équation, respectivement,

$$(A) \begin{cases} P = 0, \\ Q = 0; \end{cases} \quad \text{et,} \quad (B) \begin{cases} R = 0, \\ S = 0. \end{cases}$$

Si l'on suppose, maintenant, que les droites (B) viennent se

confondre, la conique considérée Γ est tangente aux droites (A), et,

$$PQ = R^2,$$

représente l'équation générale des coniques tangentes aux droites qui ont pour équation : $P = 0, Q = 0$; la corde des contacts ayant pour équation : $R = 0$.

Cette forme remarquable donnée à l'équation d'une conique conduit, si l'on cherche son interprétation géométrique, au théorème suivant, qui est un corollaire évident du théorème de Pappus :

Théorème IV. *Soit* AB *une corde quelconque d'une conique* Γ, *le carré de la distance d'un point* M *de* Γ *à cette corde est au produit des distances de ce même point aux tangentes en* A *et* B, *dans un rapport constant.*

Lorsque la corde AB est un diamètre, ce théorème donne l'équation de la conique rapportée à deux diamètres conjugués.

Aux propriétés diverses que nous venons d'exposer et qui, avec celles qui sont relatives aux foyers et aux directrices, constituent les théorèmes fondamentaux de l'étude des coniques nous ajouterons encore les théorèmes suivants, qui sont fréquemment employés.

261. Théorème V. *La droite qui joint un point* P *au milieu de la corde des contacts des tangentes issues de* P *à une conique* Γ *passe par le centre de* Γ, *si* Γ *a un centre, ou est parallèle à l'axe de la courbe, si* Γ *est une parabole.*

Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de P ; la polaire p, de ce point, a pour équation :

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0,$$

et le diamètre conjugué de p :

$$f'_x f'_{y_0} - f'_y f'_{x_0} = 0.$$

Cette équation est évidemment vérifiée par $x = x_0$, $y = y_0$; et ceci prouve la proposition énoncée.

262. Théorème VI. *Le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère est la droite qui joint les milieux des diagonales de ce quadrilatère.* (Newton.)

Cherchons d'abord l'équation générale des coniques inscrites dans un quadrilatère.

Nous prendrons pour axes de coordonnées deux côtés opposés de ce quadrilatère, chose toujours possible, même dans le cas où la figure proposée est un parallélogramme puisque l'on peut, dans ce cas, prendre pour axes ses diagonales.

Soient :

$$(\Delta)\quad \frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1=0,\qquad (\Delta')\quad \frac{x}{p'}+\frac{y}{q'}-1=0,$$

les équations des deux autres côtés. Nous avons trouvé plus haut (§ 259), l'équation générale des coniques inscrites dans le triangle dont les côtés ont pour équation, respectivement,

$$P=0,\quad Q=0,\quad R=0.$$

On peut remarquer, à ce propos, que cette équation peut se mettre sous la forme irrationnelle :

$$\pm\sqrt{\frac{P}{\beta}}\pm\sqrt{\frac{Q}{\beta'}}\pm\sqrt{\frac{R}{\beta''}}=0$$

forme remarquable et qui peut servir, commodément, de point de départ pour les calculs relatifs aux coniques tangentes à plusieurs droites.

D'après cette remarque, l'équation :

$$(1)\quad \pm\sqrt{\lambda\frac{x}{p}}\pm\sqrt{\mu\frac{y}{q}}=\sqrt{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1},$$

représente l'équation générale des coniques Γ tangentes aux axes et à (Δ) ; λ et μ désignent deux paramètres variables et indépendants. Nous allons chercher quelle relation doivent vérifier λ et μ, pour que Γ soit tangente à (Δ').

L'équation (Γ) rendue rationnelle s'écrit :

$$(2) \qquad \left[\frac{x}{p}(\lambda-1)+\frac{y}{q}(\mu-1)+1\right]^2 = 4\lambda\mu\frac{xy}{pq}.$$

Un calcul tout semblable, prouve que l'équation :

$$(3) \qquad \left[\frac{x}{p'}(\lambda'-1)+\frac{y}{q'}(\mu'-1)+1\right]^2 = 4\lambda'\mu'\frac{xy}{p'q'},$$

représente aussi la conique Γ. Les équations (1) et (2) ont le même terme constant, et elles sont identiques. En égalant les coefficients des termes en x, en y et en xy, on a :

$$\ldots 1 = \frac{\lambda'-1}{p'}, \quad \frac{\mu-1}{q}=\frac{\mu'-1}{q'}, \text{ et } \frac{(\lambda-1)(\mu-1)-2\lambda\mu}{pq}=\frac{(\lambda'-1)(\mu'-1)-2\lambda'\mu'}{p'q'}.$$

Des deux premières, on déduit d'abord :

$$\frac{(\lambda-1)(\mu-1)}{pq}=\frac{(\lambda'-1)(\mu'-1)}{p'q'},$$

puis, par combinaison avec la troisième,

$$\frac{\lambda\mu}{pq}=\frac{\lambda'\mu'}{p'q'}.$$

On a donc, entre λ et μ, la relation :

$$\frac{\lambda\mu}{pq}=\left(\frac{\lambda-1}{p}+\frac{1}{p'}\right)\left(\frac{\mu-1}{q}+\frac{1}{q'}\right),$$

ou, après simplification,

$$(A) \qquad \frac{\lambda p'}{p-p'}+\frac{\mu q'}{q-q'}+1=0.$$

Nous ferons ici, à propos de l'exercice qui nous occupe, la remarque suivante qui intéresse tous les problèmes dans lesquels on cherche le lieu décrit par le centre d'une conique mobile.

Pour trouver ce lieu géométrique on peut considérer le centre comme étant à l'intersection des droites qui correspondent aux équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ (§ 177); mais la considération de ces droites n'est pas nécessaire et il y a quelquefois avantage à considérer le centre de la conique comme déterminé par d'autres conditions. Par exemple, et comme nous l'avons déjà fait remarquer, si l'équation de la conique se présente sous la forme $\varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2 = 1$, le centre est à l'intersection des droites qui ont pour équation : $P = 0$, et $Q = 0$; dans d'autres cas, on pourra considérer le centre comme un point situé au milieu de la corde qu'on obtient en prenant le diamètre conjugué d'une direction donnée.

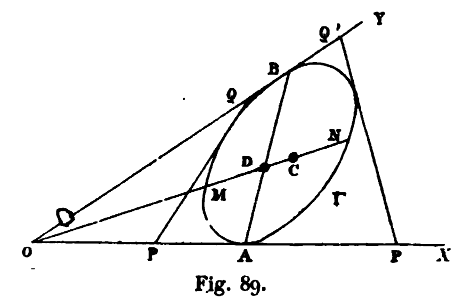


Fig. 89.

Revenons à la démonstration du théorème de Newton.

L'équation (2) prouve que l'on a :

$$OA = \frac{p}{1-\lambda}, \quad \text{et} \quad OB = \frac{q}{1-\mu}.$$

Le centre C de la conique Γ se trouve donc sur la droite qui a pour équation :

$$\frac{x(1-\lambda)}{p} = \frac{y(1-\mu)}{q}.$$

La droite OC rencontre Γ en deux points M et N et si l'on cherche les ordonnées des points M et N, elles sont déterminées par la relation :

$$4\frac{y^2}{q^2}\frac{\mu-1}{\lambda-1}(1-\lambda-\mu) + 4\frac{y}{q}(\mu-1) + 1 = 0.$$

L'ordonnée du point C est donc donnée par la formule :

$$\text{(B)} \qquad 2\frac{y}{q} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + \mu - 1},$$

et l'abcisse de C, par l'égalité :

$$\text{(C)} \qquad 2\frac{x}{p} = \frac{\mu - 1}{\lambda + \mu - 1}.$$

Entre les équations (A), (B), (C) il reste à éliminer les paramètres λ, μ et l'on trouve, finalement,

$$x(q - q') + y(p - p') + \frac{1}{2}(p'q' - pq) = 0.$$

On reconnait sans difficulté que cette équation est vérifiée par les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{p'}{2}, \\ y &= \frac{q}{2}; \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{p}{2}, \\ y &= \frac{q'}{2}; \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{pp'}{2} \cdot \frac{q - q'}{qp' - pq'} \\ y &= \frac{qq'}{2} \cdot \frac{p' - p}{qp' - pq'}. \end{aligned} \right.$$

La droite de Newton passe donc par les milieux des diagonales du quadrilatère, et ce fait pouvait être prévu, *a priori*, en considérant les diagonales en question comme des coniques aplaties, tangentes aux quatre droites données.

263. Paraboles tangentes à deux droites. Si nous considérons les paraboles tangentes à deux droites et si nous prenons ces droites pour axes de coordonnées, l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} + 2\frac{x}{a} + 2\frac{y}{b} + 1 = 0$$

dans laquelle a, b représentent les distances des points de contact au point de concours des tangentes, représente l'équation générale des paraboles inscrites dans l'angle yox.

264. Paraboles tangentes à trois droites. L'équation (2) (§ 262) représente une parabole lorsque l'on a :

$$\frac{(\lambda-1)^2}{p^2}\cdot\frac{(\mu-1)^2}{q^2}=\left[\frac{(\lambda-1)(\mu-1)}{pq}-\frac{2\lambda\mu}{pq}\right]^2,$$

ou, en développant, et en simplifiant,

$$\lambda\mu(\lambda+\mu-1)=0.$$

L'équation générale des paraboles inscrites au triangle formé par les axes et par la droite qui a pour équation :

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1=0,$$

est donc :

$$\left[\frac{x}{p}(\lambda-1)+\frac{y}{q}(\mu-1)+1\right]^2=4\lambda\mu\frac{xy}{pq},$$

avec la condition

$$\lambda+\mu=1.$$

On peut aussi prendre l'équation, homogène en λ et μ,

$$\left(\mu\frac{x}{p}+\lambda\frac{y}{q}-\lambda-\mu\right)^2=4\lambda\mu\frac{xy}{pq}.$$

EXERCICES

1. *Démontrer que si trois coniques $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$, ont une corde commune, les trois autres cordes sont concourantes.*

En désignant par $P=0$, l'équation de la sécante commune, les coniques ont, respectivement, pour équation :

$$\alpha P^2+\beta PQ+\gamma PR+QR=0,$$
$$\alpha' P^2+\beta' PQ+\gamma' PR+QR=0,$$
$$\alpha'' P^2+\beta'' PQ+\gamma'' PR+QR=0;$$

et les trois sécantes non communes correspondent aux équations suivantes :

$$(\alpha-\alpha')\,P+(\beta-\beta')\,Q+(\gamma-\gamma')\,R=0,$$
$$(\alpha'-\alpha'')\,P+(\beta'-\beta'')\,Q+(\gamma'-\gamma'')\,R=0,$$
$$(\alpha''-\alpha)\,P+(\beta''-\beta)\,Q+(\gamma''-\gamma)\,R=0.$$

On voit que ces équations, ajoutées membre à membre, donnent lieu à une identité. La proposition est ainsi établie ; on peut en déduire le théorème de Pascal.

2. *Démontrer qu'en prenant pour axe de coordonnées des parallèles aux côtés d'un parallélogramme, menées par le centre, l'équation générale des coniques inscrites est :*

$$\frac{x^2}{a^2}+2\lambda\frac{xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}+\lambda^2-1=0.$$

3. Si *l'on prend pour axes de coordonnées, les diagonales du parallélogramme, l'équation générale des coniques inscrites est :*

$$\frac{x^2}{a'^2\sin^2\varphi}+\frac{y^2}{b'^2\cos^2\varphi}=1.$$

4. *Lorsque trois droites* AA', BB', CC', *prises dans le plan d'un triangle* ABC, *sont concourantes, il existe une conique* Γ *inscrite au triangle et ayant pour points de contact les points* A', B', C'. *Démontrer aussi que la droite qui joint le milieu de* BC *avec le milieu de* AA', *et les deux autres droites analogues, concourent au centre de* Γ.

5. *Lorsqu'une hyperbole équilatère est circonscrite à un triangle, elle passe par le centre des hauteurs de ce triangle.*

On prend pour axes de coordonnées un côté du triangle et la hauteur correspondante ; puis on applique l'équation (1') (§ 245).

6. *Le lieu des centres des coniques circonscrites à un quadrilatère est une conique passant par les milieux des côtés du quadrilatère, et par les points de concours des diagonales.* (Conique des neuf points.)

7. *Le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est le cercle des* 9 *points du triangle.*

8. *Si l'on considère un réseau de coniques passant par quatre points fixes, les polaires d'un point quelconque supposé fixe, passent toutes par un même point.* (Théorème de Lamé.)

9. *Si l'on considère un réseau de coniques inscrites dans un quadrilatère fixe, le lieu des pôles d'une droite fixe quelconque est une droite.*

(Généralisation du théorème de Newton.)

10. *Démontrer géométriquement le théorème de Pascal.*

On considère le triangle formé par les côtés 1, 3, 5 de l'hexagone de Pascal, et on s'appuie sur le théorème des transversales et sur le théorème de Carnot.

L'idée de cette démonstration paraît due à Sturm.

VINGT-SEPTIÈME LEÇON

INTERSECTION DE DEUX CONIQUES

(CAS GÉNÉRAL)

Le problème que nous nous proposons de traiter, dans cette leçon, peut s'énoncer ainsi : *Étant données, dans un système d'axes, les équations de deux coniques, étudier au point de vue du nombre et de la nature de leurs points communs, la situation relative de ces deux courbes.*

265. Théorème. *Deux coniques C, c; situées dans le même plan et qui n'ont pas de direction asymptotique commune, ont quatre points communs réels, imaginaires ou coïncidents, situés à distance finie.*

Soient :

$$(1) \quad U = 0, \quad u = 0$$

les équations des deux coniques proposées ; en posant :

$$U = Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'',$$
$$u = ax^2 + a'y^2 + 2b''xy + 2by + 2b'x + a''.$$

La méthode naturelle pour trouver le nombre et la nature des points communs aux coniques C et c, consiste à résoudre les équations (1). A cet effet, on formera le résultant en x de ces équations, ou le résultant en y, comme l'on voudra. En désignant ces résultants par R (x), et par r (y), on devra considérer l'une ou l'autre des équations :

$$(A) \quad R(x) = 0, \qquad (B) \quad r(y) = 0\,;$$

dans lesquelles on a :

$$R(x) = \{ a'(Ax^2 + 2B'x + A'') - A'(ax^2 + 2b'x + a'') \}^2$$
$$- 4 \{ A'(b''x + b) - a'(B''x + B) \}$$
$$\{ (B''x+B)(ax^2+2b'x+a'') - (b''x+b)(Ax^2+2B'x+A'') \}$$

Le coefficient K, de x^4, dans le second membre de cette identité, est donné par la formule :

$$K = (Aa' - aA')^2 - (A'b'' - a'B'')(B''a - b''A).$$

Cette quantité est différente de zéro si les deux équations:

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 = 0,$$
$$ax^2 + 2b''xy + a'y^2 = 0,$$

n'ont pas de racine commune (Alg. § 150) ; c'est-à-dire, si les courbes C, *c*, n'ont pas de direction asymptotique commune (§ 215, 4°). L'équation (A) admet donc quatre racines de la forme $\alpha + \beta i$, α et β étant des nombres finis. Comme nous l'avons expliqué en algèbre (Alg. § 392), les équations (A) et (B) admettent quatre solutions, dans le sens général et algébrique que nous donnons à ce mot ; ces solutions pouvant être réelles ou imaginaires, distinctes ou coïncidentes, mais non infinies, du moins dans le cas que nous discutons, celui où les directions asymptotiques sont distinctes.

Pour bien reconnaître que la solution n'est pas infinie, comme nous venons de l'affirmer, il ne suffit pas d'avoir observé, comme nous l'avons fait tout à l'heure, que la valeur de x n'est pas infinie, il faut encore remarquer que la valeur correspondante, ou les valeurs correspondantes de y sont aussi finies. Ce dernier fait est mis en évidence par l'équation (B), dans laquelle le coefficient de y^4 est précisément le nombre K ; la valeur de K restant identique à elle-même quand on permute, deux à deux : A, A', d'une part ; a, a', d'autre part.

266. Intersection de coniques ayant des directions asymptotiques, ou des asymptotes, communes. Nous

débarrasserons tout d'abord le problème qui nous occupe des cas particuliers qui correspondent à l'hypothèse où les coniques ont des directions asymptotiques, ou des asymptotes, communes.

1° *Une direction asymptotique commune.* Le calcul indiqué au paragraphe précédent, conduit immédiatement à une équation du troisième degré. On pourra discuter, et résoudre quand la chose sera possible, cette équation ; et, en associant aux valeurs trouvées pour x, les valeurs correspondantes de y, on pourra déterminer la situation respective des deux coniques. On pourra, d'ailleurs, suivre la méhode que nous allons donner plus loin, pour le cas général, et qui conduit, elle aussi, à une équation du troisième degré.

2° *Les deux directions asymptotiques sont communes.* Dans cette hypothèse les coefficients des termes du second degré sont proportionnels ; c'est le cas des coniques que nous avons appelées, précédemment, *homothétiques.* Au point de vue nouveau qui nous occupe en ce moment, celui de l'intersection des coniques, on voit que si nous avons, comme nous le supposons,

$$\alpha A - \beta a = 0, \quad \alpha A' - \beta a' = 0, \quad \alpha B'' - \beta b'' = 0,$$

α et β n'étant pas nuls ; la résolution des équations (1) peut être effectuée en prenant l'une d'elles, et la suivante :

$$\alpha U - \beta V = 0,$$

laquelle est du premier degré. Les deux coniques ont donc seulement deux points communs à distance finie.

On peut ainsi considérer deux coniques homothétiques et en particulier, deux circonférences quelconques dans un plan, comme ayant deux points communs avec la droite de l'infini du plan de ces courbes. Quoi qu'il en soit, le problème de l'intersection dépend d'une équation du second degré et ne doit pas nous occuper davantage.

3° *Une asymptote commune.* Soit $P = 0$, l'équation de

l'asymptote commune aux courbes C, c ; en désignant par $Q = o$, $q = o$, celles des autres asymptotes, par H et h des constantes, on sait que l'on a :

$$U = PQ + H,$$
$$u = Pq + h.$$

Ces identités donnent, par combinaison,

$$Uh - uH = P(Qh - qH).$$

La résolution du système proposé est ainsi ramenée à celle d'une des équations données et de la suivante :

$$P(Qh - qH) = o.$$

En prenant l'hypothèse $P = o$, on a deux points rejetés à l'infini ; les deux autres points sont déterminés par *une* équation du second degré ($V = o$, ou $u = o$), et par l'équation du premier degré :

$$Qh - qH = o.$$

Nous ne nous occuperons pas des cas plus singuliers encore que ceux que nous venons de citer et qui rentrent dans ceux-ci. Les uns et les autres correspondent à des problèmes quadratiques et qui donnent lieu à des solutions élémentaires. Pourtant dans le premier cas, celui où il y a une direction asymptotique unique, commune ; la solution du problème, comme dans le cas général, dépend alors d'une équation du troisième degré.

Mais avant d'aborder le cas général, celui où les points communs sont distincts, nous voulons encore faire remarquer que l'on peut en excepter celui où l'une ou l'autre des équations (A) ou (B) a deux racines égales. Lorsque cette circonstance particulière se produit, le problème proposé est évidemment quadratique, et il est inutile d'aller chercher une solution dépendant d'une équation du troisième degré, pour un problème qui, abordé par la méthode naturelle, se résout complètement par des équations du premier et du second degré tout au plus.

267. Équation en λ, μ. Nous avons vu que la recherche de l'intersection de deux coniques s'obtenait par la résolution d'une équation du quatrième degré. Mais comme nous l'avons montré déjà (Alg. § 538 et 539), une pareille résolution dépend de celle d'une résolvante du troisième degré. Des considérations algébriques qui se présentent naturellement dans cette question et qui ont été employées déjà (Alg. *loc. cit.*), vont nous permettre de simplifier, dans une certaine mesure, le problème de l'intersection de deux coniques, en le faisant dépendre d'une équation du troisième degré.

Au lieu de résoudre le système (1), il est naturel de remplacer l'une des équations de ce système par la combinaison suivante :

$$(1') \quad \lambda U + \mu u = 0,$$

et de disposer des paramètres λ et μ de façon que la forme $\lambda U + \mu u$, se décompose en un produit de deux facteurs linéaires. A cet effet, écrivons que le discriminant de cette forme est nul et nous avons, pour déterminer λ et μ, la relation :

$$\begin{vmatrix} \lambda A + \mu a, & \lambda B'' + \mu b'', & \lambda B' + \mu b' \\ \lambda B'' + \mu b'', & \lambda A' + \mu a', & \lambda B + \mu b \\ \lambda B' + \mu b', & \lambda B + \mu b, & \lambda A'' + \mu a'' \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on désigne par Δ le discriminant de la forme U; par δ, celui de la forme u ; l'équation précédente peut s'écrire :

$$\Delta\lambda^3 + M\lambda^2\mu + N\lambda\mu^2 + \delta\mu^3 = 0 \qquad (I)$$

En supposant que C et c, soient de vraies coniques, on voit que cette équation entre λ et μ n'admet aucune solution nulle pour λ, ou pour μ.

En donnant à l'une des variables, à μ par exemple, une valeur déterminée ($\mu = 1$), on obtient une équation du troisième degré en λ, laquelle peut admettre, suivant les cas proposés, des racines réelles ou des racines imaginaires, des

racines distinctes ou des racines égales. Les développements qui vont suivre ont pour but de montrer comment *par l'étude, et notamment par la discussion de l'équation* (I), *on peut reconnaître quelle est la situation relative des deux coniques.*

Nous nous occuperons d'abord du *cas général,* celui où les quatre points communs aux coniques C, c, sont distincts.

268. Définition des couples et des centres. Nous donnerons, préalablement, quelques définitions et nous entrerons dans certaines explications préliminaires qui prépareront utilement la discussion qui va suivre.

L'équation en λ admet trois racines qui ne sont ni nulles, ni infinies, et que nous désignerons par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. A chacune de ces valeurs de λ correspond pour la forme $\lambda U + u$, une décomposition en facteurs linéaires et nous aurons :

$$(\alpha) \quad \lambda_1 U + u \equiv P_1 Q_1, \quad \lambda_2 U + u \equiv P_2 Q_2, \quad \lambda_3 U + u \equiv P_3 Q_3.$$

Si l'on considère les droites qui correspondent aux équations :

$$P_1 = 0, \quad Q_1 = 0,$$

nous dirons que ces droites constituent un *couple* relativement aux coniques C, c; et que leur point de rencontre est le *centre* de ce couple.

Il y a ainsi trois couples, et trois centres correspondants, que nous allons avoir à considérer. Les identités (α) prouvent d'ailleurs que la droite d'un couple passe toujours par deux des points d'intersection des coniques données.

Mais les points communs à C et à c peuvent, dans le cas général qui nous occupe, être réels ou imaginaires ; de là, différents cas que nous examinerons successivement.

269. Discussion de l'équation en λ. (*Cas général*) :

1° *Quatre points réels distincts* (A, B, C, D). Il existe alors trois couples réels, distincts, passant par ces points, (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC) ; les centres de ces couples sont eux-mêmes des points réels ; il est facile de reconnaître que l'équation en λ a, dans ce cas, ses racines réelles et distinctes.

En effet, l'équation $\lambda U + u = 0$, représente l'équation générale de toutes les coniques passant par les points communs à C et à c, et à cette équation ne peut correspondre une variété de coniques que si son discriminant est nul. L'équation en λ que nous avons formée et qui est du troisième degré, donne seulement trois couples ; comme elle doit précisément fournir les trois couples (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC), qui sont réels et distincts, les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, des équations ($\alpha$), doivent être réels et distincts.

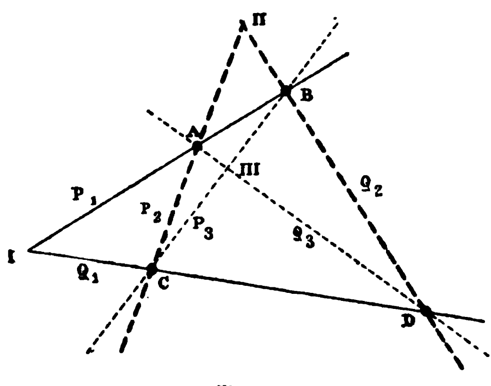


Fig. 90.

2° *Deux points réels, les deux autres imaginaires.* Soient A et B (fig. 100) les points réels ; par les points imaginaires (que nous avons symboliquement représentés en C et D), passe par une droite réelle P_2, puisque ces points sont imaginaires conjugués, leur coordonnées étant des racines appartenant à des équations à coefficients réels ; le couple (P_1, P_2) est réel, ainsi que son centre. La droite qui passe par le point A et, dans le sens attribué à ce mot (§ 83), par le point imaginaire C, est une droite imaginaire. En effet, si elle était réelle, les coordonnées de C vérifiant les équations des deux droites réelles AC et CD, seraient réelles ; ce que nous ne supposons pas. Cette remarque s'applique à toutes les droites des couples 2 et 3 ; ces couples sont donc imaginaires, et les racines λ_2 et λ_3 sont, par conséquent, imaginaires elles-mêmes.

Il faut encore observer que les centres des couples 2 et 3 sont aussi des points imaginaires. En effet, si les équations imaginaires des droites AD, BC, étaient vérifiées par une solution réelle, la droite AD passerait par deux points réels, savoir : le point A, et le point commun aux droites AD et BC; points qui sont nécessairement distincts.

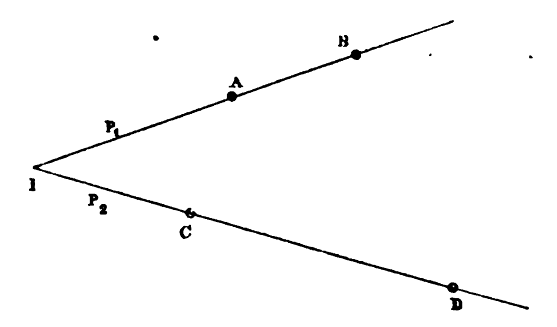


Fig. 91.

Ainsi l'équation en λ a deux racines imaginaires ; il y a un seul couple réel, et, aussi, un seul centre réel.

3° *Quatre points imaginaires.* Représentons ces points symboliquement sur la figure ci-dessous par (A, B); (C, D). Ces points sont, deux à deux, imaginaires, conjugués, pour la raison déjà donnée tout à l'heure. La droite AB est réelle; il en est de même de la droite CD, ces droites passant par deux points imaginaires conjugués (§ 83).

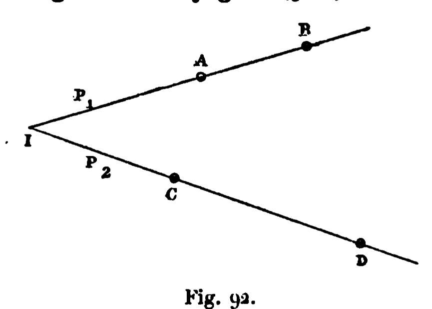


Fig. 92.

Considérons maintenant la droite dont l'équation est vérifiée par les coordonnées (imaginaires) des points B et C;

cette droite est imaginaire, car si elle était réelle, le point B, dont les coordonnées pourraient vérifier deux équations linéaires à coefficients réels, serait réel. Ainsi BC est une droite imaginaire; il en est de même de AD.

Mais il faut ajouter que ces droites sont imaginaires conjuguées, parce que l'équation de l'une peut se déduire de celle de l'autre par le changement de i en $-i$. Or, deux droites imaginaires conjuguées forment un couple dont l'équation est :

$$(\rho+\nu i)(\rho-\nu i)=0,$$

ou,

$$(1)\quad \rho^2+\nu^2=0;$$

ρ et ν désignant des fonctions linéaires réelles. Le centre de ce couple est donc réel. En résumé, dans le cas où les quatre points sont imaginaires, il existe un couple réel et deux couples imaginaires, mais ayant des centres réels ; par suite, l'équation en λ a ses trois racines réelles puisque les coefficients de (1) sont réels, chose qui ne saurait se réaliser avec une équation de la forme :

$$U(m+ni)+u=0,$$

dans laquelle U et u ont des coefficients réels.

Le tableau suivant résume cette discussion.

Équation en λ. — (Cas général.) — (*Racines distinctes.*)

Trois racines réelles.	Trois couples réels. Trois centres réels.	Quatre points réels, distincts.
Une seule racine réelle.	Un seul couple réel. Un seul centre réel.	Deux points réels. Deux points imaginaires.
Trois racines réelles.	Un seul couple réel. Trois centres réels.	Quatre points imaginaires.

D'après ce tableau, ayant formé l'équation en λ, une discussion algébrique portant sur cette équation apprendra, d'abord, si elle a, ou non, des racines égales. Nous examine-

rons, tout à l'heure, les cas particuliers qui correspondent aux racines égales, mais, pour le moment, nous plaçant dans le cas général, nous supposerons que l'équation en λ a ses racines distinctes et nous dirons, pour conclure :

1° S'il n'y a qu'une racine réelle, les deux coniques proposées ont deux points réels, et deux points imaginaires communs.

2° Si, au contraire, les trois racines sont réelles, on cherchera si les trois couples qui correspondent à ces racines sont du genre elliptique, ou d'un autre genre. Dans le premier cas, les quatre points sont imaginaires ; ils sont réels dans la seconde hypothèse.

On remarque que la présence d'un couple du genre elliptique, couple correspondant à une racine réelle de l'équation en λ, suffit pour caractériser les quatre points imaginaires; et que, si deux couples ne sont pas du genre elliptique, les quatre points sont nécessairement réels.

VINGT-HUITIÈME LEÇON

INTERSECTION DE DEUX CONIQUES

(CAS PARTICULIERS ET APPLICATIONS)

Nous allons maintenant chercher comment l'équation en λ permet de reconnaitre les particularités diverses de la situation respective de deux coniques, quand deux ou plusieurs des points communs deviennent coïncidents. Les racines de l'équation en λ ne sont plus distinctes, elles sont nécessairement réelles.

270. Premier cas particulier. (*Deux points coïncidents.*) Désignons par A et B les deux points qui sont coïncidents ; l'équation qui donne les abcisses des points communs admet une racine double, laquelle est la solution d'une certaine équation du premier degré. Ainsi les coordonnées du point (AB) sont réelles.

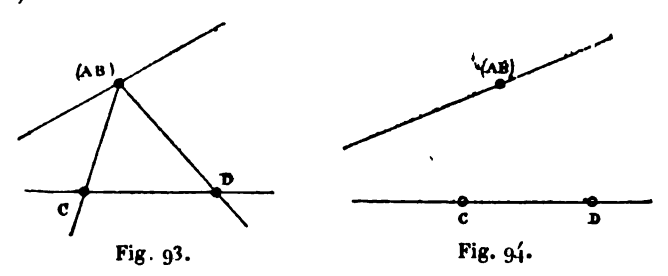


Fig. 93. Fig. 94.

Si les deux autres points C, D sont réels, le couple (AC, BD) couple qui correspond à la racine double est réel (fig. 93) ;

si au contraire les points C, D, dont les coordonnées se calculent par une équation du second degré, sont imaginaires (fig. 94) le couple AB, CD qui correspond à la racine simple est réel, mais celui qui correspond à la racine double est du genre elliptique.

271. Deuxième cas particulier. (*Les points coïncident deux à deux.*) Les deux coniques ont alors la position du double contact; mais il y a deux sortes de double contact, que nous allons distinguer l'un de l'autre.

Lès polynômes R (x), r (y) que nous avons considérés plus haut (§ 265), sont alors des carrés parfaits, les coordonnées du point (AB), et celles du point (CD), sont données par la résolution d'équations du second degré qui, suivant les cas, ont des racines réelles ou des racines imaginaires.

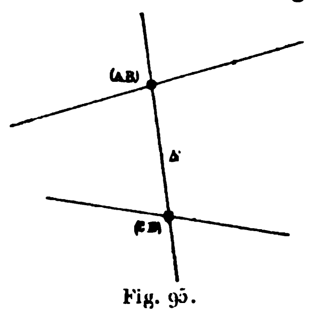


Fig. 95.

Si les racines sont réelles, le couple qui correspond à la racine simple est réel et celui qui correspond à la racine double a une équation de la forme $P^2 = 0$; elle représente une droite double et, les coefficients de P étant réels, on peut dire que cette droite double est réelle.

Cette dernière conclusion est encore exacte lorsque les points (AB), (CD) sont imaginaires, mais ce cas se différencie du précédent si l'on remarque que les droites AB, CD sont imaginaires. En effet, si elles étaient réelles, comme Δ est une droite réelle, les points (AB), (CD) seraient réels; ce que nous ne supposons pas.

272. Troisième cas particulier. (*Trois points coïncident.*) Si $R(x) = 0$ admet une racine triple, les racines de cette

ébuation sont données par des équations du premier degré (Alg. § 405) ; elles sont donc réelles. Cette remarque s'applique à l'équation $r(y) = 0$. Les trois couples sont alors confondus en un système unique formé par deux droites ; l'une de ces droites étant la tangente au point (ABC) aux coniques pro-

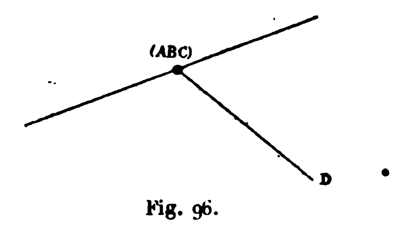


Fig. 96.

posées ; l'autre, étant la droite qui joint ce point (ABC) au quatrième point D.

Ainsi, l'équation en λ a une racine triple à laquelle correspond un couple de genre hyperbolique.

273. Quatrième cas particulier. (*Quatre points coïncidents.*) Enfin, il peut arriver que les quatre points communs aux deux coniques considérées soient confondus ; c'est le cas des *coniques osculatrices.*

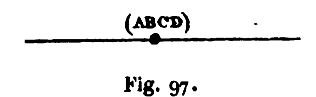


Fig. 97.

Ce point (ABCD) est nécessairement réel, les polynômes $R(x), r(y)$ sont, dans ce cas, des quatrièmes puissances exactes. L'équation en λ a ses trois racines réelles, mais il arrive ici, en même temps, que cette racine triple donne un couple correspondant dont l'équation est : $P^2 = 0$,

Nous avons dit que, dans le cas particulier que nous examinons, les coniques étaient osculatrices.

D'une façon générale on nomme *courbes osculatrices en un point commun, celles qui ont, en ce point, le maximum de points confondus.* Un cercle étant déterminé par trois points, est osculateur à une courbe lorsqu'il a trois points communs coïncidents avec cette courbe. Deux coniques ne pouvant

posséder que quatre points communs sont mutuellement osculatrices lorsque ces quatre points sont confondus.

En général, deux courbes ont un contact d'ordre p, lorsqu'elles ont $p+1$ points communs coïncidents. Le cas le plus simple, celui qui correspond à $p=1$, s'appelle le *simple contact* et la disposition des coniques que nous avons considérées au paragraphe précédent est celle du contact du second ordre.

Nous résumons cette discussion dans le tableau suivant :

Équation en λ. — (Cas particuliers.) — (*Racines égales.*)

Une racine double λ'. Une racine simple λ''.	λ' donne un couple hyperbolique (simple contact).	2 points réels coïncidents avec le centre du couple. 2 autres points réels distincts
	λ' donne un couple elliptique (simple contact).	2 points réels coïncidents avec le centre du couple. 2 autres points imaginaires.
	λ' donne un couple parabolique (double contact réel ou imaginaire).	Réel, si λ'' donne un couple hyperbolique. Imaginaire, si λ'' donne une couple elliptique.
Une racine triple λ'.	λ donne un couple hyperbolique (contact du second ordre).	4 points réels, 3 coïncidents avec le centre du couple.
	λ' donne un couple parabolique (coniques osculatrices).	4 points réels coïncidents

274. Cas où l'on peut éviter l'équation en λ. L'équation en λ étant du troisième degré, on doit éviter d'avoir recours à cette équation toutes les fois que le problème de l'intersection de deux coniques peut se résoudre par des équations d'un degré inférieur. Nous avons déjà signalé deux cas où le problème est quadratique, quand nous avons considéré (§ 266) : 1° deux coniques ayant une asymptote commune ; 2° deux coniques homothétiques. Nous allons encore faire connaître quelques cas analogues.

1° *Coniques confocales.* En prenant pour origine le foyer commun, les coniques ont pour équation : l'une,

$$x^2 + y^2 = D^2,$$

l'autre,

$$x^2 + y^2 = D'^2.$$

Les points communs vérifient l'égalité :

$$(D + D')(D - D') = 0.$$

Le problème se résout au moyen de deux équations du second degré.

2° *Coniques ayant un axe de symétrie commun.* Prenons cette droite pour axe des x ; les équations des deux coniques prennent la forme suivante :

$$y^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

et,

$$y^2 = \alpha' x^2 + \beta' x + \gamma'.$$

Les points communs ont donc des abcisses qui vérifient l'équation :

$$(\alpha - \alpha')x^2 + (\beta - \beta')x + \gamma - \gamma' = 0.$$

3° *Coniques inscrites dans un angle.* Soient $P = 0$, $Q = 0$ les équations des droites qui forment l'angle proposé. Les coniques ont pour équation : l'une,

$$PQ = R^2,$$

l'autre,

$$PQ = S^2.$$

La résolution de ces équations peut se faire en considérant la combinaison :

$$(R + S)(R - S) = 0.$$

le problème est encore quadratique.

4° *Coniques concentriques.* Les équations de ces coniques, en prenant le centre commun pour origine, ont la forme :

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy = 1,$$

et,

$$ax^2 + a'y^2 + 2b''xy = 1.$$

Pour résoudre ces deux équations, on fera la combinaison suivante :

$$(A - a)x^2 + (A' - a')y^2 + 2(B'' - b'')xy = 0,$$

et la solution du problème s'effectue par des équations du second degré, tout au plus.

5° *Coniques doublement tangentes à une conique donnée* Γ. Si l'on désigne par $U = 0$, l'équation de Γ, $U - PQ = 0$ représente l'équation générale des coniques γ passant par les points communs à Γ et à la conique aplatie formée des deux droites Δ, Δ' qui correspondent aux équations $P = 0$, $Q = 0$. Si nous imaginons que Δ et Δ' se rapprochent et viennent se confondre, la conique γ devient doublement tangente à Γ et a pour équation :

$$(1) \quad U - P^2 = 0,$$

dans laquelle P désigne une forme linéaire $\alpha x + \beta y + \gamma$. En supposant α, β, γ variables, (1) représente l'équation générale des coniques doublement tangentes à U.

Pour établir ce point avec la rigueur voulue, nous allons montrer que l'équation (1) peut représenter une conique quelconque doublement tangente à Γ.

En effet, imaginons une conique γ' doublement tangente à Γ, soit $V = 0$ son équation. L'équation des coniques passant par les points communs à Γ et à γ' est $\lambda U - V = 0$; et pour une valeur particulière de λ, la forme $\lambda U - V$ devient un carré parfait, les deux coniques étant doublement tangentes. On a

donc : $\lambda U - V = Q^2$, Q étant une forme linéaire. L'équation de γ', $V = 0$, peut donc s'écrire sous la forme :

$$\lambda U - Q^2 = 0,$$

ou,

$$U - \left(\frac{Q}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 = 0 ;$$

elle rentre donc dans la forme (1).

Cette remarque étant faite, imaginons deux coniques γ', γ'' doublement tangentes à Γ ; elles ont pour équation, respectivement ;

$$U - P^2 = 0, \quad V - Q^2 = 0.$$

La résolution de ces équations est encore quadratique et ceci résulte de la combinaison évidente :

$$(P + Q)(P - Q) = 0.$$

En observant (§ 80) que les droites qui correspondent aux équations :

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad P + Q = 0, \quad P - Q = 0 ;$$

forment un faisceau harmonique, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Théorème. *Lorsque deux coniques sont doublement tangentes à une troisième conique, les cordes de contact et les sécantes communes sont des droites concourantes formant un faisceau harmonique.*

APPLICATIONS DE L'ÉQUATION EN λ.

275. Théorème I. *Lorsque deux coniques ont leurs axes parallèles, les points communs à ces coniques qui sont situés à distance finie, appartiennent à un cercle.*

Prenons pour axes de coordonnées, des droites parallèles aux axes des deux coniques considérées ; les équations de celles-ci ne doivent pas renfermer de termes en xy (§ 205), elles ont donc la forme :

$$Ax^2 + A'y^2 + 2By + 2B'x + A'' = 0,$$
$$ax^2 + a'y^2 + 2by + 2b'x + a'' = 0.$$

Si l'on peut résoudre ces équations par rapport à x^2 et à y^2, on voit que les points communs appartiennent à la courbe U, qui a pour équation :

$$x^2 + y^2 = mx + ny + p,$$

équation qui est une combinaison évidente des précédentes. Cette courbe U est un cercle, puisque les axes des coordonnées sont supposés rectangulaires.

Il y a exception lorsque l'on a $Aa' = aA'$; dans ce cas, les deux coniques sont homothétiques ; deux des points communs sont rejetés à l'infini.

276. Théorème II. *Lorsque deux coniques* Γ, Γ', *ont leurs points communs situés sur un cercle, leurs axes sont parallèles.*

Cette proposition, qui est la réciproque de la précédente, peut s'établir de la manière suivante :

Prenons pour axes de coordonnées, des parallèles aux axes de l'une des coniques données Γ' et soient :

$$(\Gamma) \quad U = 0, \quad (\Gamma') \quad V = 0,$$

les équations des coniques, en posant :

$$U \equiv Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'',$$
$$V \equiv ax^2 + a'y^2 + 2by + 2b'x + a''.$$

La forme V ne doit pas renfermer le terme en xy (§ 205), si, comme nous le supposons, les axes de coordonnées sont parallèles aux directions principales de Γ'.

L'équation générale des coniques passant par les points communs à Γ et à Γ' est :

$$(1) \quad \alpha U + \beta V = 0.$$

Pour des valeurs convenablement attribuées à α et à β, cette équation doit représenter un cercle. Les axes étant rectangulaires, le terme en xy ne doit pas exister dans (1); on a donc $\alpha B'' = 0$. Le paramètre α n'est pas nul ; car si l'on a $\alpha = 0$, l'équation (1) devant, par hypothèse, représenter un cercle, la conique Γ' est un cercle et, dans ce cas, la proposition est évidente. Concluons donc que B'' est nul et que, par suite, les axes de coordonnées sont parallèles aux axes de Γ. Ainsi les coniques Γ et Γ' ont leurs axes parallèles.

277. Théorème III. *Lorsque quatre points* A, B, C, D *d'une conique* Γ *sont situés sur un cercle ; les cordes* AB, CD *sont inclinées sur la direction positive de l'un ou de l'autre des axes, d'angles supplémentaires.*

Cette proposition est la conséquence immédiate du théorème précédent.

Considérons la conique aplatie Γ' formée par les droites AB, CD ; Γ et Γ' ont quatre points communs situés sur un cercle, leurs axes sont donc parallèles. Or les axes de Γ' sont les bissectrices des droites AB, CD ; par suite les axes de Γ sont parallèles à ces bissectrices. D'où cette conséquence géométrique que les cordes AB et CD sont inclinées d'angles supplémentaires sur la direction positive de l'un, ou de l'autre, des axes.

278. Théorème IV. *Lorsque deux cordes* AB, CD *d'une conique* Γ *sont inclinées d'angles supplémentaires sur la partie positive de l'un des axes, le quadrilatère* ABCD *est inscriptible à un cercle.*

En effet en considérant la conique aplatie Γ' formée par les droites AB, CD, les axes de cette conique, c'est-à-dire les bissectrices des angles formés par ces droites sont parallèles aux axes de Γ, et le théorème I prouve que les points communs A, B, C, D, sont situés sur un cercle.

279. Théorème V. *Il existe un triangle autopolaire* [1] *commun à deux coniques* Γ, Γ'. *Ce triangle qui, en général, est unique, a pour sommets les centres des couples passant par les points communs à* Γ *et à* Γ'.

Soient :

$$(\Gamma) \quad U = 0, \qquad (\Gamma') \quad u = 0,$$

les équations des deux coniques considérées et soient $(x, y, z$ les coordonnées d'un point O ayant la même polaire dans Γ et dans Γ'. L'équation de la polaire de O, par rapport à Γ, est :

$$(1) \quad XU'_x + YU'_y + ZU'_z = 0 ;$$

et celle de O, par rapport à Γ',

$$(2) \quad Xu'_x + Yu'_y + Zu'_z = 0.$$

Les équations (1), (2) devant représenter la même droite, on a :

$$\frac{u'_x}{U'_x} = \frac{u'_y}{U'_y} = \frac{u'_z}{U'_z} = -\lambda,$$

$-\lambda$, désignant la valeur commune des rapports $\frac{u'_x}{U'_x}$, $\frac{u'_y}{U'_y}$, $\frac{u'_z}{U'_z}$.

On peut considérer le paramètre λ comme une inconnue auxiliaire et, pour déterminer λ, on doit éliminer x, y, z entre les équations :

$$(3) \quad \begin{aligned} \lambda U'_x + u'_x &= 0, \\ \lambda U'_y + u'_y &= 0, \\ \lambda U'_z + u'_z &= 0. \end{aligned}$$

1. Un triangle ABC est *autopolaire* à une conique Γ lorsque chacun de ses sommets a pour polaire, par rapport à Γ, le côté opposé. On dit aussi que ABC est *conjugué* à la conique.

Ces équations linéaires et homogènes ont un déterminant qui est, précisément, le discriminant de la forme $\lambda U + u$; par suite le résultant de ces équations n'est autre chose que l'équation en λ.

Cette équation, dans le cas général, admet trois racines, réelles ou imaginaires λ_1, λ_2, λ_3 ; à chacune desquelles correspond un seul point (à distance finie ou infinie). On obtient ainsi trois points O_1, O_2, O_3, lesquels jouissent de la propriété de posséder la même polaire par rapport aux coniques Γ et Γ' ; et qui sont, d'après les équations (3), les centres des couples passant par les points communs à Γ et à Γ'.

Montrons maintenant que la polaire Δ_1, de O_1, par rapport à Γ, ou par rapport à Γ', est la droite O_2O_3.

A cet effet, considérons une conique quelconque γ passant par les points communs à Γ et à Γ' ; elle a pour équation :

$$(\gamma) \quad KU + u = 0,$$

K étant un paramètre arbitraire. La polaire du point O_1, par rapport à γ, a pour équation :

$$X\left(KU'_x + u'_x\right) + Y\left(KU'_y + u'_y\right) + Z\left(KU'_z + u'_z\right) = 0.$$

Si nous y remplaçons x, y, z par les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point O_1, et si nous tenons compte des relations :

$$\lambda_1 U'_{x_1} + u'_{x_1} = 0, \quad \lambda_1 U'_{y_1} + u'_{y_1} = 0, \quad \lambda_1 U'_{z_1} + u'_{z_1} = 0 ;$$

nous obtenons :

$$(K - \lambda_1)\left(XU'_{x_1} + YU'_{y_1} + ZU'_{z_1}\right) = 0.$$

Ainsi la polaire de O_1, par rapport à γ, est la droite Δ_1 elle-même.

Parmi les coniques particulières qui passent par les points communs à Γ et à Γ' se trouvent celles qui sont aplaties et qui correspondent à $K = \lambda_2$, ou à $K = \lambda_3$. La polaire de O_1

par rapport à ces couples passe par leurs centres, c'est-à-dire par les points O_2, O_3. Ainsi la droite O_2O_3 est la polaire de O_1, par rapport à toutes les coniques du réseau correspondant à l'équation (γ).

EXERCICES

1. *Trouver l'équation générale des coniques doublement tangentes à deux coniques données.*

Soient $S = 0$, $S' = 0$ les équations des coniques données. λ_1 désignant l'une des racines de l'équation en λ, et l'équation du couple qui correspond à cette racine étant : $PQ = 0$, l'équation cherchée est ;

$$Q^2 - 2\theta(S + \lambda_1 S') + \theta^2 P^2 = 0.$$

On suppose, pour bien préciser la valeur de λ_1,

$$S - \lambda_1 S' \equiv PQ;$$

θ désigne un paramètre variable.

2. *Démontrer que si deux coniques sont doublement tangentes, la polaire d'un point quelconque pris sur la corde de contact est la même pour ces deux coniques.*

3. *Qu'arive-t-il si l'équation en λ a : 1° une racine nulle ; 2° deux racines nulles ; 3° trois racines nulles ?*

Réponse : 1° l'une des coniques est aplatie ; 2° le centre de la conique aplatie est situé sur la vraie conique ; 3° la conique aplatie est formée d'une droite tangente à la vraie conique et d'une autre droite passant par le point de contact.

4. *Démontrer que si autour d'un point fixe A, pris sur une conique Γ, on fait tourner deux cordes rectangulaires Δ, Δ' ; la droite qui joint les extrémités de ces cordes passe, par un point fixe, situé sur la normale à Γ, au point A.* (Théorème de Frégier.)

Trouver le lieu de ce point fixe quand on suppose que A décrit Γ.

Généraliser le théorème précédent en supposant que Δ et Δ' sont des droites mobiles dont les coefficients angulaires m, m' vérifient toujours l'équation :

$$\alpha mm' + \beta(m + m') + \gamma = 0;$$

c'est-à-dire, en supposant que Δ *et* Δ' *sont des droites correspondantes de deux faisceaux homographiques en involution.*

5. *Dire quelle particularité présentera l'équation en* λ *lorsque l'une des coniques étant formée de deux droites sécantes, a : 1° l'un de ses côtés tangent à la vraie conique ; 2° ses deux côtés tangents à la vraie conique.*

6. *Démontrer que les coefficients en* λ *sont proportionnels à des invariants quand on effectue un changement de coordonnées.*

Supposons que U devienne U_1, et que u devienne u_1 : alors $\lambda U + u$ devient $\lambda U_1 + u_1$. Les valeurs de λ qui donnent à $\lambda U + u$ la forme $\varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2$, sont donc les mêmes que celles qui donnent cette forme à $\lambda U_1 + u_1$. Les deux équations en λ qui correspondent aux équations :

$$\lambda U + u = 0, \quad \lambda U_1 + u_1 = 0,$$

ont donc les mêmes racines.

Si l'on prend, en particulier, $u \equiv x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta$; on voit que $\dfrac{\Delta}{\sin^2 \theta}$ est un invariant.

7. *Le raisonnement précédent est en défaut si l'on suppose que les deux équations du troisième degré sont :*

$$(\lambda - \lambda')^2 (\lambda - \lambda'') = 0,$$

et,

$$(\lambda - \lambda'')^2 (\lambda - \lambda') = 0 ;$$

montrer que cette circonstance ne peut se produire.

8. *Déterminer les points communs aux coniques qui ont respectivement pour équation :*

$$(x - y)^2 + 3(x + y) - 10 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 4xy - 6(x + y) + 5 = 0.$$

Parmi les couples passant par les points communs, on trouvera celui qui correspond à l'équation :

$$(x + y)(x + y - 3) = 0.$$

Finalement, les points cherchés ont pour coordonnées :

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad x_4 = -\sqrt{\frac{5}{2}},$$
$$y_1 = 2; \quad y_2 = 1; \quad y_3 = -\sqrt{\frac{5}{2}}; \quad y_4 = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

9. *On considère l'hyperbole équilatère* H *qui correspond à l'équation :*

$$xy = m^2 :$$

d'un point fixe P (α, β), *avec un rayon variable* R, *on décrit un cercle* Δ *qui coupe* H *aux points* A, B, C, D ; *trouver le lieu décrit par le point de concours* I, *des cordes* AB *et* CD.

On considère l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

en posant :

$$f(x, y, z) \equiv (x - \alpha z)^2 + (y - \beta z)^2 - R^2 z^2 + 2\lambda (xy - m^2 z^2).$$

et l'on remarque que les coordonnées du point I vérifient les équations

$$f'_x = 0, f'_y = 0, f'_z = 0.$$

Le résultat est :

$$x(x - \alpha) - y(y - \beta) = 0.$$

On peut employer la méthode précédente dans les problèmes du même genre.

On pourra aussi généraliser la question précédente en considérant une conique quelconque, au lieu de l'hyperbole H. Le lieu trouvé est toujours une hyperbole équilatère, ce lieu est, pour des raisons évidentes, l'hyperbole équilatère aux pieds des normales.

10. *Appliquer l'équation en* λ *à la résolution de l'équation :*

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0,$$

On posera

$$x^2 = y.$$



QUATRIÈME LIVRE

ÉTUDE DES CONIQUES D'APRÈS LES ÉQUATIONS RÉDUITES

VINGT-NEUVIÈME LEÇON

L'ELLIPSE

(TANGENTES ET POLAIRES)

280. Équation réduite de l'ellipse. Nous avons vu (§ 214) que, par un choix convenablement fait d'axes rectangulaires, les coniques qui ont un centre peuvent être représentées par l'équation :

$$(1) \quad S'X^2 + S''Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Nous supposerons d'abord $\delta > 0$, ce qui correspond aux coniques du genre ellipse. Comme nous avons (§ 205) :

$$S'S'' = \frac{\delta}{\sin^2\theta}.$$

Si $S'\Delta$ est positif, l'équation (1) n'est vérifiée par aucune valeur réelle des variables. Supposons donc $S'\Delta < 0$, par suite $S''\Delta < 0$, et posons :

$$a^2 = \frac{-\Delta}{S'\delta}, \quad b^2 = -\frac{\Delta}{S''\delta}.$$

L'équation (1), en appelant maintenant x et y les coordonnées courantes, prend la forme :

$$\text{(E)} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

C'est cette équation qui va nous servir pour l'étude de l'ellipse.

281. Forme de la courbe. L'équation (E) peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\frac{x^2}{a^2} = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right),$$
$$\frac{y^2}{b^2} = \left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Il en résulte que si l'on prend $OA = OA' = a$, $OB = OB' = b$, la courbe est renfermée, tout entière, dans l'intérieur du rectangle CDEF. On voit aussi que, x variant depuis zéro

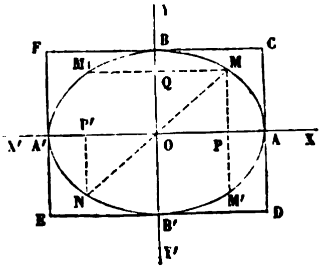


Fig. 98.

jusqu'à a, y diminue constamment, depuis la valeur b jusqu'à zéro. Enfin l'arc de courbe AB offre une sinuosité telle qu'une droite ne peut pas le rencontrer en plus de deux

points. On peut ainsi se faire une idée assez exacte de la forme de cet arc AB. L'ellipse totale s'obtient en prenant un arc A'B symétrique de l'arc AB, par rapport à *o*Y, puis un arc AB'A', symétrique de ABA' par rapport à *o*X.

282. Construction de l'ellipse, point par point. Nous avons démontré précédemment (§ 33), que si l'on joignait un point M de l'ellipse aux extrémités A,A' du grand axe, la droite A'M et la perpendiculaire élevée au point A, à la droite AM, se coupaient en un point μ dont le lieu géométrique était une droite Δ, perpendiculaire à AA'.

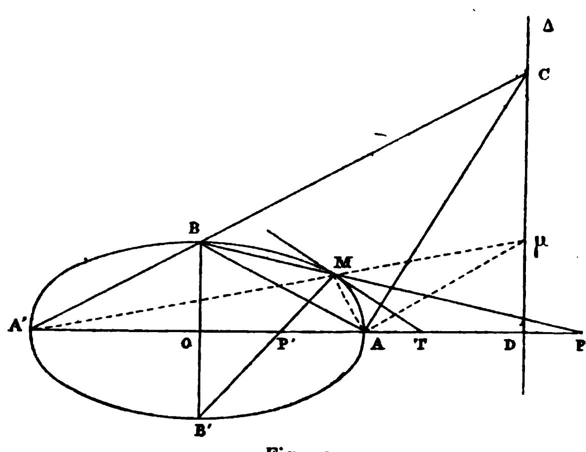


Fig. 99.

En appliquant cette remarque au sommet B, on obtient un point C de Δ ; cette droite se trouve donc déterminée, on voit ainsi, comment, connaissant les sommets de l'ellipse, on peut construire la courbe, point par point, au moyen d'une règle et d'une équerre.

283. Représentation d'un point de l'ellipse : 1° Soient x', y', les coordonnées d'un point quelconque de la courbe ; ces quantités variables vérifient constamment la relation :

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Il existe donc, entre o et $\frac{\pi}{2}$, un angle φ tel que l'on ait :

$$(P)\quad \cos\varphi = \frac{x'}{a}, \quad \sin\varphi = \frac{y'}{b}.$$

Réciproquement, si l'on prend arbitrairement, entre o et $\frac{\pi}{2}$, un angle φ, et si l'on calcule les coordonnées d'un point M par les formules (P), M situé sur l'ellipse. La connaissance du paramètre φ caractérise donc la position d'un point M_φ de l'ellipse.

Cherchons l'équation d'une corde $M_\varphi M_{\varphi'}$ de l'ellipse. Cette équation est :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\cos\varphi & b\sin\varphi & 1 \\ a\cos\varphi' & b\sin\varphi' & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou,

$$bx(\sin\varphi - \sin\varphi') - ay(\cos\varphi - \cos\varphi') + ab(\sin\varphi'\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi') = 0$$

ou encore, par une transformation évidente,

$$(S)\quad \frac{x}{a}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2} = \cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}.$$

2° L'identité :

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = 1,$$

permet encore de représenter les coordonnées d'un point de l'ellipse par les formules :

$$(P')\quad \frac{x'}{a} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \frac{y'}{b} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Dans ces égalités, t désigne un paramètre arbitraire, variant de $-\infty$ à $+\infty$. A toute valeur de t, correspond un point M_t, situé sur l'ellipse.

Si l'on cherche l'équation de la corde $M_t M_{t'}$, en appliquant la formule connue :

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'),$$

on trouve :

$$(S') \quad \frac{y}{b}(t + t') + \frac{x}{a}(1 - tt') = 1 + tt'.$$

284. Équation de la tangente. L'équation générale des tangentes :

$$xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'} = 0,$$

appliquée à l'équation E, donne :

$$(T_1) \quad \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 = 0.$$

Les formules (P) et (P') donnent deux autres formes :

$$(T_2) \quad \frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi = 1,$$

$$(T_3) \quad \frac{x}{a}(1 - t^2) + 2t\frac{y}{b} = t^2 + 1 ;$$

qui peuvent encore se déduire des équations (S) et (S'), en faisant $\varphi = \varphi'$ dans la première ; et $t = t'$, dans l'autre.

Enfin, on emploie aussi, dans quelques questions, une quatrième forme de l'équation de la tangente, forme dans laquelle on met en évidence le coefficient angulaire de la tangente.

Considérons la droite qui a pour équation :

$$y = mx + n$$

et cherchons la relation que doivent vérifier les coefficients m et n, pour que cette droite soit tangente à l'ellipse.

Les abcisses des points communs sont donnés par l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 1,$$

ou,

$$x^2(a^2m^2 + b^2) + 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0.$$

Cette équation doit avoir ses racines égales, on a donc :

$$a^4m^2n^2 = (a^2m^2 + b^2)(a^2n^2 - a^2b^2),$$

ou, après simplifications,

$$n^2 = a^2m^2 + b^2.$$

L'équation de la tangente, en fonction du coefficient angulaire m, est donc ;

$$(T_4) \quad y - mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} = 0.$$

285. Remarque sur l'emploi des différentes formes de l'équation de la tangente. Les équations que nous venons de faire connaître et qui représentent la tangente à l'ellipse ne doivent pas, en général, être employées indifféremment. L'une de ces formes peut présenter certains avantages pour le calcul que l'on a en vue et l'on doit alors prendre, de préférence, cette forme particulière.

Nous voulons montrer l'utilité de cette remarque par divers exemples.

Application de la première forme. *On considère une ellipse rapportée à ses axes, ox, oy ; une tangente à cette courbe rencontre les axes aux points* P, Q *et l'ellipse* au *point* M. *Trouver le lieu décrit par le point commun à la droite* OM *et au cercle qui passe par les trois points* O, P, Q.

Le point de contact M ayant une influence particulière sur la construction du point dont nous cherchons le lieu géométrique nous prendrons l'équation de la tangente sous la forme (T_1).

L'équation de la tangente mobile est :

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1,$$

et l'on a

$$\mathrm{OP}=\frac{a^2}{x'}, \quad \mathrm{OQ}=\frac{b^2}{y'}.$$

Par suite, l'équation du cercle OPQ est :

$$(1) \quad x^2+y^2-a^2\frac{x}{x'}-b^2\frac{y}{y'}=0.$$

D'autre part, la droite OM a pour équation :

$$(2) \quad \frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}.$$

L'équation du lieu s'obtiendra en éliminant x' et y' entre les relations (1) et (2) et l'égalité :

$$(3) \quad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

Des équations (1) et (2), on déduit :

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2};$$

en portant ces valeurs de x' et de y' dans (3) on a :

$$(x^2+y^2)^2=(a^2+b^2)^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right).$$

Nous indiquerons plus loin (§ 392), quand nous nous occuperons de la construction des courbes, les formes diverses de la quartique qui correspond à cette équation.

Application de la seconde forme. *Démontrer qu'une tangente mobile à l'ellipse intercepte sur les tangentes aux extrémités du grand axe des segments qui, comptés à partir des points de contact, ont un produit constant.*

Prenons l'équation (T_2) ; si nous y faisons, successivement, $x = a$, et $x = -a$, nous obtenons :

$$\frac{AM}{b} \sin \varphi = 1 - \cos \varphi,$$

$$\frac{A'M'}{b} \sin \varphi = 1 + \cos \varphi ;$$

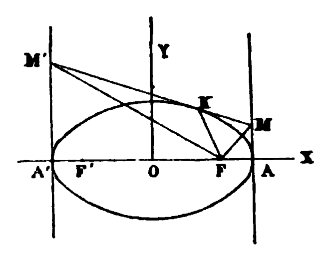


Fig. 100.

d'où, par combinaison,

$$(1) \quad AM.A'M' = b^2.$$

Cette égalité démontre la proposition en question. Si l'on remarque que l'on a, F étant le foyer,

$$AF = a - c, \quad A'F = a + c,$$

et, par conséquent,

$$(2) \quad AF.A'F = a^2 - c^2 = b^2.$$

On déduit, des égalités (1) et (2),

$$AM.A'M' = AF.A'F,$$

ou,

$$\frac{AM}{A'F} = \frac{AF}{A'M'}.$$

Les triangles rectangles FAM, FA'M' sont donc semblables et cette similitude exige que les droites FM, FM' soient rectangulaires. On peut donc dire : *Si l'on considère les tangentes aux extrémités du grand axe et la partie* MM' *interceptée par*

ces droites, sur une tangente quelconque, le cercle décrit sur MM′ *comme diamètre, passe constamment par les foyers.*

Cette proposition résulte d'ailleurs d'une propriété précédemment établie (§ 237). En effet, d'après cette propriété, les droites FM et FM′ sont bissectrices des angles adjacents AFK, A′FK ; elles sont donc rectangulaires.

Application de la troisième forme. *On considère les tangentes* AC *et* BC, *aux sommets* A *et* B *de l'ellipse ; une tangente mobile* Δ, *rencontre ces droites aux points* A″, B″ *et par ces points on mène des parallèles aux axes de la courbe* ; *on obtient ainsi un point* I, *mobile avec* Δ : *trouver le lieu décrit par* I.

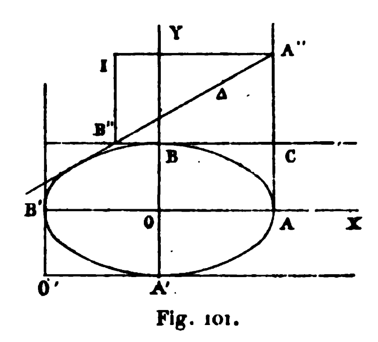


Fig. 101.

Prenons la troisième forme de l'équation de la tangente. Si, dans l'équation (T_3), nous faisons $x = a$, nous obtenons l'équation de A″I,

$$(1)\quad \frac{y}{b} = t.$$

L'équation de B″I s'obtient, de même, en faisant $y = b$; elle est :

$$(2)\quad \frac{x}{a}(1 + t) = 1 - t.$$

En éliminant t entre (1) et (2), nous avons :

$$xy + ay + bx = ab$$

c'est l'équation du lieu. En écrivant cette équation sous la forme :

$$(x+a)(y+b)=2ab,$$

on voit que le lieu est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les tangentes aux sommets A' et B' et passant par les points A et B.

Application de la quatrième forme. *Trouver le lieu des points d'où l'on voit l'ellipse sous un angle constant* V.

Soient α et β les coordonnées d'un point I du lieu; exprimons qu'une tangente à l'ellipse passe par ce point ; nous avons alors la relation :

$$\beta = m\alpha \pm \sqrt{a^2m^2+b^2},$$

ou,

$$(1) \quad m^2(a^2-\alpha^2)-2\alpha\beta m-\beta^2+b^2=0.$$

Cette équation, du second degré en m, fait connaître les coefficients angulaires m', m'' des tangentes issues de I, à l'ellipse. En discutant cette équation, on voit que les tangentes sont réelles ou imaginaires suivant que la quantité U :

$$U=\alpha^2\beta^2-(a^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2)=b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2,$$

est positive ou négative. L'expression $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$ a une valeur négative pour $x=0$ et $y=0$ et, par suite, pour tous les points intérieurs à la courbe ; elle a, au contraire, une valeur positive pour tous les points extérieurs (§ 69). On peut donc mener deux tangentes réelles à l'ellipse, par un point extérieur à la courbe.

Pour revenir à la question proposée, si nous appelons m' et m'' les racines de l'équation (1), nous avons :

$$\operatorname{tg} V=\frac{m'-m''}{1+m'm''},$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tg} V=\frac{2\sqrt{b^2\alpha^2+a^2\beta-a^2b^2}}{\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2}$$

En rendant α, β coordonnées courantes, nous avons l'équation du lieu :

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) \operatorname{tg}^2 V = 4 (b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2).$$

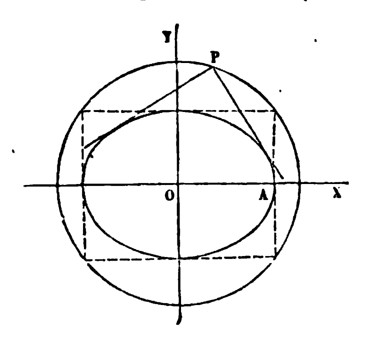


Fig. 102.

Dans le cas particulier où les tangentes sont rectangulaires, on trouve que le lieu est le cercle qui correspond à l'équation :

$$x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 0,$$

c'est le cercle circonscrit au rectangle des axes ; ce résultat a été déjà démontré (§ 220).

286. Polaire. En appliquant à l'équation (E), la formule :

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0.$$

on a, pour l'équation de la polaire du point (x_0, y_0, z_0),

$$\text{(P)} \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0.$$

287. Equation quadratique des tangentes. Si du point (x_0, y_0, z_0) nous voulons mener des tangentes à l'ellipse, l'application faite, à l'équation (E), de la formule générale :

$$\left(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0}\right)^2 = 4f(x, y, z) f(x_0, y_0, z_0),$$

donne :

$$\text{(F)} \quad \left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right).$$

Application. Pour montrer, par un exemple, quels sont les problèmes auxquels cette équation s'applique particulièrement bien, proposons-nous l'exercice suivant : *trouver le lieu des points d'où partent deux tangentes à l'ellipse, ces tangentes rencontrant l'axe oy en deux points, dont les distances au centre ont un produit constant, et égal à a^2.*

Dans l'équation (F), faisons $x = 0$; nous obtenons pour déterminer les ordonnées des points de rencontre du faisceau des tangentes avec *oy*, l'équation :

$$\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2} - 1\right) + \frac{2yy_0}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0.$$

Si nous écrivons que le produit des racines de cette équation est égal à a^2, nous obtenons la relation :

$$a^2 = \frac{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}{a^2 - x_0^2}.$$

Rendons x_0, y_0 coordonnées courantes et nous avons l'équation du lieu :

$$(a^2 + b^2)x^2 + a^2y^2 = a^4.$$

Cette équation représente une ellipse rapportée à son centre et à ses axes.

288. Construction de la tangente en un point pris sur l'ellipse. Nous reviendrons plus loin sur ce problème, qui peut se résoudre par des voies très diverses ; mais nous voulons compléter ici la construction que nous avons indiquée plus haut pour trouver, sans faire usage du compas, un point quelconque M, de l'ellipse ; et montrer comment on peut, avec la règle seule, trouver la tangente en ce point M.

Soient x', y', les coordonnées de M, on a, (fig. 99),

$$(1) \quad \text{OT} = \frac{a^2}{x'}.$$

Les droites MB, MB′ ayant, respectivement, pour équation :

$$x'(y - b) = x(y' - b),$$
$$x'(y + b) = x(y' + b),$$

on a :

$$OP = \frac{bx'}{b - y'}, \quad \text{et} \quad OP' = \frac{bx'}{b + y'};$$

par suite,

$$(2) \quad \frac{OP + OP'}{2} = \frac{b^2x'}{b^2 - y'^2} = \frac{a^2}{x'}.$$

En comparant (1) et (2) on voit que le point T est le milieu du segment PP'; et, de cette remarque, on conclut qu'en complétant le parallélogramme, dont MP et MP' sont deux côtés, la diagonale de ce parallélogramme est la tangente cherchée.

EXERCICES

1. *On considère une ellipse* E *rapportée à ses axes et la droite* Δ *qui correspond à l'équation :*

$$\frac{x}{a} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Soit A *le sommet de droite ; ayant pris sur* E, *un point quelconque* M, *on abaisse du sommet* A', *opposé à* A, *une perpendiculaire sur* AM *et l'on prend* A'' *symétrique de* A', *par rapport à* AM. *Ayant joint* A''M, *on élève à cette droite une perpendiculaire* Δ', *au point* A. *Démontrer que la tangente en* M *va passer par le point commun aux droites* Δ, Δ'. *Déduire de cette remarque une construction de la tangente au point* M, *avec la règle et l'équerre.*

2. *Une tangente mobile* MM' (fig. 100) *rencontre les tangentes en* A *et* A', *sommets de l'ellipse, aux points* M *et* M' ; *on joint* AM', A'M ; *ces droites se coupent en un point* I ; *trouver le lieu de ce point.*

On trouvera, pour le lieu demandé, l'ellipse qui correspond à l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{b^2} = 1.$$

3. *Démontrer qu'en joignant un point quelconque de l'ellipse aux quatre sommets, on obtient un faisceau harmonique.*

4. *On prend un point mobile* P *sur la tangente au sommet* B, *et l'on projette ce point en* I *sur sa polaire. Lieu du point* I.

Ce lieu est un cercle passant par les foyers, et correspondant à l'équation :

$$x^2 + y^2 - \frac{y}{b}(b^2 - c^2) - c^2 = 0.$$

5. *Trouver le lieu des points tels, qu'en les projetant sur les axes de l'ellipse, la droite qui joint ces projections soit tangente à la courbe.*

Le lieu est une quartique ayant pour équation :

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{x^2 - a^2}.$$

6. *Démontrer que si l'on considère dans le plan de l'ellipse une transversale ayant pour équation :*

$$A\frac{x}{a} + B\frac{y}{b} - 1 = 0,$$

si la corde interceptée a une longueur $2l$, *on a :*

$$l^2(A^2 + B^2)^2 = (A^2b^2 + B^2a^2)(A^2 + B^2 - 1).$$

7. *Une tangente mobile à l'ellipse rencontre les tangentes aux extrémités du grand axe aux points* M, M' ; *on joint* OM *et l'on projette le point* M' *sur cette droite ; trouver le lieu décrit par cette projection.*

On trouvera le cercle qui correspond à l'équation :

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2x}{a} = 0.$$

TRENTIÈME LEÇON

L'ELLIPSE (suite)

NORMALES. — DÉVELOPPÉE

289. Equation de la normale. Il existe pour l'équation de la normale quatre formes qui correspondent à celles que nous avons trouvées pour la tangente.

L'équation générale des normales :

$$\frac{x-x'}{f'_{x'}}=\frac{y-y'}{f'_{y'}},$$

appliquée à l'équation réduite de l'ellipse, donne :

$$\frac{x-x'}{\frac{x'}{a^2}}=\frac{y-y'}{\frac{y'}{b^2}},$$

ou,

$$\frac{a^2x}{x'}-a^2=b^2\frac{y}{y'}-b^2;$$

ou, encore,

$$(\mathrm{N}_1)\qquad a^2\frac{x}{x'}-b^2\frac{y}{y'}=c^2.$$

En remplaçant, dans cette équation, $\frac{x'}{a}$ et $\frac{y'}{b}$ au moyen des

formules (P) et (P′), on obtient deux autres formes de l'équation de la normale :

$$(N_2) \quad \frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} = c^2,$$

$$(N_3) \quad \frac{ax}{1-t^2} - \frac{by}{2t} = \frac{c^2}{1+t^2}.$$

Enfin on peut trouver une quatrième forme de l'équation de la normale à l'ellipse, en fonction du coefficient angulaire. A cet effet, identifions les deux équations :

$$y = mx + n,$$

$$a^2\frac{x}{x'} - b^2\frac{y}{y'} = c^2.$$

Nous avons :

$$-m = \frac{a^2y'}{b^2x'}, \quad \text{et} \quad n = \frac{c^2y'}{b^2}.$$

Ces relations donnent :

$$\frac{y'}{b} = \frac{nb}{c^2}, \quad \text{et} \quad -\frac{x'}{a} = \frac{na}{mc^2}.$$

Ainsi, les paramètres m et n vérifient la relation :

$$\frac{n^2b^2}{c^4} + \frac{n^2a^2}{m^2c^4} = 1,$$

ou

$$n^2 = \frac{c^4m^2}{a^2 + b^2m^2}.$$

L'équation de la normale est donc :

$$(N_4) \quad y = mx \pm \frac{c^2m}{\sqrt{a^2 + b^2m^2}}.$$

290. Normales menées par un point du plan. — **Théorème.** *Par un point* M, *pris dans le plan d'une ellipse, on peut, en général, mener quatre normales à la courbe : deux de ces normales sont toujours réelles.*

Soient α, β, les coordonnées du point M ; si nous exprimons,

au moyen de l'équation (N_3), qu'une normale à l'ellipse passe par ce point, nous obtenons pour déterminer le paramètre t qui correspond au pied de la normale cherchée, l'équation :

$$2t(1+t^2)a\alpha-(1-t^4)b\beta-2c^2t(1-t^2)=0,$$

et cette relation peut s'écrire, en supposant $\beta \neq 0$,

$$(1)\quad t^4+2t^3\frac{a\alpha+c^2}{b\beta}+2t\frac{a\alpha-c^2}{b\beta}-1=0.$$

Cette équation est du quatrième degré et son dernier terme a un signe contraire à celui du premier ; elle a donc quatre racines, dont deux sont toujours réelles.

Lorsque β est nul, une racine de l'équation (1) est nulle, une autre est infinie, et les deux dernières sont données par l'équation :

$$t^2=\frac{c^2-a\alpha}{c^2+a\alpha}.$$

La racine nulle donne le sommet A ; la racine infinie le sommet A' ; enfin, si le point pris sur AA', est situé à une distance du centre moindre que $\frac{c^2}{a}$, en valeur absolue, il y a deux autres normales réelles issues du point considéré.

291. Hyperbole équilatère aux pieds des normales issues d'un point (1). — **Theorème.** *Les pieds des normales, issues d'un point* P, *appartiennent à une hyperbole équilatère ayant pour directions asymptotiques les directions principales de l'ellipse et passant par le point donné et par le centre de l'ellipse.*

Désignons par α, β, les coordonnées du point P, et par x, y celles du pied de l'une des normales issues, de ce point P, à l'ellipse qui correspond à l'équation :

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

1. C'est au moyen de cette hyperbole qu'Apollonius résolvait le problème des Normales. (Chasles. *Traité des Sections coniques*, p. 144.)

Voyez, pour ce problème de la détermination des pieds des normales issues d'un point, l'exercice V, proposé à la fin de cette leçon

La relation (N_1) donne :

$$(2)\quad \frac{a^2\alpha}{x} - \frac{b^2\beta}{y} = c^2.$$

En considérant, dans les équations ([1]) et (2), x et y comme des coordonnées courantes on voit que les pieds des normales issues de P peuvent être considérés comme les points communs à deux coniques : l'une est l'ellipse proposée ; l'autre, qui correspond à l'équation (2), est une hyperbole ayant pour directions asymptotiques les axes de l'ellipse ; elle passe par le point (α,β) et aussi par l'origine, qui est le centre de l'ellipse.

292. Pôle tangentiel et pôle normal. Imaginons une corde AB d'une ellipse E ; si, aux extrémités A, B, de cette corde, on mène les tangentes, elles se coupent en un point P que nous nommerons le *pôle tangentiel*. D'autre part, les normales aux points A, B, se coupent en M ; nous dirons que M est le *pôle normal* de la corde AB.

Nous allons chercher les relations qui permettent de calculer les coordonnées du pôle normal (α, β), connaissant celles du pôle tangentiel (α', β').

Du point M on peut mener deux autres normales (réelles ou imaginaires) à l'ellipse ; soient C et D les pieds de ces normales et soient α'', β'', les coordonnées du pôle tangentiel Q de la corde CD. On peut remarquer d'ailleurs que la droite CD, qui passe par deux points imaginaires conjugués, est une droite réelle ; α'', β'', sont donc des quantités réelles.

Les équations des droites AB et CD sont, respectivement,

$$\frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{\alpha'' x}{a^2} + \frac{\beta'' y}{b^2} - 1 = 0;$$

1. Il est remarquable que cette équation est la même pour toutes les coniques homothétiques. M. Niewengloski a tiré de cette observation une élégante construction des centres de l'hyperbole équilatère aux pieds des normales. (V. *Journal de mathématiques spéciales*, avril 1884.)

par suite, celle du couple formé par ces deux droites est :

$$(1)\quad \left(\frac{\alpha'x}{a^2}+\frac{\beta'y}{b^2}-1\right)\left(\frac{\alpha''x}{a^2}+\frac{\beta''y}{b^2}-1\right)=0.$$

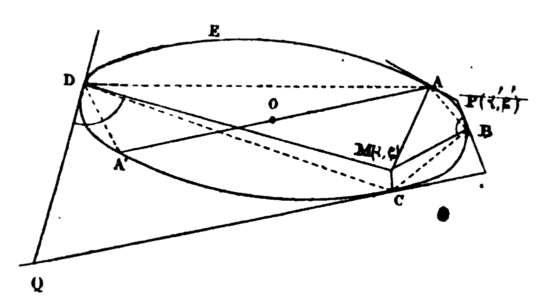


Fig. 103.

Les points A, B, C, D appartiennent à l'hypobole équilatère aux pieds des normales, courbe qui a pour équation (§ 271) :

$$(2)\quad c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0.$$

L'équation générale des coniques passant par les points communs aux coniques (1) et (2) est donc :

$$(3)\quad \lambda\,(c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y) - \left(\frac{\alpha'x}{a^2}+\frac{\beta'y}{b^2}-1\right)\left(\frac{\alpha''x}{a^2}+\frac{\beta''y}{b^2}-1\right)=0.$$

Cette équation, pour une valeur particulière de λ, doit pouvoir représenter l'ellipse E ; on peut donc l'identifier avec l'équation :

$$(4)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Cette identification conduit à plusieurs remarques importantes.

En observant que les équations (3) et (4) ont le même terme constant (-1), et en égalant les coefficients des termes en x^2 et en y^2, on a, d'abord,

$$(J)\quad \alpha'\alpha'' = -a^2,\qquad \beta'\beta'' = -b^2.$$

Écrivons maintenant que, dans l'équation (3), les coefficients des termes en x, en y et en xy, sont nuls et nous avons :

$$\lambda c^2 = \frac{\alpha'\beta'' + \beta'\alpha''}{a^2b^2},$$

$$-\lambda b^2\beta = \frac{\alpha' + \alpha''}{a^2}.$$

$$+\lambda^2 a\alpha = \frac{\beta' + \beta''}{b^2}.$$

Ces relations donnent :

$$\frac{\alpha'\beta'' + \beta'\alpha''}{c^2} = \frac{\beta' + \beta''}{\alpha} = \frac{\alpha' + \alpha''}{-\beta};$$

et, par combinaison avec les égalités (J),

$$(\mathrm{P}_n) \left\{ \begin{aligned} \beta &= \frac{c^2\beta'(\alpha'^2 - a^2)}{a^2\beta'^2 + b^2\alpha'^2}, \\ -\alpha &= \frac{c^2\alpha'(\beta'^2 - b^2)}{a^2\beta'^2 + b^2\alpha'^2}. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les formules que nous voulions établir.

293. Théorème. *Le produit des coefficients angulaires m, m', des côtés opposés d'un quadrilatère normal inscrit dans une ellipse, est constant et égal à $\frac{b^2}{a^2}$.*

Le coefficient angulaire de AB est $-\frac{b^2\alpha'}{a^2\beta'}$; celui de CD, est $-\frac{b^2\alpha''}{a^2\beta''}$; par suite, leur produit est égal à $\frac{b^4\alpha'\alpha''}{a^4\beta'\beta''}$. En utilisant les formules (J), on voit que l'on a, finalement, $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$.

294. Théorème de Joachimsthal. *Les pieds de trois des normales issues d'un point à une ellipse, et le point diamétralement opposé au quatrième pied, forment un quadrilatère inscriptible à un cercle.*

Soit A′ (Fig. 103) le point diamétralement opposé à A, les droites AD, A′D ont des coefficients angulaires dont le produit est égal à $-\frac{b^2}{a^2}$. Ceci résulte de ce que ces directions sont conjuguées et on peut le vérifier facilement par un calcul direct ; nous reviendrons sur ce point en étudiant les cordes supplémentaires de l'ellipse. D'autre part, les droites AD et BC étant deux côtés opposés d'un quadrilatère normal leurs coefficients angulaires ont (§ 293) un produit égal à $\frac{b^2}{a^2}$. On conclut de là que les cordes A′D, BC ont des coefficients égaux et des signes contraires ; ces droites sont donc inclinées, sur la direction positive de l'un des axes de l'ellipse, d'angles supplémentaires et nous savons (§278) que, dans ce cas, les quatre points A′, B, C, D sont situés sur un cercle.

295. Équation du cercle de Joachimsthal. Pour mieux faire comprendre l'idée qui dirige les calculs qui conduisent à l'équation du cercle passant par les pieds de trois des normales issues d'un point donné, nous envisagerons une question moins particulière et nous allons montrer comment on détermine *l'équation du cercle qui passe par trois des quatre points communs à deux coniques données.*

Supposons que l'on connaisse un point commun à deux coniques Γ, Γ′, et prenons ce point pour origine. Les équations de Γ et de Γ′ sont, respectivement,

$$(\Gamma) \quad Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x = 0,$$
$$(\Gamma') \quad ax^2 + a'y^2 + 2b''xy + 2by + 2b'x = 0.$$

Ces équations peuvent s'écrire :

$$(1) \quad x(Ax + 2B''y + 2B') = -y(A'y + 2B),$$
$$(2) \quad x(ax + 2b''y + 2b') = -y(a'y + 2b);$$

et, aussi, sous la forme :

$$(1') \quad x(Ax + 2B') = -y(A'y + 2B''x + 2B),$$
$$(2') \quad x(ax + 2b') = -y(a'y + 2b''x + 2b).$$

En combinant les équations (1) et (2), ou les équations (1') et (2'), en les divisant membre à membre, et en supprimant la solution $x = 0$, $y = 0$; on obtient une conique γ, qui passe par les trois autres points communs et qui a une équation de la forme :

$$(\gamma) \quad \alpha x^2 + \alpha' y^2 + 2\beta'' xy + 2\beta y + 2\beta' x + \alpha'' = 0.$$

Entre les équations (Γ), (γ), d'une part ; (Γ'), (γ), d'autre part ; on peut éliminer le terme en xy et l'on obtient deux équations ne renfermant que les termes en x^2 et en y^2. Ces équations représentent deux coniques passant par les trois points en question. On sait que les quatre points communs à ces coniques sont situés sur un cercle et nous avons montré (§ 275) comment on obtenait l'équation de ce cercle.

Telle est l'idée générale que nous allons appliquer à l'ellipse et à l'hyperbole équilatère aux pieds des normales.

Nous désignons toujours par α, β les coordonnées du point M d'où partent les normales que nous allons considérer ; soient A, B, C, D les pieds de ces normales parmi lesquels nous distinguerons particulièrement le point A dont les coordonnées seront représentées, dans les calculs qui vont suivre, par x_1, y_1.

Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au point A, au moyen des formules :

$$x = X + x_1, \quad y = Y + y_1.$$

L'équation de l'ellipse est alors :

$$(E') \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{2Xx_1}{a^2} + \frac{2Yy_1}{b^2} = 0,$$

et celle de l'hyperbole aux pieds des normales :

$$(H') \quad XY + X\left(\frac{b^2}{c^2}\beta + y_1\right) + Y\left(x_1 - \frac{a^2}{c^2}\alpha\right) = 0.$$

Avec les équations (E'), (H') formons, par combinaison, l'équation de la conique (γ). Nous avons, d'abord,

$$-\frac{X}{a^2}(X+2x_1)=\frac{Y}{b^2}(Y+2y_1),$$

$$-X\left(Y+y_1+\frac{b^2}{c^2}\beta\right)=Y\left(x_1-\frac{a^2}{c^2}\alpha\right);$$

et, par suite,

$$\frac{\frac{b^2}{a^2}(X+2x_1)}{Y+y_1+\frac{b^2}{c^2}\beta}=\frac{Y+2y_1}{x_1-\frac{a^2}{c^2}\alpha}.$$

Cette relation qui est vérifiée par les coordonnées des points B, C, D, peut s'écrire :

$$(3)\quad Y^2+Y\left(3y_1+\frac{b^2}{c^2}\beta\right)-X\frac{b^2}{a^2}\left(x_1-\frac{a^2}{c^2}\alpha\right)+2y_1\left(y_1+\frac{b^2}{c^2}\beta\right)$$
$$+2x_1\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{c^2}\alpha-x_1\right)=0$$

Un calcul analogue, ou, préférablement, une permutation des lettres (X, Y), (x_1, y_1), (α, β), (a, b), donne :

$$(4)\quad X^2+X\left(3x_1-\frac{a^2\alpha}{c^2}\right)-Y\frac{a^2}{b^2}\left(y_1+\frac{b^2}{c^2}\beta\right)+2x_1\left(x_1-\frac{a^2\alpha}{c^2}\right)$$
$$-2y_1\frac{a^2}{b^2}\left(y_1+\frac{b^2}{c^2}\beta\right)=0.$$

En ajoutant, membre à membre, les équations (3) et (4), on obtient, après réductions, le résultat suivant :

$$X^2+Y^2+Y\left(3y_1-\frac{a^2}{b^2}y_1-\beta\right)+X\left(3x_1-\frac{b^2}{a^2}x_1-\alpha\right)$$
$$+2\left(x_1^2\frac{c^2}{a^2}-y_1^2\frac{c^2}{b^2}-\beta y_1-\alpha x_1\right)=0.$$

Si nous revenons maintenant aux anciens axes, nous avons l'équation :

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(y-y_1)\left(3y_1-\frac{a^2}{b^2}y_1-\beta\right)+(x-x_1)\left(3x_1-\frac{b^2}{a^2}x_1-\alpha\right)$$
$$+2\left(x_1^2\frac{c^2}{a^2}-y_1^2\frac{c^2}{b^2}-\beta y_1-\alpha x_1\right)=0\,;$$

ou, en developpant et en réduisant,

$$(C_1)\quad x^2+y^2+x\left(\frac{c^2x_1}{a^2}-\alpha\right)-y\left(\frac{c^2y_1}{b^2}+\beta\right)-\frac{b^2}{a^2}x_1^2-\frac{a^2}{b^2}y_1^2-\alpha x_1-\beta y_1=0$$

Telle est l'équation du cercle de Joachimsthal ; on vérifie facilement que les valeurs $x=-x_1, y=-y_1$, satisfont à cette équation et l'on retrouve ainsi le théorème de Joachimsthal.

On peut d'ailleurs donner à l'équation précédente une forme plus remarquable, en posant :

$$u=a^2+\frac{b^2\beta}{y_1}=b^2+\frac{a^2\alpha}{x_1},$$

et, en tenant compte de la relation :

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1=0.$$

On trouve ainsi :

$$x^2+y^2+xx_1+yy_1=u\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+1\right).$$

Cette équation prouve que le cercle de Joachimsthal passe par les points communs au cercle décrit sur OA′ comme diamètre (A′ désignant le point diamétralement opposé à A) et à la tangente à l'ellipse au point A′. De là on peut conclure le théorème suivant, qui complète le théorème de Joachimsthal, et qui est dû à M. Laguerre.

Le cercle qui passe par les pieds de trois des normales issues d'un point à une ellipse, passe aussi par la projection

du centre de la courbe sur la tangente au point qui est diamétralement opposé au pied de la quatrième normale.

296. Centre de courbure. Si l'on imagine sur une courbe U, deux points voisins A, B et les normales en ces points ; ces droites se coupent en un point O ; et la limite des positions de ce point, quand on suppose que, A restant fixe, B vienne coïncider avec A, est un certain point ω_A que nous appellerons le *centre de courbure* de U, au point A.

297. Coordonnées du centre de courbure d'un point de l'ellipse. Il résulte de la définition générale que nous venons de donner du centre de courbure que dans l'ellipse, ce point peut être considéré comme un pôle normal, le pôle tangentiel correspondant étant le point A, pris sur la courbe.

Si nous désignons par x et y les coordonnées de A et par X, Y celles du centre de courbure ω_A, les formules P_n, (§ 292), donnent :

$$X = \frac{c^2y(x^2 - a^2)}{a^2y^2 + b^2x^2}$$

$$-Y = \frac{c^2x(y^2 - b^2)}{a^2y^2 + b^2x^2}.$$

En tenant compte de la relation :

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

Ces formules prennent la forme suivante :

$$X = \frac{c^2x^3}{a^4}, \quad Y = -\frac{c^2y^3}{b^4}.$$

298. Développée de l'ellipse. La développée d'une courbe U est le lieu de ses centres de courbure. Comme le centre de courbure est le point d'intersection de deux normales infiniment voisines, on voit que la développée peut aussi être considérée comme l'enveloppe des normales.

Les formules que nous venons de trouver donnent :

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad -\frac{y}{b} = \left(\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}};$$

L'équation de la développée, sous une forme irrationnelle, est donc :

$$\text{(D)} \quad (aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}},$$

Sans insister sur la forme de la développée de l'ellipse, nous ferons remarquer que l'équation (D) prouve que cette courbe est, toute entière, située dans l'intérieur du rectangle formé par les parallèles aux axes menées par les points P, P' ; Q, Q', obtenus en prenant :

$$OP = OP' = \frac{c^2}{a}; \quad OQ = OQ' = \frac{c^2}{b}.$$

Ces points remarquables P, P' ; Q, Q' qui sont, à la fois, les sommets de la développée et les centres de courbure des

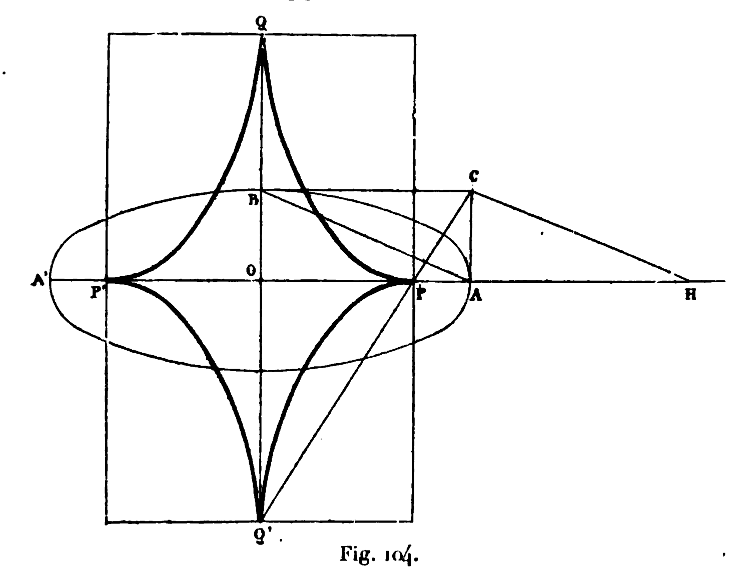


Fig. 104.

sommets de l'ellipse, s'obtiennent par une construction simple

et que représente la figure. En abaissant du point C, pôle de la corde AB, une perpendiculaire sur cette droite, on obtient les points P et Q′.

En effet, menons par C une parallèle CH à AB ; nous pourrons alors remarquer que AH = OA = a ; le triangle rectangle PCH donne d'ailleurs la relation :

$$\overline{AC}^2 = AP \cdot AH.$$

Nous avons donc :

$$AP = \frac{b^2}{a};$$

et, par suite,

$$OP = a - \frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{a}.$$

Le triangle POQ′ étant semblable au triangle AOB, nous pouvons encore écrire ces relations :

$$\frac{OQ'}{OA} = \frac{OP}{OB} = \frac{c^2}{ab},$$

d'où nous déduisons,

$$OQ' = \frac{c^2}{b}.$$

299. Cercle osculateur. Si l'on se rapporte à la définition que nous avons donnée d'une courbe osculatrice à une autre (§ 273) on voit qu'un cercle est osculateur à une courbe quand il a, avec elle, trois points communs coïncidents.

Si l'on prend arbitrairement, sur une ellipse, trois points voisins A, B, C ; ces trois points déterminent un cercle et quand les trois points deviennent coïncidents avec le point A le cercle considéré a une position limité qui est celle du cercle osculateur au point A.

En remarquant que les perpendiculaires aux cordes AB, BC, en leurs milieux se coupent au centre du cercle osculateur et

ont pour positions limites celles de deux normales infiniment voisines, au point A, on voit que le cercle osculateur n'est autre chose que le cercle de courbure, considéré tout à l'heure.

Nous nous proposons de montrer l'identité de ces deux cercles, par le calcul suivant.

A cet effet, cherchons les points communs à l'ellipse et au cercle de courbure et montrons que, parmi les points communs à ces deux courbes, trois sont coïncidents.

Prenons sur l'ellipse un point A et soient x', y' ses coordonnées ; celles du centre de courbure ω sont :

$$\frac{c^2x'^3}{a^4}, \quad -\frac{c^2y'^3}{b^4}. \quad (\S\ 297)$$

Le cercle de courbure a donc pour équation :

$$\text{(C)} \quad \left(x-\frac{c^2x'^3}{a^4}\right)^2+\left(y+\frac{c^2y'^3}{b^4}\right)=\left(x'-\frac{c^2x'^3}{a^4}\right)^2+\left(y'+\frac{c^2y'^3}{b^4}\right)^2,$$

ou,

$$x^2+y^2-2x\frac{c^2x'^3}{a^4}+2y\frac{c^2y'^3}{b^4}=x'^2+y'^2-2\frac{c^2x'^4}{a^4}+2c^2\frac{y'^4}{b^4}.$$

Transportons les axes, parallèlement à eux-mêmes, au point A. Les formules de transformation étant :

$$x=X+x', \quad y=Y+y',$$

l'équation du cercle de courbure est alors :

$$(X+x')^2+(Y+y')^2-2(X+x')\frac{c^2x'^3}{a^4}+2(Y+y')\frac{c^2y'^3}{b^4}=x'^2+y'^2-2c^2\frac{x'^4}{a^4}+2c^2\frac{y'^4}{b^4}$$

ou, après simplification,

$$X^2+Y^2+2Xx'\left(1-\frac{c^2x'^2}{a^4}\right)+2Yy'\left(1+\frac{c^2y'^2}{b^4}\right)=0.$$

On peut remarquer que l'on a

$$1-\frac{c^2x'^2}{a^4}=1-\frac{(a^2-b^2)x'^2}{a^4}=1-\frac{x'^2}{a^2}+\frac{b^2x'^2}{a^4}=\frac{y'^2}{b^2}+\frac{b^2x'^2}{a^4}.$$

On trouve, ainsi,

$$(\alpha)\quad a^2\left(1-\frac{c^2x'^2}{a^4}\right)=b^2\left(1+\frac{c^2y'^2}{b^4}\right)=\frac{a^4y'^2+b^4x'^2}{a^2b^2}.$$

Finalement, l'équation du cercle de courbure est :

$$(1)\quad X^2+Y^2+2\left(\frac{Xx'}{a^2}+\frac{Yy'}{b^2}\right)\frac{a^4y'^2+b^4x'^2}{a^2b^2}=0.$$

D'autre part, l'équation de l'ellipse, dans le système YAX, est :

$$(2)\quad \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+2\left(\frac{Xx'}{a^2}+\frac{Yy'}{b^2}\right)=0.$$

Si nous cherchons les points communs à l'ellipse et au cercle de courbure nous aurons à résoudre les équations (1) et (2). Nous voyons d'abord, par la forme même de ces équations, que les coniques qui leur correspondent ont deux points communs confondus à l'origine, par ce qu'elles admettent, l'une et l'autre, pour tangente au point A, la droite qui a pour équation :

$$\frac{Xx'}{a^2}+\frac{Yy'}{b^2}-1=0.$$

Cherchons où sont situés les deux autres points communs. La résolution des équations (1) et (2) conduit, très naturellement, à fairè la combinaison suivante :

$$X^2+Y^2-\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}\right)\frac{a^4y'^2+b^4x'^2}{a^2b^2}=0.$$

Cette équation, qui représente le faisceau de deux droites joignant le point A aux points que nous cherchons à déterminer, peut s'écrire :

$$(3)\quad \frac{X^2}{a^2}(a^4b^2-a^4y'^2-b^4x'^2)+\frac{Y^2}{b^2}(a^2b^4-a^4y'^2-b^4x'^2)=0.$$

Si maintenant nous tenons compte des relations :

$$a^2(b^2 - y'^2) = b^2x'^2,$$
$$b^2(a^2 - x'^2) = a^2y'^2,$$

nous obtenons la relation (3), sous la forme,

$$\frac{X^2x'^2}{a^4} - \frac{Y^2y'^2}{b^4} = 0.$$

Les droites qui joignent A aux deux points qui, abstraction faite de A, sont communs à l'ellipse et au cercle de courbure, sont donc celles qui correspondent aux équations :

$$\frac{Xx'}{a^2} + \frac{Yy'}{b^2} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{Xx'}{a^2} - \frac{Yy'}{b^2} = 0.$$

La première représente la tangente AT et ceci prouve que l'un des points cherchés est confondu avec A. L'autre équation démontre que le quatrième point S, est situé à l'extrémité d'une corde ménée par A et symétrique de AT par rapport aux cordes principales qui passent par A.

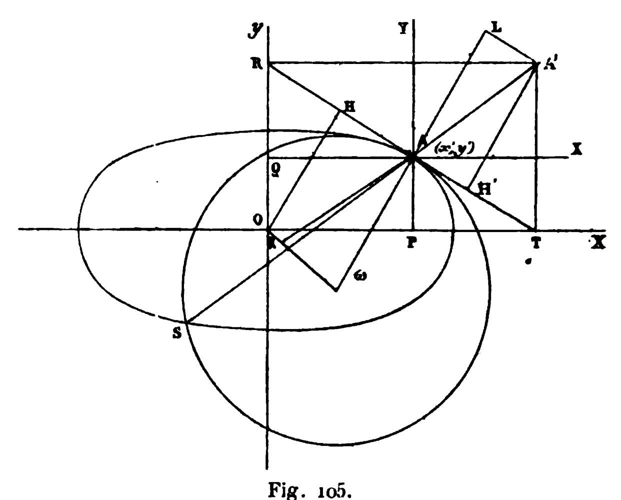


Fig. 105.

Cette dernière remarque pouvait se formuler, à priori, en applicant le théorème connu (§ 277) sur le quadrilatère qui est inscrit, à la fois, à une conique et à un cercle.

300. Construction du cercle osculateur en un point donné. La construction du cercle de courbure, en un point pris sur l'ellipse, peut se faire par des procédés très divers; celle que nous proposerons ici repose sur le théorème suivant :

Théorème. *Soit* A *un point pris sur l'ellipse de centre* O, *la tangente en* A *rencontre les axes aux points* R *et* T *; si du point* O *on abaisse une perpendiculaire* OH *sur* RT, *le rayon de courbure au point* A, *étant désigné par* ρ, *on a :*

$$\rho = \frac{AR \cdot AT}{OH}. \qquad \text{(Fig. 105)}$$

Les relations :

$$OT = \frac{a^2}{x'}, \quad OP = x'$$

donnent,

$$TP = \frac{a^2}{x'} - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'} = \frac{a^2 y'^2}{b^2 x'}.$$

On a, de même,

$$RQ = \frac{b^2 x'^2}{a^2 y'}.$$

Les triangles rectangles ATP, ARQ, donnent :

$$(1) \quad \overline{AT}^2 = y'^2 + \frac{a^4 y'^4}{b^4 x'^2} = \frac{y'^2 (a^4 y'^2 + b^4 x'^2)}{b^4 x'^2}$$

et,

$$(2) \quad \overline{AR}^2 = x'^2 + \frac{b^4 x'^4}{a^4 y'^2} = \frac{x'^2 (a^4 y'^2 + b^4 x'^2)}{a^4 y'^2}.$$

Enfin, on a la relation :

$$\frac{1}{\overline{OH}^2} = \frac{1}{\overline{OT}^2} + \frac{1}{\overline{OR}^2},$$

ou,

$$(3) \quad \frac{1}{\overline{OH}^2} = \frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} = \frac{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}{a^4 b^4}.$$

Les égalités (1), (2) et (3) donnent, par combinaison,

$$(4) \quad \frac{\overline{AT}^2 . \overline{AR}^2}{\overline{OH}^2} = \frac{(a^4y'^2 + b^4x'^2)^3}{a^8b^8}.$$

D'autre part, l'équation (C), (§ 299), prouve que,

$$\rho^2 = x'^2\left(1 - \frac{c^2x'^2}{a^4}\right)^2 + y'^2\left(1 + \frac{c^2y'^2}{b^4}\right)^2.$$

En appliquant les formules (2), (§ 299), on a :

$$(5) \quad \rho^2 = \frac{(a^4y'^2 + b^4x'^2)^3}{a^8b^8}.$$

Les égalités (4) et (5) prouvent le théorème énoncé.

La construction qui résulte de ce théorème est la suivante. Par les points R et T menons des parallèles aux axes, si nous joignons le point A′, ainsi obtenu, au point A, le centre de courbure est à l'intersection de la normale au point A avec la perpendiculaire OK, abaissée du centre sur AA′.

Soit ω le point de rencontre de OK et de la normale au point A ; nous allons montrer que ωA = ρ.

Le pentagone ROKTA′ étant inscriptible à un cercle on a :

$$AR . AT = AA' . AK.$$

Soit A′L la perpendiculaire abaissée de A′ sur la normale Aω ; le quadrilatère ωKA′L étant indescriptible, on a aussi :

$$AL . A\omega = AA' . AK.$$

La comparaison de ces deux égalités donne :

$$A\omega = \frac{AR . AT}{AL}.$$

Mais on a,

$$AL = A'H' = OH,$$

et, finalement,

$$A\omega = \frac{AR \cdot AT}{OH} = \rho.$$

EXERCICES

1. *Soit* A, *un point pris sur une ellipse d'un centre* O, *la normale en ce point rencontre l'un des axes ox de la courbe en un point* N ; *par* N, *on mène une perpendiculaire à la normale, et cette droite rencontre* OA *en un point* P : *démontrer que la perpendiculaire abaissée de* P *sur ox, rencontre* AN *au centre de courbure.*

MANNHEIM. *(Cours de Géométrie de l'École Polytechnique.)*

2. *On considère deux points* A *et* B *sur une ellipse ; les normales en ces points rencontrent l'un des axes de la courbe, aux points* A' *et* B' ; *soit* M *le milieu de* AB ; *démontrer que la perpendiculaire élevée en ce point* M, *à* AB, *passe par le milieu de* A'B'. LAGUERRE.

3. *Démontrer que si quatre points d'une ellipse correspondant aux paramètres* t_1, t_2, t_3, t_4, *sont situés sur un cercle, on a :*

$$\Sigma t_1 = \Sigma t_1 t_2 t_3,$$

en déduire le théorème de Joachimsthal.

Pour établir ce second point on remarque d'abord que les paramètres $t't''$ de deux points diamétralement opposés vérifient la relation $t't'' = -1$. En désignant par t_2, t_3, t_4, les paramètres des pieds de trois des normales, et par θ celui du quatrième pied, le point diamétralement opposé à celui-ci a un paramètre $t_1 = -\frac{1}{\theta}$.

On a d'ailleurs d'après l'équation (1) (§ 290) :

$$t_2 t_3 + t_3 t_4 + t_4 t_1 + \theta t_2 + \theta t_3 + \theta t_4 = 0.$$

et,

$$\theta t_2 t_3 t_4 = -1.$$

En multipliant ces égalités par t_1, en remplaçant $t_1\theta$ par -1, et en ajoutant les résultats, membre à membre, on a :

$$\Sigma t_1 t_2 t_3 - \Sigma t_1 = 0.$$

4. *On considère un point* M *d'où l'on peut mener à une ellipse* E *deux normales rectangulaires* MA, MB ; *de* M *partent deux autres normales* MC, MD ; *trouver le lieu décrit par le pôle de* CD.

On remarque que le lieu décrit par le pôle de AB est le cercle de Monge et on applique les formules (J) (§ 292). Le résultat est :

$$\frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} = a^2 + b^2.$$

5. *Si l'on considère quatre tangentes à l'ellipse* E *telles que les normales aux points de contact concourent, démontrer que les parallèles à ces tangentes menées par l'un des sommets de l'ellipse rencontrent la courbe en quatre points situés sur un cercle.* (JOACHIMSTHAL).

Soit Δ l'une des tangentes, et soit φ l'angle d'anomalie du point de contact M, on a :

$$\frac{\alpha a}{\cos\varphi} - \frac{\beta b}{\sin\varphi} = c^2.$$

Si par le sommet A on mène une parallèle à Δ, elle rencontre E en un point μ et l'angle d'anomalie de μ est égal à 2φ. Les coordonnées x'', y'' de μ sont donc données par les formules :

$$\frac{x''}{a} = \cos 2\varphi, \quad \frac{y''}{b} = \sin 2\varphi;$$

nous avons donc

$$\alpha a \sin\varphi - b\beta\cos\varphi = \frac{c^2}{2}\frac{y''}{b}.$$

Élevons au carré, nous obtenons :

$$a^2\alpha^2(1 - \cos 2\varphi) + b^2\beta^2(1 + \cos 2\varphi) - ab\alpha\beta\sin 2\varphi = \frac{c^4}{2}\frac{y''^2}{b^2}.$$

Le premier membre est une fonction linéaire en x'', y'', et l'on a finalement

$$y''^2 = P'',$$

puis,

$$x''^2 = Q'',$$

P'' et Q'' étant des fonctions linéaires en x'' et y''. Les quatre points μ appartiennent donc au cercle qui correspond à l'équation :

$$x^2 + y^2 = P + Q.$$

On peut aussi démontrer, très simplement, cette propriété remarquable en transportant les axes de coordonnées, parallèlement à eux-mêmes, au sommet considéré. (*V. Journal de Mathématiques spéciales*, mars 1884.)

TRENTE ET UNIÈME LEÇON

L'ELLIPSE (suite)

DIAMÈTRES ET CORDES SUPPLÉMENTAIRES

301. Ellipse rapportée à deux diamètres conjugués. Lorsque les axes des coordonnées sont deux diamètres conjugués d'une conique, l'équation de cette courbe est de la forme :

$$MX^2 + NY^2 = 1.$$

En effet, à toute valeur de X, doivent correspondre deux valeurs pour Y, égales et de signes contraires, et *vice versa*.

En désignant par a' et b' les longueurs des demi-diamètres conjugués considérés, l'équation précédente peut s'écrire :

$$(E') \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0.$$

Cette équation présente la plus grande analogie avec celle de l'ellipse rapportée à ses axes, mais elle suppose, implicitement, que *les axes sont obliques*.

Si l'on applique à l'équation (E') la formule (3) (§ 184), qui exprime que deux directions sont conjuguées, en désignant par m' et m'' les coefficients angulaires de ces directions, on a

$$(1) \quad m'm'' = -\frac{b'^2}{a'^2}.$$

Nous aurons rarement à nous occuper, dans les développements qui suivent, de la forme (E'); mais elle peut être utile-

ment employée dans certaines questions et, à ce propos, nous ferons remarquer que les formules relatives aux tangentes (§ 284) subsistent pour l'équation (E'), mais qu'il n'en est pas de même pour les égalités relatives aux normales (§ 289).

302. Définition des points conjugués. Nous dirons que deux points M'M'' placés sur l'ellipse sont des *points conjugués quand les droites* OM' *et* OM'' *qui joignent le centre de l'ellipse aux points considérés sont deux diamètres conjugués.*

A un point M', correspondent deux points conjugués M'', M''; M' et M'', sont situés du même côté par rapport à ox; M' et M'' du même côté par rapport à oy.

303. Formules de Chasles. Nous désignerons par x', y', les coordonnées de M'; par x'', y'' celles de M''; et nous nous proposons de calculer x'' et y'' en fonctions de x' et de y'.

Soit t' le paramètre de M', t'' celui de M''; entre t' et t'' il existe une relation que nous allons d'abord rechercher.

La droite M' M'' a pour équation [(S'), § 283]

$$\frac{x}{a}(1 - t't'') + \frac{y}{b}(t' + t'') = 1 + t't'',$$

et le faisceau (OM', OM'') est représenté par l'équation

$$\left[\frac{x}{a}(1 - t't'') + \frac{y}{b}(t' + t'')\right]^2 = (1 + t't'')^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right).$$

égalité qu'on peut écrire :

$$\frac{x^2}{a^2}\,4t't'' - \frac{2xy}{ab}(t'+t'')(1-t't'') + \frac{y^2}{b^2}\,(1 + t'^2t''^2 - t'^2 - t''^2) = 0.$$

Le produit des coefficients angulaires de ces droites devant être égal à $-\frac{b^2}{a^2}$, on a donc

$$4t't'' = t'^2 + t''^2 - 1 - t'^2t''^2,$$

ou,

$$(t't'' + 1)^2 = (t' - t'')^2,$$

ou, encore,

$$(t't'' + t'' - t' + 1)(t't'' + 1 + t' - t'') = 0.$$

En égalant à zéro ces deux facteurs, on voit qu'à t' correspondent deux valeurs de t'', et l'on peut remarquer que ces valeurs ont un produit égal à -1, ce qui donne deux points correspondants diamétralement opposés ; ce sont les points M″ et M‴ que nous venons de définir. On peut, d'ailleurs, distinguer facilement dans les formules :

$$(A) \quad t'' = \frac{t'-1}{t'+1}, \qquad (A') \quad t'' = \frac{t'+1}{1-t'};$$

quelle est celle qu'il faut prendre pour calculer les coordonnées du point M″, conjugué de M′ et situé, avec lui, du même côté par rapport au grand axe ?

En effet, les formules :

$$\frac{x}{a} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \frac{y}{b} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

prouvent que l'on peut former le tableau suivant :

1°	t varie de	0 à 1	Le point correspondant est mobile	dans le premier quadrant.
2°	t —	1 à $+\infty$	—	dans le deuxième quadrant.
3°	t —	$-\infty$ à -1	—	dans le troisième quadrant.
4°	t —	-1 à 0	—	dans le quatrième quadrant.

Ce tableau permet de préciser la position d'un point placé sur l'ellipse et de dire, d'après la valeur donnée à t, à quel quadrant appartient ce point.

La valeur de t'' étant maintenant connue, nous pouvons calculer les coordonnées du point m''. Nous avons, d'abord,

$$1 + t''^2 = \frac{2(1+t'^2)}{(1-t')^2}, \quad \text{et} \quad 1 - t''^2 = \frac{-4t'}{(1-t')^2};$$

puis, par combinaison avec (A′),

$$\frac{2t''}{1+t''^2} = \frac{1-t'^2}{1+t'^2}, \quad \frac{1-t''^2}{1+t''^2} = \frac{-2t'}{1+t'^2}.$$

Nous trouvons donc, finalement,

$$\text{(I)}\quad \frac{y''}{b}=\frac{x'}{a}; \qquad \text{(II)}\quad \frac{x''}{a}=-\frac{y'}{b}.$$

Ce sont les formules que nous voulions établir, et que nous allons appliquer à une démonstration nouvelle des théorèmes d'Apollonius [1].

304. Théorèmes d'Apollonius (3e *démonstration*). Soit posé :

$$\mathrm{OM}'=a', \quad \mathrm{OM}''=b';$$

on a

$$(1)\quad a'^2=x'^2+y'^2, \quad \text{et} \quad b'^2=x''^2+y''^2.$$

Cette dernière égalité peut s'écrire, en utilisant les formules de Chasles,

$$(2)\quad b'^2=\frac{a^2y'^2}{b^2}+b^2\frac{x'^2}{a^2}.$$

Les égalités (1) et (2) donnent alors :

$$a'^2+b'^2=\frac{b^2x'^2+a^2y'^2}{b^2}+\frac{a^2y'^2+b^2x'^2}{a^2}.$$

En remarquant que

$$b^2x'^2+a^2y'^2=a^2b^2,$$

il vient,

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2.$$

1. Les formules de Chasles se démontrent aussi, plus directement, en observant que l'on a

$$\frac{y'}{x'}\cdot\frac{y''}{x''}=-\frac{b^2}{a^2}.$$

et, par suite,

$$\frac{\frac{x'}{a}}{\frac{y''}{b}}=\frac{\frac{y'}{b}}{-\frac{x''}{a}}.$$

En élevant les deux membres au carré et en faisant la somme des numérateurs et des dénominateurs, on voit que chacune de ces fractions a pour valeur $+1$, ou -1.

C'est le premier théorème d'Apollonius.

Pour établir le second théorème, remarquons que la tangente en M', à l'ellipse, est parallèle à OM″ et que, par suite, le triangle M″OT a même surface que M″OM'. Or, nous avons :

$$OT = \frac{a^2}{x'}, \quad \text{et,} \quad M''H = y'';$$

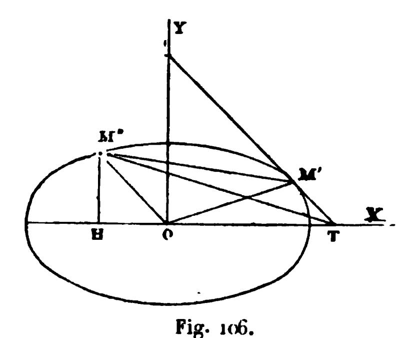


Fig. 106.

par conséquent,

$$2M'OM'' = a^2 \frac{y''}{x'};$$

ou, en appliquant la formule (I),

$$2M'OM'' = a^2 \frac{b}{a} = ab.$$

La surface du triangle formé par le centre et par deux points conjugués est donc constante, et égale à celle du triangle formé par le centre et deux sommets de la courbe.

C'est le second théorème d'Apollonius.

305. Réciproques des théorèmes d'Apollonius. La réciproque du premier théorème n'est pas exacte ; car si l'on imagine deux diamètres conjugués OM', OM″ et si l'on prend, par rapport à OY, le diamètre OM''_1 symétrique de OM″, la somme $\overline{OM'}^2 + \overline{OM''_1}^2$ est bien égale à $a^2 + b^2$ et pourtant les diamètres OM', OM''_1, ne sont pas conjugués, leurs extrémités étant placées dans le même quadrant d'ellipse.

Mais la réciproque du second théorème est exacte et elle peut s'établir ainsi.

Soient OM′, OM″ deux demi-diamètres tels que le triangle M′OM″ ait une surface égale à $\frac{ab}{2}$; nous voulons montrer que ces diamètres sont conjugués.

En effet, soit OM‴ le demi-diamètre conjugué de OM′, OM‴ étant situé, par rapport à la droite indéfinie M′O, dans la même région que OM″. Les deux triangles M″OM′, M‴OM′, ayant la même surface, la droite M″M‴ est parallèle à OM′; mais nous savons que la parallèle menée à un diamètre, par l'extrémité du diamètre conjugué, est tangente à la conique; par suite, M‴ et M″ se confondent, et OM″ est bien le diamètre conjugué de OM′.

306. Tangentes conjuguées. Nous appelons ainsi deux tangentes qui ont des directions conjuguées, ou si l'on préfère, les tangentes dont les points de contact sont deux points conjugués.

Cherchons *le lieu des points d'où partent deux tangentes conjugués.*

A cet effet, déterminons d'abord les coordonnées du pôle d'une corde AB, dont les extrémités ont pour paramètres, respectivement, t' et t''.

Les équations des tangentes en ces points A et B, sont :

$$\frac{x}{a}(1-t'^2)+2\frac{y}{b}t'=1+t'^2,$$
$$\frac{x}{a}(1-t''^2)+2\frac{y}{b}t''=1+t''^2$$

on en tire :

$$(1)\quad \frac{x}{a}=\frac{1-t't''}{1+t't''},\qquad (2)\quad \frac{y}{b}=\frac{t'+t''}{t't''+1}.$$

Si les points A et B sont conjugués, on a aussi (§ 303),

$$(3)\quad t't''+t'-t''+1=0.$$

Le lieu s'obtient en éliminant t' et t'' entre ces trois relations. Cette élimination peut se faire par des méthodes diverses ; la plus rapide consiste à remarquer que l'on a :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1+t'^2+t''^2+t'^2t''^2}{(1+t't'')^2} ;$$

et que la relation (3) donne :

$$t'^2t''^2+1=t'^2+t''^2-4t't''.$$

On a donc, finalement,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2=0.$$

Ainsi :

Théorème. *Le lieu des points d'où partent deux tangentes conjuguées à une ellipse, est une ellipse homothétique à la proposée et dont les axes sont égaux à ceux de cette conique, multipliés par* $\sqrt{2}$.

Ce théorème se démontre encore très simplement en se servant des formules de Chasles, ou en utilisant l'équation générale des tangentes à l'ellipse, en fonction du coefficient angulaire.

307. Diamètres conjugués égaux. Si, dans la relation $m'm''=-\frac{b^2}{a^2}$, on suppose $m'=-m''$; on a $m'=\frac{b}{a}$, et $m''=-\frac{b}{a}$. Les deux diamètres correspondants sont conjugués ; de plus, ils sont égaux puisqu'ils sont symétriques par rapport aux axes et leurs extrémités sont les points de rencontre de l'ellipse avec les diagonales du rectangle des axes.

En désignant par A la longueur commune de ces demi-diamètres conjugués égaux, on a :

$$A^2=\frac{a^2+b^2}{2}.$$

L'angle θ formé par ces diamètres peut se calculer par la formule :

$$a'b' \sin\theta = ab.$$

Cette égalité correspond au second théorème d'Apollonius et donne :

$$\sin\theta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

L'équation de l'ellipse, rapportée à ses diamètres conjugués égaux, est donc

$$X^2 + Y^2 = \frac{a^2 + b^2}{2};$$

et, si l'on remarque que les perpendiculaires abaissées d'un point de l'ellipse sur ces diamètres ont pour longueur : $X \sin\theta$, et $Y \sin\theta$, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. *La somme des carrés des distances d'un point quelconque de l'ellipse à ses diamètres conjugués égaux est constante, et égale à* $2\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$.

308. Définition des cordes supplémentaires. Deux cordes MC, MC′ qui passent par les extrémités d'un diamètre CC′ et qui se coupent sur l'ellipse, sont appelées cordes supplémentaires.

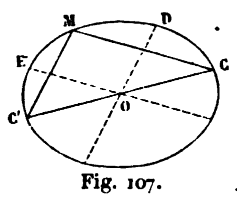


Fig. 107.

309. Théorème I. *Deux cordes supplémentaires ont des directions conjuguées.*

En effet, soit CC′ un diamètre de l'ellipse, et M un point de la courbe ; les droites MC, MC′ ont des directions conjuguées. En effet, les diamètres OD, OE, menés par le centre, parallèle-

ment à ces cordes, passent par leurs milieux, puisque $OC = OC'$; ainsi MC est la direction conjuguée de OD; MC et MC' ont donc des directions conjuguées.

310. Théorème II. *Si par les extrémités d'un diamètre on mène deux droites parallèles à deux directions conjuguées, elles se coupent sur l'ellipse et forment deux cordes supplémentaires.*

Cette propriété résulte de la précédente et aussi de ce fait qu'à une direction donnée, ne correspond qu'une direction conjuguée.

311. Théorème III. *Si, par un point de l'ellipse, on mène deux cordes ayant deux directions conjuguées, leurs extrémités sont diamétralement opposées.*

Le raisonnement nécessaire pour établir ce théorème est le même que celui que nous avons indiqué pour la démonstration de la propriété précédente.

312. Variation de l'angle de deux diamètres conjugués. Imaginons deux diamètres conjugués DD', EE' et proposons-nous d'étudier la variation de l'angle DOE', ou de l'angle supplémentaire DOE. Si par les sommets A, A', nous

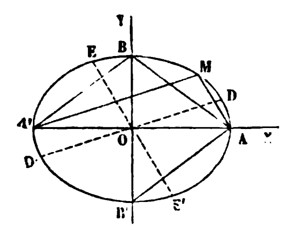


Fig. 107 *bis*.

menons deux droites AM, A'M parallèles aux droites considérées, ces droites se coupent sur l'ellipse (§ 30) et nous allons étudier la variation de l'angle AMA'.

Soient x', y' les coordonnées de M, et soit posé : $MMA' = \alpha$, $MA'A = \alpha'$; V désignant l'angle supplémentaire de A'MA, on a :

$$V = \alpha + \alpha',$$

et, par suite,

$$(1) \quad \operatorname{tg} V = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha'}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha'}$$

En tenant compte des relations :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'}{a - x'}, \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{y'}{a + x'},$$

la formule (1) devient :

$$\operatorname{tg} V = \frac{\dfrac{y'}{a - x'} + \dfrac{y'}{a + x'}}{1 - \dfrac{y'^2}{a^2 - x'^2}}$$

ou,

$$\operatorname{tg} V = \frac{2ay'}{a^2 - x'^2 - y'^2};$$

si l'on remarque que

$$a^2 - x'^2 = \frac{a^2 y'^2}{b^2},$$

on a, enfin,

$$\operatorname{tg} V = \frac{2ab^2}{c^2 y'}.$$

Cette formule permet d'apprécier la variation de V ; elle prouve que V est un angle toujours compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et qui va constamment en diminuant quand le point M se déplace sur l'arc AB, depuis le point A jusqu'au point B. Le minimum de V a lieu quand y' est maximum, c'est-à-dire quand $y = b$. Dans ce cas, les diamètres conjugués sont égaux ; et l'angle aigu θ, formé par ces deux diamètres, correspond à la formule :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2ab}{c^2}.$$

313. Trouver les axes d'une ellipse, connaissant deux diamètres conjugués. — Construction de Chasles.

Nous supposons que l'on connaisse, en grandeur et en position, deux diamètres conjugués OD, OE ; et nous allons déterminer, en grandeur et en position, les axes de l'ellipse.

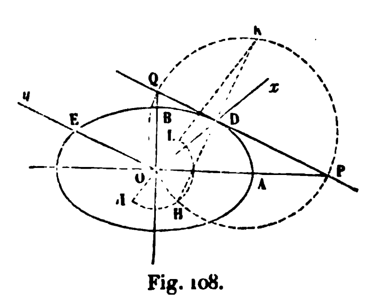


Fig. 108.

La construction que nous allons donner est due à Chasles ; elle repose sur le théorème suivant.

Théorème. *Les segments interceptés, depuis le point de contact, sur une tangente fixe, par deux diamètres conjugués mobiles, ont un produit constant.*

En effet le faisceau des diamètres conjugués mobiles a pour équation :

$$(1) \quad y^2 + \lambda xy - \frac{b'^2}{a'^2} x^2 = 0,$$

en supposant que λ soit un paramètre variable et que l'équation de l'ellipse, rapportée aux axes OD, OE, soit représentée par :

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0.$$

Si dans l'équation (1) on fait $x = a'$, on obtient la relation :

$$y^2 + \lambda a' y - b'^2 = 0,$$

et les racines de cette équation sont les longueurs DP et DQ. On a donc :

$$DP \cdot DQ = -b'^2.$$

Cette relation établit le théorème en question.

Revenons maintenant au problème que nous avons en vue.

Les théorèmes d'Apollonius donnent :

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$
$$a'b' \sin\theta = ab.$$

Ces égalités donnent, par combinaison,

$$(1)\quad (a+b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right),$$

$$(2)\quad (a-b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right);$$

θ désignant l'angle aigu des deux demi-diamètres OD, OE. Les formules (1) et (2) prouvent : 1° que $(a+b)$ est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés a', b' forment un angle obtus, égal à $\frac{\pi}{2} + \theta$; 2° que $(a-b)$ est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés a', b', font un angle aigu, égal à $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Élevons au point D, à la droite PQ, une perpendiculaire sur laquelle nous prenons $DH = DK = b'$; les droites OK, OH ont donc pour valeur, respectivement, $(a+b)$ et $(a-b)$. Par suite, si du point O comme centre, avec OH pour rayon, on décrit le demi-cercle IHL, les droites KI, KL, représentent les longueurs des axes.

Déterminons maintenant leurs directions.

A cet effet, remarquons que nous avons :

$$DP \cdot DQ = \overline{DH}^2 = \overline{DK}^2 ;$$

le cercle circonscrit au triangle rectangle QOP passe donc par les points H et K, et comme le point P est le milieu de l'arc KPH, la droite OA est bissectrice de l'angle KOH.

De ces remarques diverses, nous pouvons déduire la construction cherchée, qui a été donnée par Chasles [1] dans les termes suivants :

Par l'extrémité D *d'un des demi-diamètres conjugués donnés, on mènera une droite perpendiculaire au second demi-diamètre ; on portera sur cette droite, à partir du point* A, *deux segments égaux à ce second demi-diamètre* ;

On joindra, par deux droites, les extrémités de ces segments au centre de la courbe ;

On divisera en deux également, par deux nouvelles droites, l'angle que ces deux premières feront entre elles et son supplément ;

Ces deux nouvelles droites seront, en direction, les deux axes principaux de l'ellipse ;

La somme des deux premières droites sera égale au grand axe, et leur différence sera égale au petit axe.

314. Construire une ellipse, point par point, connaissant deux diamètres conjugués. Soient PP', QQ' les deux diamètres conjugués proposés et soit ABCD le parallélogramme construit avec ces deux droites. Sur AB comme diamètre, décrivons le demi-cercle ARB et soit QR le rayon de ce cercle, rayon qui est perpendiculaire sur AB. Joignons BR et menons une corde MN parallèle à BR, puis faisons la construction indiquée par la figure. Nous obtenons ainsi huit points, tels que L ; ces points appartiennent à l'ellipse qui a pour diamètres conjugués PP' et QQ'.

Pour le démontrer, prenons pour axes de coordonnées les droites OP, OQ ; nous avons, en désignant par x' et y' les coordonnées de I,

$$OH = QL = x', \quad LH = IS = y'.$$

1. Aperçu historique, p. 362.

Posons, maintenant,

$$OP = a', \quad OQ = b'. \quad RQN = MQB = \alpha;$$

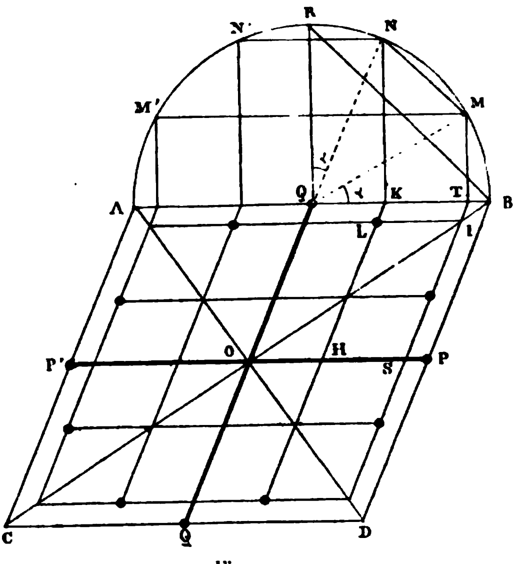


Fig. 109.

Le triangle QNK donne :

$$(1) \quad x' = a' \sin \alpha;$$

d'autre part, nous avons :

$$\frac{IS}{BP} = \frac{OS}{OP} = \frac{QT}{QM} = \cos \alpha$$

ou,

$$(2) \quad y' = b' \cos \alpha.$$

Les relations (1) et (2) donnent, par combinaison,

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

et cette égalité prouve que le point L appartient à l'ellipse que l'on veut construire.

Cette construction offre ce coté avantageux de donner facilement et, pour ainsi dire, d'un seul coup, huit points de l'ellipse.

315. Remarque. Lorsque l'on connaît deux diamètres conjugués OP, OQ en grandeur et en position, et, par surcroit, le grand axe de la courbe, il est inutile d'appliquer la construction de Chasles pour trouver le second axe, ou, pour

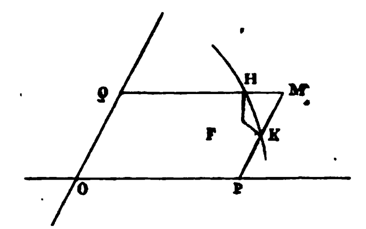


Fig. 110.

déterminer la direction des axes. Il suffit de décrire, du point commun aux diamètres proposés comme centre, avec un rayon égal au grand axe, une circonférence qui coupe les cotés MP, MQ du parallélogramme OPMQ aux points K et H. Si, en ces points, on élève des perpendiculaires aux droites MP, MQ, on obtient un point F qui, par une propriété connue (§ 242), est le foyer de l'ellipse. De cette remarque, on déduit : 1° la direction des axes ; 2° la grandeur du petit axe.

EXERCICES

1. *Trouver la relation que vérifient constamment les longueurs r, r' de deux cordes supplémentaires aboutissant aux extrémités du grand axe.*

On remarquera d'abord que l'on a :

$$r'^2 - r^2 = 4ax,$$

puis on appliquera le théorème relatif au carré de la médiane et l'on trouvera, finalement,

$$c^2(r'^2 - r^2)^2 - 8a^4(r^2 + r'^2) + 16a^4(a^2 + b^2) = 0.$$

2. *Démontrer que la somme des carrés des projections de deux diamètres conjugués mobiles, sur un diamètre fixe, est constante.*

3. *Démontrer les théorèmes d'Apollonius en coupant l'ellipse par un cercle concentrique, de rayon* R, *et en exprimant que les diamètres qui joignent les points communs à l'ellipse et au cercle sont coïncidents.*

On trouve ainsi, pour déterminer R, l'équation:

$$R^4 - R^2(a'^2 + b'^2) + a'^2 b'^2 \sin^2\theta = 0\,;$$

les axes de coordonnées étant les deux diamètres conjugués. Cette équation prouve les théorèmes d'Apollonius ; cette méthode est attribuée à *Galois.*

4. *Démontrer que le rayon du cercle osculateur, en un point quelconque* M *de l'ellipse, est une troisième proportionnelle à la distance de ce point au diamètre conjugué de* M, *et à la moitié de ce diamètre conjugué.*

(Cours d'analyse de l'Université de Liège par E. Catalan)

5. *En désignant par* u *et* v *les longueurs des rayons vecteurs qui aboutissent au point* M *d'une ellipse, et par* a' *la longueur du demi-diamètre conjugué de celui qui a pour extrémité le point* M′, *on a :*

$$uv = a'^2.$$

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON

L'ELLIPSE (suite)

FOYERS ET DIRECTRICES

Dans l'étude que nous allons faire, d'après l'équation réduite, des foyers et des directrices de l'ellipse, nous définirons les foyers : *des points* F, F', *situés sur le grand axe à une distance du centre égale à* $\pm c$. Les directrices DE, D'E', sont, elles-mêmes, définies comme étant les polaires des foyers ; elles correspondent aux équations :

$$x = \frac{a^2}{c}, \quad x = -\frac{a^2}{c}.$$

Ces points et ces droites coïncident d'ailleurs avec ceux et avec celles que nous avons, précédemment, dénommés de cette façon.

Nous allons retrouver, dans les développements qui suivent, quelques-unes des propriétés que nous avons déjà démontrées (Leç. 24) ; nous établirons aussi plusieurs théorèmes nouveaux, et nous les appliquerons à la résolution géométrique de quelques problèmes élémentaires relatifs au tracé des tangentes à l'ellipse.

316. Théorème I. *La distance d'un foyer* F, *à un point* M, *pris sur une ellipse, la courbe étant rapportée à ses axes, est donnée par la formule :*

$$FM = a - \frac{cx'}{a},$$

x' *désignant l'abcisse de* M.

Soient x', y' les coordonnées de M, on a :

$$\overline{FM}^2 = y'^2 + (c - x')^2,$$

ou,

$$\overline{FM}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2) + c^2 - 2cx' + x'^2,$$

ou, encore,

$$\overline{FM}^2 = \frac{c^2x'^2}{a^2} - 2cx' + a^2$$

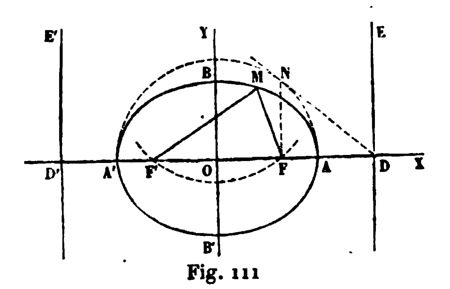


Fig. 111

Le second membre de cette égalité est le carré parfait de l'expression $\pm\left(a - \frac{cx'}{a}\right)$, et l'on peut poser

$$(1) \quad FM = a - \frac{cx'}{a'}$$

En effet, x' variant de $+ a$ à $- a$, $\frac{x'}{a}$ est plus petit que l'unité ; par conséquent, $\frac{cx'}{a}$ est inférieur à c ou, à fortiori, inférieur à a.

Un calcul analogue donne

$$(2) \quad F'M = a + \frac{cx'}{a}.$$

317. Théorème II. *Lorsqu'un point* M *est mobile sur une ellipse, la somme des distances de ce point aux deux foyers est constante et égale au grand axe.*

Cette propriété est la conséquence des formules (1) et (2), que nous venons d'établir.

Il résulte de cette remarque que si l'on donne les axes de l'ellipse et si l'on veut déterminer ses foyers, il suffit de décrire, du point B comme centre (fig. 111), avec a pour rayon, l'arc de cercle FF′.

318. Théorème III. *La directrice qui correspond au foyer* F, *est la droite qui est perpendiculaire au grand axe en un point* D, *ce point ayant pour polaire, dans le cercle principal, une droite passant par* F.

Nous appelons *Cercle principal* celui qui est décrit sur le grand axe de l'ellipse, comme diamètre; nous insisterons d'ailleurs, dans la leçon suivante, sur ses propriétés.

La relation

$$OD = \frac{a^2}{c}$$

prouve que le pied D de la directrice DE (fig. 111), est situé au point de concours, avec l'axe OX, de la tangente en N au cercle principal; N étant l'extrémité de l'ordonnée du point F. La propriété en question se trouve ainsi établie.

319. Théorème IV. *Le rapport des distances d'un point mobile sur une ellipse, au foyer et à la directrice correspondante est constant, et égal à l'excentricité de la courbe.*

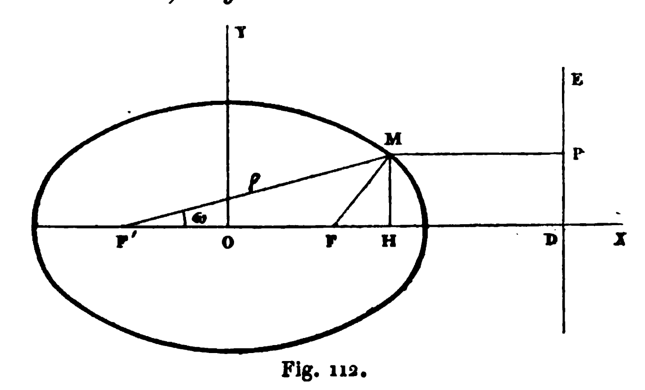


Fig. 112.

On a (§ 316),

$$(1) \quad FM = a - \frac{cx'}{a} = \frac{a^2 - cx'}{a},$$

et, d'autre part,

$$(2)\quad \text{MP} = \text{HD} = \frac{a^2}{c} - x' = \frac{a^2 - cx'}{c}.$$

Les égalités (1) et (2) donnent :

$$\frac{\text{MF}}{\text{MP}} = \frac{c}{a} = e.$$

320. Théorème V. *La podaire d'un foyer est le cercle principal.* Soit M un point pris sur l'ellipse ; abaissons du foyer F une perpendiculaire FI sur la tangente en ce point et cherchons le lieu du point I, quand M parcourt l'ellipse.

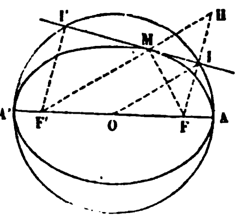


Fig. 113.

L'équation de II' est :

$$(1)\quad y - mx = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

celle de FI :

$$(2)\quad my + x = c.$$

Pour avoir le lieu décrit par le point I, il faut éliminer m entre les équations (1) et (2). En élevant ces équations au carré, et en ajoutant les résultats obtenus, on obtient :

$$y^2 + x^2 = a^2.$$

On a supprimé le facteur $m^2 + 1$, auquel, pour des raisons déjà données (p. 312, ex. 2), correspond le foyer.

321. Théorème VI. *Le produit des distances des foyers* F, F' *à une tangente quelconque est constant, et égal à* b^2.

On a, en effet, (fig. 113)

$$F'I = \frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}-mc}{\sqrt{1+m^2}},$$

$$F'I' = \frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}+mc}{\sqrt{1+m^2}};$$

ces formules sont obtenues en calculant la distance des points F, F′ à la droite I I′ qui est tangente à l'ellipse et qui a pour équation :

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

On a donc :

$$FI \,.\, F'I' = \frac{a^2m^2+b^2-m^2c^2}{1+m^2} = \frac{m^2(a^2-c^2)+b^2}{1+m^2},$$

ou,

$$FI \,.\, F'I' = b^2.$$

322. Théorème VII. *Les rayons vecteurs qui partent des foyers et qui aboutissent à un même point de l'ellipse coupent la courbe sous des angles supplémentaires.*

Soit M le point pris sur l'ellipse, la tangente en ce point rencontre le grand axe en un point T, et si l'on appelle x', y' les coordonnées de M, on a :

$$OT = \frac{a^2}{x'},$$

par suite,

$$TF = \frac{a^2}{x'} - c = \frac{a^2-cx'}{x'},$$

et,

$$TF' = \frac{a^2}{x'} + c = \frac{a^2+cx'}{x'}.$$

Ces égalités donnent, par combinaison,

$$(1) \quad \frac{TF}{TF'} = \frac{a^2-cx'}{a^2+cx'}.$$

On a, aussi,

$$MF = a - \frac{cx'}{a} = \frac{a^2 - cx'}{a}.$$

et,

$$MF' = a + \frac{cx'}{a} = \frac{a^2 + cx'}{a}.$$

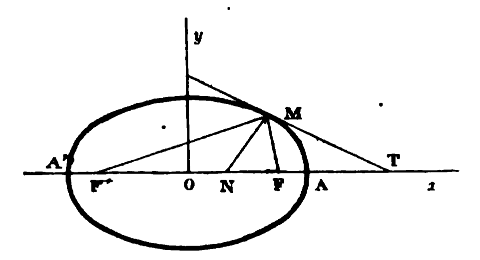


Fig. 115.

On a donc, finalement,

$$(2) \quad \frac{MF}{MF'} = \frac{a^2 - cx'}{a^2 + cx'}.$$

En comparant (1) et (2) on voit que le point T, qui est extérieur au segment FF′, partage cette droite dans le rapport des côtés MF, MF′. La droite MT est donc la bissectrice de l'angle extérieur du triangle FMF′ ; ainsi les deux angles FMT, F′MT sont supplémentaires ([1]).

1. On peut établir la propriété en question de bien des façons différentes. Si l'on veut la reconnaître par un procédé purement analytique, en posant FMT = V, F′MT = V′, les angles V et V′ sont bien déterminés et l'on trouve :

$$\operatorname{tg} V = \frac{b^2}{cy'}, \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} V' = -\frac{b^2}{cy'}.$$

on a donc

$$\operatorname{tg} V = -\operatorname{tg} V',$$

ou

$$V + V' = \pi.$$

On conclut de cette propriété que *la normale* MN *à l'ellipse en un point* M, *est la bissectrice de l'angle formé par les semi-droites qui vont de ce point* M *aux foyers de la courbe.*

323. Théorème VIII. *Lorsqu'une transversale placée dans le plan d'une ellipse rencontre la courbe aux points* M *et* M', *et la directrice au point* K ; *la droite qui joint* K *au foyer correspondant est la bissectrice de l'angle formé par la droite* FM, *et le prolongement de* M'F.

Ce théorème et quelques-unes des propriétés suivantes s'établissent, facilement, par des considérations géométriques ; nous les considérerons comme des corollaires immédiats des théorèmes que nous venons de démontrer par l'analyse.

Abaissons, sur la directrice considérée, les perpendiculaires : ME, M'E'. Le théorème IV donne :

$$\frac{MF}{ME} = \frac{M'F}{M'E'},$$

'no

$$\frac{MF}{M'F} = \frac{ME}{M'E'}.$$

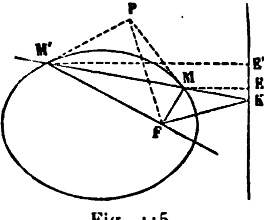


Fig. 115.

Nous avons aussi :

$$\frac{ME}{M'E'} = \frac{KM}{KM'}.$$

et, par suite,

$$\frac{MF}{M'F} = \frac{MK}{M'K}.$$

Cette proposition prouve que le point K partage la droite

MM′ dans le rapport des côtés FM, FM′ ; K, étant d'ailleurs extérieur au segment MM′, nous reconnaissons ainsi que FK est la bissectrice de l'angle adjacent à MFM′.

324. Théorème IX. *Le lieu des symétriques d'un foyer de l'ellipse par rapport aux tangentes de cette courbe, est un cercle ayant pour centre l'autre foyer, et pour rayon le grand axe de l'ellipse considérée.*

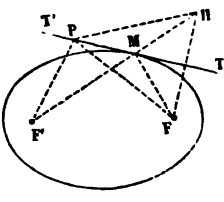


Fig. 116.

Abaissons du point F une perpendiculaire sur la tangente MT, et prolongeons F′M jusqu'à sa rencontre avec cette perpendiculaire. L'égalité des angles TMF, T′MF′ (§ 322) prouve que le point H ainsi obtenu est, précisément, le symétrique du foyer F′ par rapport à TT′. Nous avons donc

$$MF = MH,$$

et, par suite,

$$F'H = MF' + MF = 2a.$$

Le lieu du point H est donc un cercle décrit, du foyer F′ comme centre, avec $2a$ pour rayon. Ce cercle est appelé, quelquefois, *cercle directeur* de l'ellipse, correspondant au foyer F′.

325. Théorème X. *L'ellipse peut être considérée comme le lieu géométrique des points également éloignés d'un des foyers* F, *et du cercle directeur qui correspond au foyer* F′.

En effet, soit M un point de la courbe et soit H le symétrique du foyer F, par rapport à la tangente à l'ellipse au point M ; nous venons de reconnaître : 1° que les trois points H, M, F étaient en ligne droite ; 2° que le point M était égale-

ment éloigné des points F et H. La distance de M, au cercle directeur, étant égale à MH, nous pouvons donc dire que tout

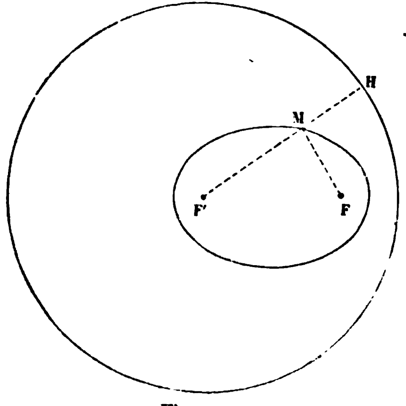


Fig. 117.

point de l'ellipse est également éloigné du foyer F et du cercle directeur qui correspond au second foyer F′.

326. Théorème XI. *La droite qui va du foyer* F *à un point quelconque* P, *pris dans le plan d'une ellipse, est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs qui joignent* F *aux points de contact des tangentes issues de* P *à l'ellipse.*

Soient M et M′ les points de contact des tangentes issues de P à l'ellipse considérée ; ayant pris le point symétrique H de F, par rapport à PM ; et le symétrique H′ de F′ par rapport

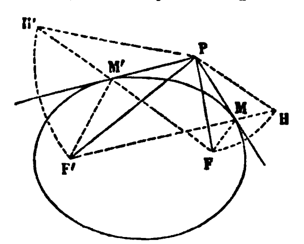


Fig. 118.

à PM′ ; nous savons que les points H,M,F′, d'une part ; H′,M′,F′, d'autre part, sont en ligne droite et que nous avons

$$F'H = FH' = 2a.$$

Les deux triangles FPH', F'PH ont donc leurs trois côtés égaux. Nous pouvons conclure, de cette remarque, que les angles PF'H, PH'F sont égaux, et, comme les angles PH'F et M'F'P sont eux-mêmes égaux, pour des raisons de symétrie, nous reconnaissons ainsi l'égalité des angles M'F'P et PF'M.

327. Théorème XII. *Les droites qui joignent un foyer* F *au pôle* P *de la corde* MM' (fig. 115), *et au point qui est commun à cette droite et à la directrice qui correspond à* F *sont rectangulaires.*

Cette propriété, déjà établie (§ 238), est la conséquence évidente des théorèmes VIII et XI. Elle fournit deux corollaires remarquables qui peuvent s'énoncer ainsi :

1° *La portion d'une tangente à l'ellipse, comptée depuis le point de contact jusqu'au point où elle rencontre une directrice de la courbe, est vue du foyer correspondant sous un angle droit.*

2° *Si, d'un point* A *pris sur une directrice de l'ellipse, on mène des tangentes à la courbe, la projection de* A, *sur la corde des contacts, est le foyer correspondant à la directrice considérée.*

328. Théorème XIII (Théorème de Poncelet). *Les tangentes issues d'un point* P *à une ellipse, et les droites qui joignent ce point aux foyers, forment deux angles qui admettent la même bissectrice.*

En effet, l'égalité des triangles FPH', F'PH (fig. 118), prouve que les angles F'PH, FPH', sont égaux. En retranchant à ces angles la partie qui leur est commune, on a

$$FPH = F'PH',$$

ou,

$$2FPM = 2F'PM',$$

ou, enfin,

$$FPM = F'PM'.$$

329. Théorème XIV. *La longueur* ρ *du rayon vecteur qui va du foyer* F' *à un point de l'ellipse, et l'angle* ω *que fait*

cette direction avec la direction F'F *du grand axe, vérifient constamment la relation :*

$$\frac{p}{\rho} = 1 - e \cos \omega.$$

dans laquelle p désigne le paramètre de l'ellipse, et e son excentricité.

Soit x' l'abcisse du point M (fig 112) ; nous avons trouvé plus haut (§ 316) la relation :

$$\mathrm{F'M} = a + \frac{cx'}{a}.$$

D'autre part, le triangle MF'H donne

$$\mathrm{F'H} = x' + c = \rho \cos \omega.$$

On a donc

$$\rho = a + \frac{c}{a}(\rho \cos \omega - c),$$

ou,

$$a\rho = b^2 + c\rho \cos \omega.$$

Cette égalité peut encore s'écrire :

$$1 = \frac{b^2}{a\rho} + \frac{c}{a} \cos \omega,$$

et en posant, suivant l'usage,

$$\frac{b^2}{a} = p, \quad \frac{c}{a} = e,$$

on a

$$\frac{p}{\rho} = 1 - e \cos \omega.$$

Cette relation a été établie en supposant que le point M était placé sur le premier quadrant de l'ellipse ; mais on reconnaît, sans difficulté, qu'elle est générale, et qu'elle est vérifiée par les coordonnées polaires de tous les points de l'ellipse.

Nous reviendrons d'ailleurs (§ 419), sur cette équation polaire ; nous voulons seulement, pour le moment, en déduire deux propriétés sur les foyers, qui compléteront celles que nous avons déjà obtenues.

330. Théorème XV. *La somme des inverses des rayons vecteurs qui partent d'un foyer et qui ont des directions opposées, est constante, et égale à* $\frac{2}{p}$.

On a, en effet,

$$\frac{p}{F'A} = 1 - e \cos \omega,$$

et,

$$\frac{p}{F'B} = 1 - e \cos (\omega + \pi).$$

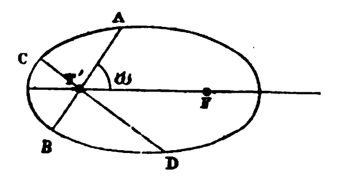


Fig. 119.

On a donc,

$$\frac{p}{F'A} + \frac{p}{F'B} = 2 ;$$

ou, enfin,

$$\frac{1}{F'A} + \frac{1}{F'B} = \frac{2}{p}.$$

331. Théorème XVI. *La somme des inverses de deux cordes rectangulaires, passant par le foyer, est constante.*

Soit AB (fig. 119) une corde focale quelconque, on a :

$$F'A = \frac{p}{1 - e \cos \omega}, \quad \text{et} \quad F'B = \frac{p}{1 + e \cos \omega} ;$$

par suite,

$$AB = \frac{2p}{1 - e^2 \cos^2 \omega},$$

ou,

$$(1) \quad \frac{2p}{AB} = 1 - e^2 \cos^2 \omega.$$

Pour avoir la longueur de CD il suffit de changer, dans cette formule, ω en $\frac{\pi}{2} + \omega$; on obtient alors

$$(2) \quad \frac{2p}{CD} = 1 - e^2 \sin^2 \omega.$$

Les égalités (1) et (2) donnent

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2 - e^2}{2p}.$$

Nous pourrions poursuivre cette étude, car il existe [1] un grand nombre de propriétés remarquables sur les cordes focales, propriétés qui se déduisent très simplement de la formule

$$\frac{p}{\rho} = 1 - e \cos \omega ;$$

mais les exemples que nous venons de produire suffisent pour montrer l'usage que l'on peut faire de cette importante relation.

---

1. Voyez les exercices proposés à la fin de cette leçon.

EXERCICES

1. *Démontrer que si par le foyer* F *d'une ellipse on mène un rayon vecteur qui rencontre la courbe en* A, *et la directrice correspondante de* F, *en* B; *on a*

$$\frac{1}{FA} - \frac{1}{FB} = \frac{1}{p}.$$

2. *Si l'on joint un point* M *pris sur une ellipse à ses foyers* F, F' *et si l'on désigne par* A, B *les extrémités des deux cordes focales, ainsi obtenues, on a*

$$\frac{MF}{FB} + \frac{MF'}{F'A} = 2\left(\frac{a}{p} - 1\right).$$

3. *Soient* AB *une corde focale mobile et* Δ *une droite quelconque du plan de l'ellipse; démontrer que si des points* A *et* B, *on abaisse des perpendiculaires* AA', BB' *sur* Δ, *on a, constamment,*

$$\frac{AA'}{AF} + \frac{BB'}{BF} = \frac{2h}{p},$$

h désignant la distance du foyer F *à* Δ.

On démontre cette propriété très simplement, par la géométrie, en observant que l'on a

$$h\,(FA + FB) = AA' \,.\, FB + BB' \,.\, FA,$$

et,

$$\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{2}{p}.$$

4. *Si l'on considère deux cordes focales, rectangulaires,* AB *et* CD, *on a*

$$\frac{1}{FA\,.\,FB} + \frac{1}{FC\,.\,FD} = \frac{2 - e^2}{p^2}.$$

Cette propriété est la conséquence immédiate des théorèmes XV et XVI.

5. *On considère une ellipse* E *et une autre conique* E' *ayant avec elle: 1° un foyer commun* F, *2° les mêmes directions principales. Démontrer que si par* F *on mène deux rayons vecteurs* FAA', FBB', *on a*

$$\frac{FA}{FA'} + \frac{FB}{FB'} = C^{te}.$$

6. *Si l'on mène une corde focale* AB *et si l'on désigne par* δ *le demi-diamètre parallèle à* AB, *on a :*

$$\frac{FA \cdot FB}{\delta^2} = C^{te}.$$

Déduire de là, que si deux diamètres sont rectangulaires, le losange obtenu en joignant les extrémités de ces diamètres est circonscrit à un cercle de rayon constant, quels que soient les diamètres rectangulaires considerés.

7. *On considère une ellipse et par les foyers* F, F', *on mène deux rayons vecteurs mobiles parallèles et dans la même direction ; on joint les extrémités de ces rayons vecteurs aux foyers ; les droites ainsi obtenues, ont un point commun* I ; *trouver le lieu décrit par* I.

Soit posé :

$$FA = q, \quad F'A' = q' ;$$

on a

$$\frac{FI}{IA'} = \frac{q}{q'}, \quad \text{ou} \quad \frac{FI}{FA'} = \frac{q}{q+q'}.$$

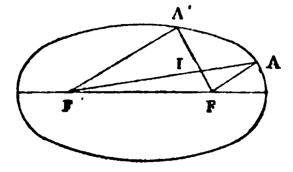


Fig. 120.

On trouve ainsi :

$$(1) \quad FI = \frac{q(2a - q')}{q+q'}.$$

Une remarque semblable donne :

$$(2) \quad F'I = \frac{q'(2a - q)}{q+q'}.$$

En observant que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{2}{p},$$

on voit que FI + F'I est une quantité constante, le lieu du point I est une ellipse homofocale à la proposée.

8. *Démontrer que la somme des rayons vecteurs menés, d'un point pris dans le plan de l'ellipse, aux deux foyers, est plus grande que* $2a$ *pour un*

point P, *extérieur à la courbe; et plus petite que* $2a$ *pour un point* N, *pris dans l'intérieur de l'ellipse.*

En déduire que tous les points d'une tangente à l'ellipse, à l'exception du point de contact sont extérieurs à la courbe.

Soit M le point de rencontre de l'ellipse et de PF'. On a :

$$\text{PF} > \text{MF} - \text{MP},$$

et,

$$\text{PF}' = \text{MF}' + \text{MP};$$

par suite,

$$\text{PF} + \text{PF}' > 2a.$$

On voit de même que l'on a

$$\text{NF} + \text{NF}' < 2a.$$

En prenant un point P sur la tangente TT' (Fig. 116), on a

$$\text{PF} = \text{PH},$$

et,

$$\text{PF}' + \text{PH} > \text{F}'\text{H},$$

d'où l'on déduit :

$$\text{PF} + \text{PF}' > 2a.$$

9. *Par les foyers* F, F' *d'une ellipse on mène deux rayons vecteurs parallèles et, dans la même direction; désignons par* M *et* M' *les extrémités de ces rayons et par*

$$\text{A}\frac{x}{a} + \text{B}\frac{y}{b} = 1,$$

l'équation de MM', *démontrer que les paramètres* A *et* B *vérifient la relation :*

$$\text{A}^2a^2 + \text{B}^2b^2 = a^2.$$

En déduire le lieu décrit par le pôle de MM'. *Ce lieu est le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre.*

10. *Les pieds des obliques abaissées d'un foyer sur les tangentes à l'ellipse, sous un même angle, et dans un même sens de rotation, sont situés sur un cercle.*

11. *Si autour d'un point fixe* P, *on fait tourner une transversale qui ren-*

contre l'ellipse aux points A *et* B, *si de ces points on abaisse des perpendiculaires* AA', BA' *sur la polaire de* P, *démontrer que la somme :*

$$\frac{AF}{AA'} + \frac{BF}{BB'} = C^{te},$$

F *désignant l'un des foyers de la conique.*

12. *Autour d'un point fixe* P *on fait tourner une transversale qui rencontre l'ellipse aux points* A, B ; *démontrer que l'on a :*

$$\operatorname{tg}\frac{AFP}{2}\operatorname{tg}\frac{BFP}{2} = C^{te}.$$

(Cet exercice et le précédent sont extraits du *Traité des sections coniques* de Chasles, p. 188.)

13. *Par le foyer* F *d'une ellipse, au dessus du grand axe, on mène deux rayons secteurs* FA, FB; *trouver* 1° *le lieu décrit par le pôle de* AB; 2° *le lieu décrit par le milieu de* AB. *quand on suppose* $FA + FB = 2l$: 3° *trouver le lieu décrit par le pôle de* AB, *quand on suppose* $FA . FB = m^2$. (École polytechnique, 1878.)

L'ellipse étant rapportée à ses axes, on trouvera les résultats suivants :

$$1^\circ \quad (a^2y^2 + b^2x^2)(a - l) = acb^2x,$$

$$2^\circ \quad cx = a(a - l)$$

$$3^\circ \quad a^2y^2(b^2 - m^2) + b^2x^2(a^2 - m^2) - 2a^2b^2cx + a^2b^2c^2 = 0.$$

On parvient très rapidement à ces égalités en désignant par x' l'abcisse de A, par x'' celle de B, et en remarquant que

$$FA = a - \frac{cx'}{a}, \; FB = a - \frac{cx''}{a}.$$

14. *Démontrer que les deux coniques homofocales qui correspondent aux équations :*

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2 - \mu} + \frac{y^2}{b^2 - \mu} = 1;$$

se coupent orthogonalement.

En faisant la différence de ces deux égalités, membre à membre, on obtient une relation qui exprime, précisément, la propriété énoncée.

TRENTE-TROISIÈME LEÇON

L'ELLIPSE (suite et fin)

TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE DE L'ELLIPSE

332. Formules de transformation. — Cercle principal. Nous avons donné précédemment (§ 191) l'idée générale de la transformation homographique ; nous nous proposons d'appliquer cette idée à l'étude de l'ellipse en considérant cette courbe comme une transformée homographique d'un cercle.

Les formules qui nous serviront à cette transformation sont :

$$(1)\quad x = X, \qquad (2)\quad y = \frac{b}{a}Y.$$

L'équation de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

devient

$$(3)\quad X^2 + Y^2 = a^2.$$

Ainsi : *à l'ellipse, correspond le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre.*

Nous avons déjà désigné ce cercle par l'expression *cercle principal.*

333. Points correspondants. Soit M (x,y), un point de l'ellipse ; le point correspondant M_1 (X, Y), est, d'après la

formule (1), situé sur la perpendiculaire abaissée de M sur le grand axe ; et aussi, d'après (3), sur le cercle principal. On a, d'ailleurs,

$$\frac{MP}{M_1P} = \frac{b}{a}.$$

Si, par M, on mène une parallèle au grand axe, cette droite rencontre OM_1 en un point M_2, et l'on a

$$\frac{OM_2}{OM_1} = \frac{MP}{M_1P} = \frac{b}{a}.$$

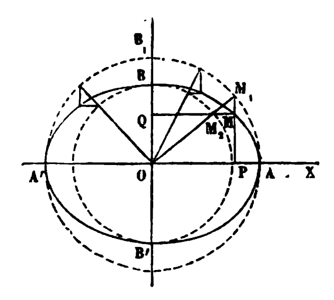


Fig. 121.

En remarquant que $OM_1 = a$, on a donc $OM_2 = b$. On voit ainsi que le lieu du point M_2 est le cercle décrit sur le petit axe comme diamètre. On déduit de cette propriété une construction, point par point, de l'ellipse ; cette construction, bien connue, est indiquée par la figure ci-dessus.

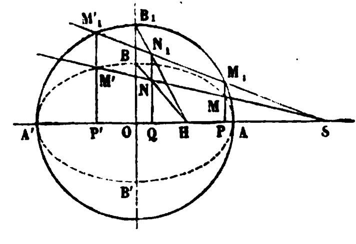


Fig. 122.

Supposons maintenant que l'on considère un point quel-

conque N, (x, y), et soit N_1, (X, Y) le point correspondant. Pour construire ce point N_1 on peut observer que l'on a

$$\frac{ON}{ON_1} = \frac{OB_1}{OB_1},$$

et que, par suite, les droites BN, $B_1 N_1$, concourent sur le grand axe de l'ellipse ; cette remarque permet de déterminer très simplement le point correspondant d'un point donné.

Lorsque le point considéré est à l'infini, le point correspondant est aussi à l'infini.

334. Droites correspondantes. Nous avons déjà vu (§ 191) que, dans la transformation homographique, à une droite Δ, correspondait une autre droite Δ_1 ; ces deux droites sont naturellement, appelées *droites correspondantes.*

335. Théorème. *Dans la transformation homographique qui est définie par les formules :*

$$x = X, \quad y = \frac{b}{a} Y,$$

les droites correspondantes coupent l'axe des x au même point.

En effet, soit

$$(\Delta) \quad Ax + By + C = 0,$$

l'équation de la droite Δ ; l'équation de la droite transformée Δ_1, sera

$$(\Delta_1) \quad AX + B\frac{b}{a}Y + C = 0.$$

Ces équations prouvent que Δ et Δ_1 coupent l'axe ox au même point, ce point étant à une distance de l'origine égale à $-\frac{C}{A}$, pour l'une et l'autre de ces droites.

Lorsque deux droites sont parallèles, on voit aussi que les

droites correspondantes sont parallèles. Deux courbes correspondantes coupent l'axe ox aux mêmes points ; et cette remarque générale s'applique à toute transformation dans laquelle l'une des formules qui la définissent est $\alpha y - \beta Y = 0$; α, β représentant des constantes. Ceci tient à ce que y étant nul, Y l'est aussi.

On déduit de cette observation que *les tangentes aux courbes correspondantes, en deux points qui sont correspondants coupent l'axe des x, au même point.*

On peut appliquer cette propriété à la résolution du problème qui consiste à mener une tangente à l'ellipse par un point donné.

336. Problème. *Mener une tangente à l'ellipse par un point donné.*

Nous distinguerons trois cas suivant que le point proposé est : sur l'ellipse, extérieur à la courbe, ou, enfin, rejeté à l'infini.

1° *Le point est pris sur l'ellipse.* Soit M le point pris sur la courbe, M_1 le point correspondant; menons la tangente M_1T au cercle principal ; elle rencontre AA' au point T, et la droite TM est la tangente demandée.

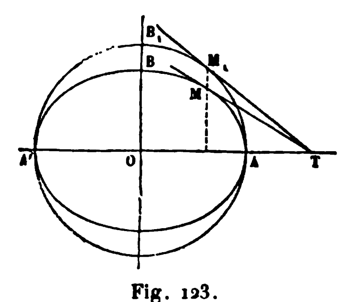


Fig. 123.

2° *Le point est extérieur à l'ellipse.* Soient P le point proposé, P_1 le point correspondant, obtenu comme il a été dit plus haut, et comme l'indique la figure. Ayant mené par P_1 les tangentes P_1T et P_1T' au cercle principal, les tangentes demandées sont les droites PT, PT'.

Pour que le problème proposé soit possible, il suffit que le point P_1 soit extérieur au cercle principal ; que l'on ait, par conséquent,

$$X^2 + Y^2 - a^2 > 0$$

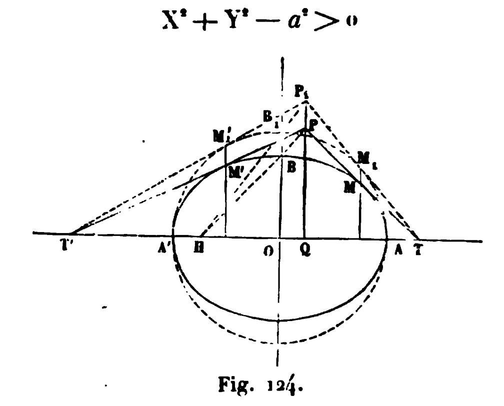


Fig. 124.

ou, d'après les formules de transformation,

$$x^2 + \frac{a^2 y^2}{b^2} - a^2 > 0.$$

ou, encore,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 > 0.$$

Le point P doit donc être extérieur à l'ellipse donnée. Cette condition est nécessaire et suffisante.

3° *Le point est rejeté à l'infini.* Supposons que le point considéré soit à l'infini dans la direction ot, et proposons-nous de mener à l'ellipse une tangente parallèle à cette direction. Par le point B, menons BR parallèle à ot, B_1R est la droite qui correspond à BR. Si du point O, nous abaissons sur BR une perpendiculaire OM_1, la tangente au cercle principal, en M_1, rencontre ox au point T, et si, par T, on mène une parallèle TT' à la direction donnée ot, TT' est l'une des tangentes demandées. Le problème comporte une seconde solution : l'autre tangente est une droite symétrique de TT', par rapport à l'origine.

En construisant, comme le montre la figure, le point M, correspondant de M_1, on a, en même temps qu'une vérification de la construction précédente, la détermination du point de contact.

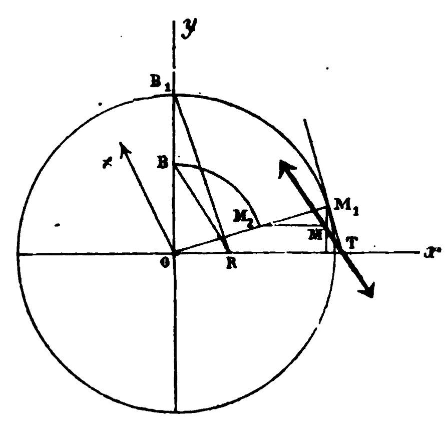


Fig. 125.

337. *Trouver les points communs à une ellipse, dont on connaît les axes en grandeur et en direction, et à une droite de son plan.*

En transformant, par la méthode précédente, la figure proposée : à la droite donnée MM', correspond la droite M_1M_1' (fig. 124). Celle-ci coupe le cercle principal aux points M_1 M'_1 qui donnent les points cherchés M et M' en abaissant, de M_1 et de M'_1, des perpendiculaires sur le grand axe.

Cherchons dans quel cas la rencontre de la droite et de l'ellipse est réelle.

Soit

$$A\frac{x}{a}+B\frac{y}{b}=1,$$

l'équation de MM' ; celle de M_1M_1' est

$$A\frac{X}{a}+B\frac{Y}{a}=1.$$

La distance de O à MM'a pour valeur $\frac{a}{\sqrt{A^2+B^2}}$; ainsi la rencontre du cercle et de M_1M_1' sera réelle, si l'on a :

$$\frac{a^2}{A^2+B^2} \leqslant a^2$$

ou,

$$A^2 + B^2 \geqslant 1.$$

Dans le cas particulier où l'on suppose $A^2 + B^2 = 1$, TN_1 est

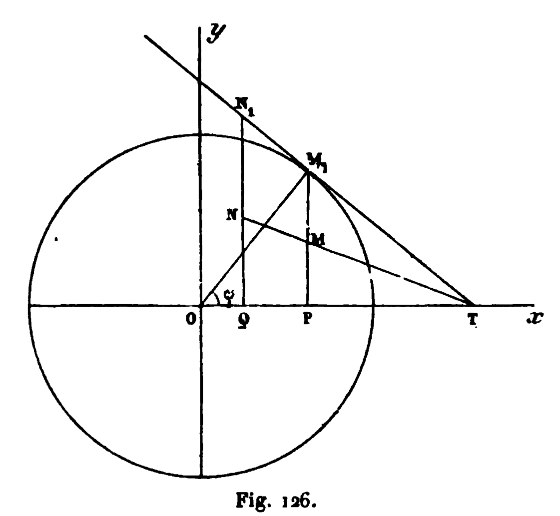


Fig. 126.

tangente au cercle principal et, par suite, la droite TN_1 à l'ellipse.

En posant :

$$A = \cos\varphi, \qquad B = \sin\varphi ;$$

on a, pour l'équation générale des tangentes à l'ellipse :

$$(1) \quad \frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi = 1.$$

On obtient ainsi une forme, déjà trouvée, pour l'équation des tangentes à l'ellipse.

On peut observer à ce propos que l'angle φ est susceptible d'une interprétation géométrique remarquable.

En effet, à la droite (1) correspond une tangente au cercle principal, ayant pour équation

$$(\mu) \quad X \cos \varphi + Y \sin \varphi = a.$$

Cette relation prouve que φ est l'angle que fait avec ox la perpendiculaire abaissée de l'origine sur TN_1. L'angle φ est donc l'angle sous lequel on voit de l'origine l'ordonnée M_1P du cercle principal qui correspond au point M.

L'angle φ, que l'on considère aussi dans l'astronomie, est appelé *anomalie excentrique.*

338. Théorème. *A deux directions conjuguées correspondent deux directions rectangulaires.*

Soient :

$$(\Delta) \quad Ax + By + C = 0,$$
$$(\delta) \quad A'x + B'y + C' = 0,$$

les équations de deux droites Δ, δ. les droites transformées Δ_1, δ_1 correspondent aux équations suivantes :

$$(\Delta_1) \quad AX + B\frac{b}{a}Y + C = 0,$$

$$(\delta_1) \quad A'X + B'\frac{b}{a}Y + C' = 0.$$

Si les droites Δ, δ ont des directions conjuguées, on a :

$$\frac{AA'}{BB'} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Cette relation prouve que les droites Δ_1, δ_1, sont rectangulaires.

339. Application. *Trouver le lieu du point de concours des tangentes conjuguées d'une ellipse.*

Pour montrer, sur un exemple simple, comment on peut faire servir la méthode de transformation, dont nous venons

d'exposer les premiers principes, à la démonstration de certaines propriétés de l'ellipse, proposons-nous de trouver le lieu des points d'où partent deux tangentes à l'ellipse ayant des directions conjuguées.

Soit P (fig. 124) un des points du lieu et P_1 le point correspondant ; soient x, y les coordonnées de P ; X, Y celles de P_1. Les tangentes PM, PM′ étant conjuguées, les droites correspondantes PM_1, PM'_1 représentent deux tangentes rectangulaires du cercle principal. On sait que le point P_1 appartient à un cercle ayant pour centre O, et pour rayon $a\sqrt{2}$; on a donc :

$$X^2 + Y^2 = 2a^2.$$

En appliquant les formules de transformation, on a, pour l'équation du lieu,

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = 2a^2$$

ou,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2.$$

C'est l'équation déjà trouvée (§ 306.)

340 Théorème. *Les aires correspondantes ont un rapport constant dont la valeur est égale à* $\frac{b}{a}$.

Considérons d'abord deux triangles correspondants ABC, $A_1B_1C_1$; en désignant par S et S_1 leurs aires respectives, nous allons montrer que

$$\frac{S}{S_1} = \frac{b}{a}.$$

Les deux trapèzes $AB\alpha\beta$, $A_1B_1\alpha\beta$, ont même hauteur ; leurs surfaces sont donc dans le rapport des longueurs : $A\alpha + B\beta$, et $A_1\alpha + B_1\beta$. D'ailleurs, nous avons

$$\frac{A\alpha}{A_1\alpha} = \frac{B\beta}{B_1\beta} = \frac{b}{a}.$$

d'où,

$$\frac{b}{a} = \frac{A\alpha + B\beta}{A_1\alpha + B_1\beta}.$$

Ainsi, les trapèzes considérés ont leurs surfaces dans le rapport de b à a.

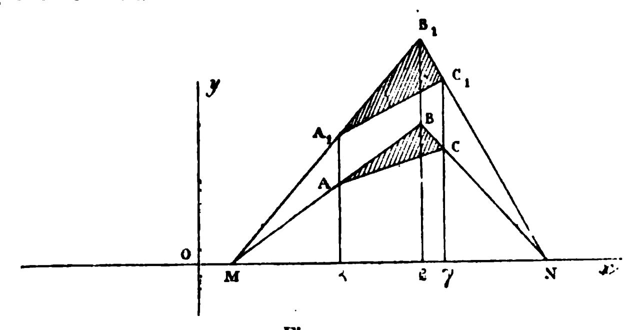


Fig. 127.

Écrivons donc, d'après cela,

$$\frac{AB\alpha\beta}{A_1B_1\alpha\beta} = \frac{BC\beta\gamma}{B_1C_1\beta\gamma} = \frac{CA\gamma\alpha}{C_1A_1\gamma\alpha} = \frac{b}{a};$$

nous en déduisons

$$\frac{AB\alpha\beta + BC\beta\gamma - CA\gamma\alpha}{A_1B_1\alpha\beta + B_1C_1\beta\gamma - C_1A_1\gamma\alpha} = \frac{b}{a},$$

ou, enfin,

$$\frac{ABC}{A_1B_1C_1} = \frac{b}{a}.$$

Ainsi, la propriété en question est vraie pour deux triangles correspondants ; par suite, pour deux polygônes correspondants et, par l'extension ordinaire, pour deux aires quelconques limitées par des circuits correspondants.

341. Corollaire. *L'aire de l'ellipse est égale à πab.* En effet l'aire du cercle principal est à πa^2 ; celle de l'ellipse, d'après le théorème précédent est $\pi a^2 \frac{b}{a}$, ou πab.

342. Théorèmes d'Apollonius (*4e démonstration*). Soient OM, ON deux diamètres conjugués ; prenons les points M_1, N_1, correspondants des points M et N ; nous savons que l'angle M_1ON_1 est droit.

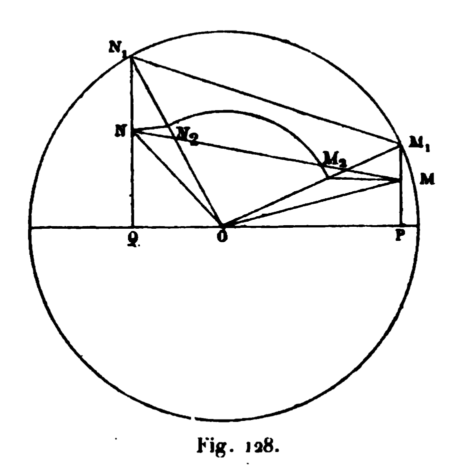


Fig. 128.

Les deux triangles OM_1P, ON_1Q sont deux égaux et nous avons :

$$OQ = M_1P, \quad OP = N_1Q,$$

et, par suite,

$$MP = \frac{b}{a} M_1P = \frac{b}{a} OQ ; \quad NQ = \frac{b}{a} N_1Q = \frac{b}{a} OP.$$

Cette remarque étant faite, nous pouvons écrire :

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{OP}^2 + \frac{b^2}{a^2}\overline{OQ}^2,$$

$$\overline{ON}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{NQ}^2 = \overline{OQ}^2 + \frac{b^2}{a^2}\overline{OP}^2.$$

Ces relations donnent :

$$\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = (\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2)\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Remarquons, enfin, que :

$$\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{M_1P}^2 = a^2,$$

et nous avons :

$$\overline{OM}^2 + \overline{OQ}^2 = a^2 + b^2.$$

C'est le premier théorème d'Apollonius.

Considérons maintenant les deux triangles correspondants OMN, OM_1N_1 ; celui-ci a pour surface $\frac{a^2}{2}$; celle de OMN est donc (§ 340) égale à $\frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2}$, ou $\frac{ab}{2}$. Cette remarque constitue, précisément, le second théorème d'Apollonius.

343. Problème. *Trouver, en grandeur et en direction, les axes d'une ellipse, quand on connaît, en grandeur et en direction, deux diamètres conjugués.*

On peut déduire des considérations précédentes, une solution élégante de ce problème, que nous avons déjà résolu (§ 313) par la méthode de Chasles.

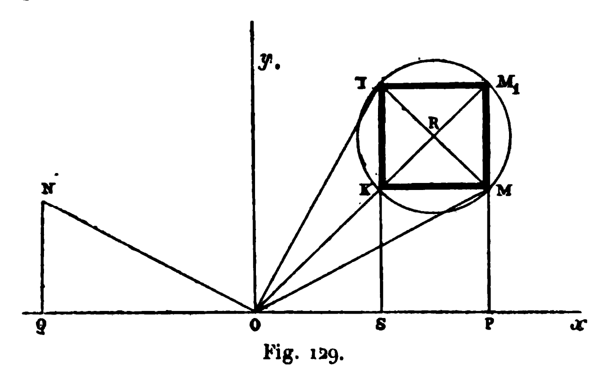


Fig. 129.

Soit M_1 le point correspondant de M ; joignons OM_1 et par le point M menons au grand axe une parallèle MK, jusqu'à sa rencontre en K, avec OM_1.

Construisons le rectangle KMM_1I, et montrons que nous avons :

1° NOI = 1 droit, 2° OI = ON.

Les triangles semblables OKS, OM_1P, donnent :

$$\frac{OS}{OP} = \frac{KS}{M_1P} = \frac{MP}{M_1P} = \frac{b}{a}.$$

Nous avons vu tout à l'heure que

$$NQ = \frac{b}{a} OP;$$

les longueurs OS et NQ sont donc égales et comme $IS = M_1P = OQ$, nous voyons donc que les deux triangles rectangles NQO, IOS sont égaux. Cette remarque prouve, du même coup, les deux propositions avancées.

De ces considérations géométriques, on déduit la construction suivante :

OM *et* ON *étant les diamètres conjugués donnés, on élève à* ON, *du même côté que* OM, *une droite perpendiculaire, sur laquelle on prend* OI = ON ; *on joint* MI *et l'on prend le milieu* R, *de cette droite* MI. *Si du point* R *comme centre, avec* RI = RM, *pour rayon, on décrit un cercle, ce cercle détermine les points* K *et* M_1 ; 1° *les droites* IK, KM *sont les directions des axes,* 2° OK *et* OM_1 *représentent la grandeur des axes.*

344. Interprétation géométrique de la transformation précédente.

La relation

$$\frac{MP}{M_1P} = \frac{b}{a},$$

prouve que si l'on fait tourner le cercle principal autour de ox, d'un angle φ, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et déterminé par l'égalité

$$\cos\varphi = \frac{b}{a},$$

le point M_1, dans sa nouvelle position, se projette sur le plan de l'ellipse, pécisément au point M. Ainsi : *l'ellipse peut être*

considérée comme la projection de son cercle principal, quand on fait tourner le plan de ce cercle, autour du grand axe de l'ellipse, d'un angle aigu ayant un cosinus égal au rapport du petit axe au grand axe.

EXERCICES

1. *Soit* AB *une corde de l'ellipse, parallèle au grand axe ; au point* B *on mène la tangente qui rencontre oy en* C *; par les points* A *et* C *on trace des parallèles aux axes de l'ellipse : ces droites se coupent en un point* I *dont on demande le lieu géométrique.*

Ce lieu est une quartique Q : *démontrer que la tangente à* Q, *au point I, et la tangente au cercle principal au point correspondant à* A, *coupent ox en deux points symétriques du point de rencontre de ox avec* AI.

On voit immédiatement que Q est une transformée de l'ellipse par les formules :

$$x = X, \quad yY = b^2. \qquad \text{(V. Leç. 16; exerc. 1.)}$$

2. *On considère l'ellipse qui correspond à l'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et la quartique Q′ *qui a pour équation*

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1.$$

Déduire la remarque faite dans l'exercice précédent, une construction de la tangente en un point de cette courbe Q′.

On considère d'abord la quartique Q qui a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1,$$

et l'on transforme cette courbe Q par les formules :

$$xX = a^2, \quad y = Y.$$

TRENTE-QUATRIÈME LEÇON

L'HYPERBOLE

345. Forme de la courbe. Lorsque dans l'équation réduite des coniques qui ont un centre

$$S'X^2 + S''Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

on suppose $\delta < 0$, S' et S'' ont des signes contraires et l'équation précédente peut s'écrire sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Prenons sur l'axe des x deux points A, A′, tels que $OA = OA' = a$, et sur l'axe des y les points B,B′, tels que $OB = OB' = b$. Nous dirons que A,A′ sont les sommets réels, B et B′ les sommets imaginaires de l'hyperbole. Les droites, SS′, RR′, diagonales du rectangle construit sur les axes, et qui correspondent à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

sont les asymptotes de la courbe (§ 155) on peut d'ailleurs montrer directement que si l'on considère un point M de l'hyperbole, et le point N de la droite RR′, qui correspond à la même abcisse, on a : 1° $NP > MP$, 2° $\lim MN = 0$, pour $x = \infty$.

On voit aussi que la courbe n'a aucun point dans l'intérieur des parallèles menées à OY par les points A et A′; et

qu'à toute valeur de x, plus grande que a, correspondent, pour y, deux valeurs égales et de signes contraires. La courbe a donc la forme générale indiquée par la figure ci-dessous.

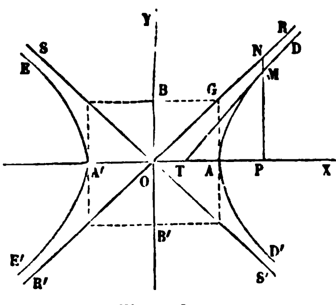


Fig. 130.

Nous ne voulons pas entreprendre pour l'hyperbole, une étude aussi détaillée que celle que nous avons faite pour l'ellipse; parce que la plupart de ces nouveaux calculs seraient une répétition, sans intérêt, des calculs analogues faits sur l'équation de l'ellipse. D'ailleurs l'égalité

$$Ax^2 + A'y^2 = 1,$$

représentant une ellipse, ou une hyperbole, suivant le signe du produit AA', on comprend qu'en adoptant cette notation, un calcul quelconque, et le résultat auquel il conduit, sont également applicables aux deux coniques à centre.

Il suffit d'observer que les calculs effectués pour l'ellipse peuvent être appliqués à l'hyperbole, en changeant, dans les premiers, b^2 en $-b^2$. En particulier la lettre c, dans l'hyperbole, représente la longueur $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Il faut aussi faire cette réserve que, parmi ces résultats, certains peuvent être réels pour l'une des courbes, et imaginaires pour l'autre. C'est cette distinction, entre les résultats réels et imaginaires, qui nécessite l'étude spéciale que nous allons faire de l'hyperbole, en nous attachant, principalement, à signaler les points qui différencient cette courbe, de l'ellipse.

346. Construction de l'hyperbole, point par point.

La construction que nous allons indiquer et qui permet de trouver rapidement un grand nombre de points de l'hyperbole présente la plus grande analogie avec celle que nous avons indiquée pour l'ellipse (§ 282).

Soit M un point de l'hyperbole et soient x', y' ses coordonnées. Joignons MA; la perpendiculaire élevé à MA au point A, rencontre A'M en un point I qui décrit une droite, quand M parcourt l'hyperbole.

En effet, l'équation de AM étant

$$y(x'-a)=y'(x-a),$$

celle de AI sera,

$$(1)\quad yy'=-(x-a)(x'-a).$$

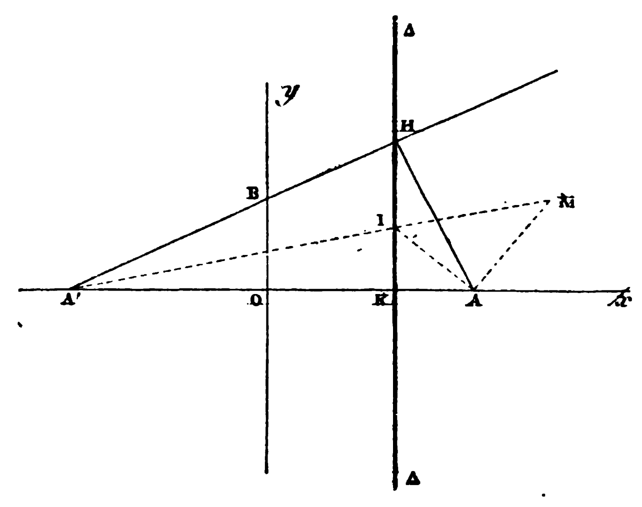


Fig. 131.

D'autre part l'équation de A'I est

$$(2)\quad y(x'+a)=y'(x+a).$$

Les relations (1) et (2) donnent, par combinaison, et en supprimant le facteur y auquel correspond une solution singulière,

$$(x'^2-a^2)(a-x)=y'^2(x+a).$$

Mais on a

$$y'^2 = b^2\frac{x'^2 - a^2}{a^2},$$

le lieu du point I est donc la droite Δ, qui correspond à l'équation :

$$x = a\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Lorsque le point M s'éloigne de l'infini sur l'hyperbole, la droite A'M a pour position limite la droite A'B. On voit ainsi, et l'on vérifie facilement par le calcul, que Δ passe par le point H projection du sommet A, sur A'B. On comprend donc comment, étant donnés les sommets de l'hyperbole, on pourra construire la courbe, point par point, au moyen d'une règle et d'une équerre.

Lorsqu'on suppose $a = b$, en d'autres termes, lorsque l'hyperbole proposée est équilatère, la droite Δ est l'axe oy lui-même.

347. Représentation d'un point de l'hyperbole.

1° Si l'on compare les égalités :

$$\frac{x'^2}{a^2} = 1 + \frac{y'^2}{b^2},$$

$$\sec^2\varphi = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi,$$

on voit que l'on peut poser

$$(\text{P}) \quad \frac{x'}{a} = \frac{1}{\cos\varphi}, \quad \frac{y'}{b} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi};$$

et lorsque φ varie de 0 à 2π, le point correspondant (x', y') décrit l'hyperbole.

On peut déduire des formules (P) une construction, point par point, de l'hyperbole. Sur AA' et BB' comme diamètres décrivons des cercles et prenons, sur le premier, un point quelconque M'. La tangente en M' rencontre ox en P et si

nous élevons à ox, une perpendiculaire MP égale à M''P', le point M, ainsi obtenu, est un point de l'hyperbole.

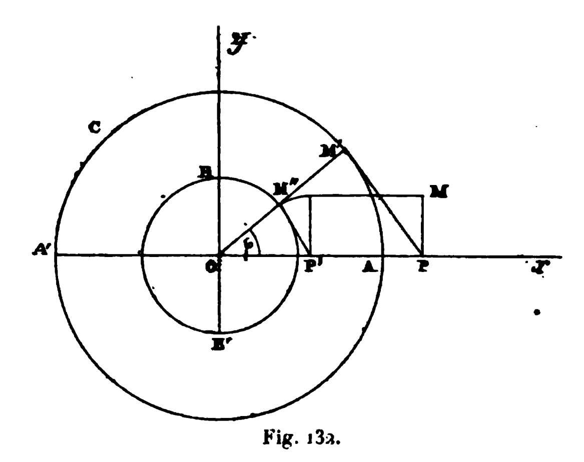


Fig. 132.

2° L'identité :

$$\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2,$$

qui, sous une autre forme, nous a déjà servi dans l'étude de l'ellipse (§ 283), permet de poser :

$$(\mathrm{P'}) \qquad \frac{x'}{a} = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \frac{y'}{b} = \frac{2t}{1-t^2},$$

t désignant un paramètre pouvant varier de $-\infty$ à $+\infty$.

On déduit de ces formules (P) et (P') des formes diverses pour représenter l'équation de la tangente et celle de la normale à l'hyperbole. Nous résumons ces résultats dans le paragraphe suivant.

348. Formules relatives à l'hyperbole.

1° *Formes diverses de l'équation de la tangente.*

$$(\mathrm{T_1}) \qquad \frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1.$$

$$(\mathrm{T_2}) \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\sin\varphi = \cos\varphi.$$

$$(T_3)\quad \frac{x}{a}(1+t^2)-2t\frac{y}{b}=1-t^2.$$

$$(T_4)\quad y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

2° *Formes diverses de l'équation de la normale.*

$$(N_1)\quad \frac{a^2x}{x'}+\frac{b^2y}{y'}=c^2. \qquad (c^2=a^2+b^2)$$

$$(N_2)\quad ax+\frac{by}{\sin\varphi}=\frac{c^2}{\cos\varphi}.$$

$$(N_3)\quad \frac{ax}{t^2+1}+\frac{by}{2t}=\frac{c^2}{1-t^2}.$$

$$(N_4)\quad y=mx\pm\frac{c^2m}{\sqrt{a^2-b^2m^2}}.$$

3° *Équation de la polaire.*

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

4° *Équation du faisceau des deux tangentes.*

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)=\left(\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-1\right)^2.$$

De ces formules, on peut déduire diverses propriétés de l'hyperbole, propriétés toutes semblables à celles que nous avons trouvées par l'ellipse. Mais, sans nous arrêter, pour la raison déjà donnée, à reproduire ces calculs, nous nous proposons d'étudier l'hyperbole, en visant plus particulièrement les propriétés de cette courbe qui se rattachent à la considération de ses asymptotes.

THÉORÈMES RELATIFS AUX ASYMPTOTES DE L'HYPERBOLE

349. Théorème I. *Lorsqu'un point* M *s'éloigne à l'infini sur une hyperbole* H, *la tangente* Δ *au point* M *a pour position limite une des asymptotes de la courbe.*

Cette proposition a déjà été démontrée, pour une courbe d'un degré quelconque ; nous nous proposons de la vérifier pour l'hyperbole.

Soient $x'y'$ les coordonnées du point M (fig. 130), et soit MT la tangente en ce point.

Les formules (P') prouvent que si le point s'éloigne à l'infini sur la courbe il faut supposer $t = 1$, ou $t = -1$. En supposant $t = 1$, l'équation (T_3) donne, à la limite,

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

Cette équation représente l'une des asymptotes ; l'autre asymptote, celle qui correspond à l'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

s'obtient en supposant $t = -1$.

350. Théorème II. *Le produit des distances d'un point quelconque de l'hyperbole à ses asymptotes est constant.*

Prenons pour nouveaux axes de coordonnées les asymptotes OX, OY de l'hyperbole. En désignant par 2α l'angle des asymptotes dans lequel est renfermée la courbe, les formules de transformation sont

$$x = X\cos\alpha + Y\cos\alpha,$$
$$y = Y\sin\alpha - X\sin\alpha.$$

L'équation de l'hyperbole, dans le système YOX, est donc

$$(1)\qquad \frac{(X\cos\alpha + Y\cos\alpha)^2}{a^2} - \frac{(Y\sin\alpha - X\sin\alpha)^2}{b^2} = 1.$$

Nous avons, d'ailleurs,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a},$$

ou,

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{ab} = \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} = \frac{1}{a^2+b^2}.$$

En tenant compte de ces relations, l'égalité (1) devient :

$$\text{(H)} \quad XY = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

C'est l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. On en déduit la propriété énoncée, ou la suivante : *le parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole et dont deux sommets sont : 1° le centre de la courbe, 2° un quelconque de ses points ; a une surface constante.*

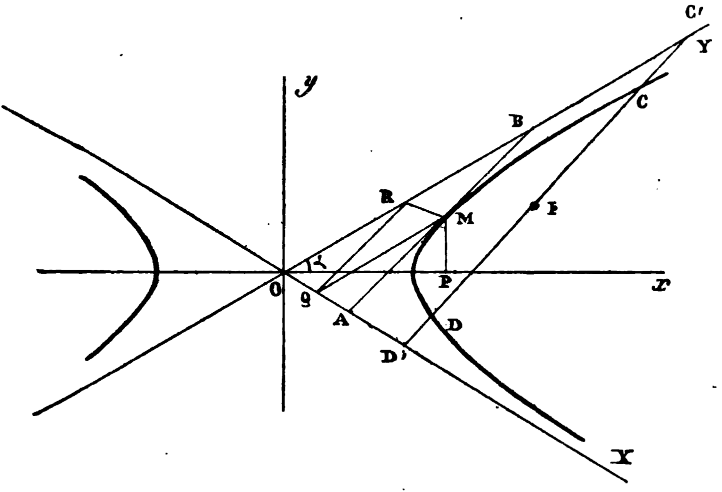


Fig. 133.

351. Théorème III. *La tangente en un point de l'hyperbole est partagée, par le point de contact et par les asymptotes, en deux parties égales.*

Prenons l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. Soient X', Y' les coordonnées du point considéré M. L'équation (H) donne, pour l'équation de la tangente en ce point

$$XY' + YX' = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Nous avons, d'autre part,

$$X'Y' = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Ces deux relations donnent, par combinaison,

$$\frac{X}{X'} + \frac{Y}{Y'} = 2.$$

Cette relation prouve que l'on a $OA = 2X' = 2OQ$ (fig. 133). Le point M est donc le milieu de AB.

Cette propriété permet de construire la tangente en un point donné de l'hyperbole, avec la règle, puisque AB est parallèle à la diagonale RQ du parallélogramme OMRQ.

On voit aussi que la surface du triangle OAB est double de celle du parallélogramme OMRQ ; propriété remarquable qui peut s'énoncer ainsi : *le triangle formé par les asymptotes de l'hyperbole et une tangente quelconque, a une surface constante.*

352. Théorème IV. *Les segments* CC′, DD′ (fig. 133) *interceptés, sur une transversale quelconque, par l'hyperbole et par ses asymptotes, sont égaux.*

Posons $OC' = p$, $OD' = q$; l'équation de la transversale est alors

$$\frac{X}{p} + \frac{Y}{q} = 1.$$

L'intersection de cette droite avec l'hyperbole donne deux points C, D dont les abcisses vérifient l'équation

$$qX\left(1 - \frac{X}{p}\right) = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

ou,

$$X^2 - pX + \frac{p}{4q}(a^2 + b^2) = 0.$$

La demi-somme des racines de cette équation est égale à $\frac{p}{2}$. Ainsi $\frac{p}{2}$ représente l'abcisse du point I, milieu de la corde CD ; cette abcisse étant justement égale à $\frac{OD'}{2}$, il est ainsi démontré que le milieu de CD coïncide avec le milieu de C′D′. On a donc $CC' = DD'$.

353. Théorème V. *Les diagonales du parallélogramme construit avec deux diamètres conjugués de l'hyperbole, sont les asymptotes de la courbe.*

En effet l'équation de l'hyperbole, rapportée à deux diamètres conjugués, est

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Pour établir directement la proposition on peut poser :

$$\frac{x}{a'} = \frac{1+\theta^2}{1-\theta^2}, \quad \frac{y}{b'} = \frac{2\theta}{1-\theta^2}$$

et ces formules représentent un point de la courbe.

L'équation d'une tangente quelconque est

$$\frac{x}{a'}(1+\theta^2) - 2\theta\frac{y}{b'} = 1 - \theta^2 ;$$

et quand le point de contact s'éloigne à l'infini, sur l'hyperbole, on a

$$\frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} = 0,$$

pour $\theta = 1$; et

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 0,$$

en supposant $\theta = -1$. Telles sont les équations des asymptotes dans le système d'axes que nous avons choisi ; on voit que ces équations représentent bien les diagonales du parallélogramme construit avec les diamètres conjugués considérés.

354. Problème. *Trouver, en grandeur et en direction les axes d'une hyperbole, connaissant deux diamètres conjugués, en grandeur et en direction.*

La direction des axes s'obtient immédiatement en remarquant : 1° que les asymptotes sont les diagonales du parallélogramme construit avec les diamètres conjugués donnés ;

2° que les axes sont les bissectrices des angles formés par les asymptotes.

Déterminons maintenant le sommet réel de l'hyperbole.

Soient Δ, Δ' les asymptotes de la courbe et soit M le point, extrémité de celui des diamètres donnés que l'on suppose réel ; enfin, soit ox la bissectrice de l'angle des asymptotes qui renferme M. Pour déterminer le sommet S de l'hyperbole il faut tracer par le point M une transversale telle que l'on ait SK $=$ MH (§ 352).

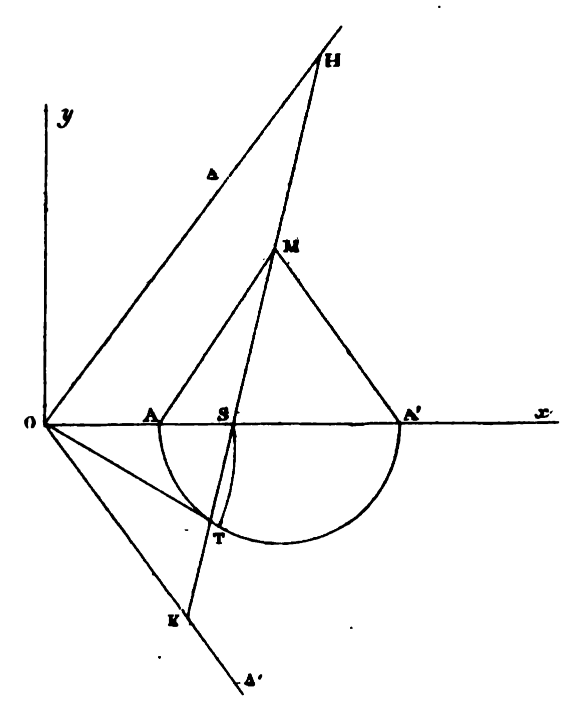


Fig. 134.

Menons par le point M des parallèles MA, MA', aux asymptotes; nous avons

$$(1)\quad \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OS}} = \frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{HS}},$$

et,

$$(2) \quad \frac{OS}{OA'} = \frac{SK}{KM};$$

mais HM = SK ; et SH = MK ; les égalités (1) et (2) donnent donc, par comparaison,

$$\frac{OA}{OS} = \frac{OS}{OA'},$$

ou,

$$\overline{OS}^2 = OA \cdot OA'.$$

Pour obtenir le point S il suffit donc de décrire sur AA' comme diamètre une circonférence, de lui mener par O une tangente OT et de tracer du point O comme centre, l'arc TS, comme l'indique la figure.

La solution précédente est aussi celle du problème suivant : *Construire une hyperbole, connaissant les asymptotes et un point de la courbe.*

355. Théorème VI. *La directrice qui correspond à un foyer* F *est la droite qui joint les projections de ce point sur les asymptotes.*

Nous définissons, élémentairement, les foyers de l'hyper-

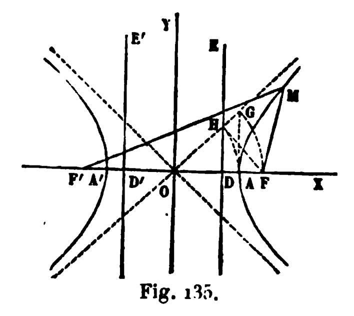


Fig. 135.

bole *deux points situés sur l'axe transverse de l'hyperbole à une distance* $c = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$, *du centre.*

La directrice est la polaire du foyer.

D'après cette définition, le foyer F s'obtient en construisant le triangle rectangle OAG et en prenant OF = OG.

Si du point F on abaisse une perpendiculaire FH sur l'asymptote, on obtient deux triangles égaux OFH, OAG et l'on a

$$\overline{OH}^2 = OD.OF,$$

ou,

$$OD = \frac{a^2}{c}.$$

La polaire du foyer F étant la droite qui a pour équation

$$x = \frac{a^2}{c},$$

on voit que DE est la directrice correspondante au foyer F.

On reconnait de même que la droite D'E', symétrique de DE par rapport à OY, est la directrice du second foyer F'.

La considération des deux foyers F, F' et des directrices correspondantes donnent naissance à des propriétés analogues à celles que nous avons démontrées pour l'ellipse, et nous nous bornerons à énoncer les suivantes :

1° *La différence* MF' — MF *est constante et égale à* AA'.

2° *La tangente à l'hyperbole, au point* M, *est bissectrice de l'angle* F'MF.

3° *Le rapport des distances d'un point de l'hyperbole au foyer et à la directrice correspondante, est constant et égal à* $\frac{c}{a}$.

356. Transformation homographique de l'hyperbole. Si l'on prend pour formules de transformation :

$$x = \frac{ab}{X}, y = \frac{bY}{X};$$

à l'hyperbole qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

correspond la courbe qui correspond à l'équation

$$X^2 + Y^2 = b^2,$$

c'est-à-dire le cercle U, décrit sur l'axe non transverse.

A une droite δ ayant pour équation

$$y = mx + n,$$

correspond une droite Δ dont l'équation est

$$Y = MX + N,$$

en posant

$$M = \frac{n}{b}, \ N = ma.$$

Ces relations conduisent, entre autres conséquences, aux propriétés suivantes :

1° δ parallèle à une direction fixe ;
Δ passe par un point fixe situé sur l'axe des y.

2° δ passe par un point fixe situé sur oy ;
Δ reste parallèle à une direction fixe.

3° δ, δ' sont des droites rectangulaires ;
Δ, Δ' coupent l'axe des y en deux points qui sont vus du sommet réel de l'hyperbole sous un angle droit.

4° δ, δ' sont des droites ayant des directions conjuguées ;
Δ, Δ' coupent oy en deux points conjugués harmoniques par rapport aux sommets imaginaires de la courbe.

5° δ, δ' coupent l'axe des y en deux points conjugués harmoniques par rapport aux sommets imaginaires de l'hyperbole ;
Δ, Δ' sont deux droites rectangulaires.

6° δ, δ' sont les asymptotes de la courbe ;
Δ, Δ' sont les parallèles à l'axe transverse, menées par les sommets imaginaires.

On peut déduire de ces lois de correspondance des propriétés diverses de l'hyperbole ; on peut aussi, au moyen de la transformation précédente, résoudre, avec la règle et le compas, les problèmes qui sont relatifs à la construction des tangentes, ou à la recherche des points communs à la courbe et à une droite de son plan.

EXERCICES

1. *Tout point de l'hyperbole est à égale distance du foyer et de la directrice correspondante; cette dernière distance étant comptée parallèlement à une asymptote.*

2. *Soit* AB *une corde quelconque de l'hyperbole; par les points* A,B *on mène des parallèles aux asymptotes; démontrer que la seconde diagonale du parallélogramme ainsi construit, passe par le centre de la courbe.*

3. *On considère deux tangentes à l'hyperbole; soient* A, B *et* A',B' *les points où elles rencontrent les asymptotes; démontrer que la droite qui joint les points de contact passe par les milieux des segments* AA', BB' *interceptés par les tangentes considérées sur les asymptotes.*

4. *Le lieu géométrique des extrémités des diamètres imaginaires, conjugués des diamètres réels d'une hyperbole donnée, est une hyperbole.*

L'équation de la première hyperbole étant :

$$(\mathrm{H}) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

le lieu cherché a pour équation :

$$(\mathrm{H}') \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Ces deux hyperboles, (H), (H'), ont reçu le nom *d'hyperboles conjuguées*.

On remarque qu'elles ont les mêmes asymptotes : en prenant ces droites pour axes de coordonnées, les équations de deux hyperboles conjuguées sont :

$$XY = m^2,$$
$$XY = -m^2.$$

5. *On mène à une hyperbole une tangente qui rencontre 1° les asymptotes aux points* A *et* B; *2° l'axe ox en* C *et l'axe oy en* D; *si l'on désigne par* M *le point de contact, démontrer que les cercles décrits sur* AB *et sur* MD, *comme diamètre, ont leur axe radical passant par le point* C.

6. *Démontrer que si l'on considère la courbe qui a pour équation* $y = f(x)$, *et si l'on désigne par* S *la surface comprise entre deux ordonnées, la courbe et l'axe ox,*

$$S'_x = y \sin \theta = f(x) \sin \theta,$$

S'_x *désignant la dérivée de* S *par rapport à x.*

Déduire, de là, le théorème suivant :

Théorème. *Soit* H *une hyperbole rapportée à ses asymptotes ox, oy, et soient* M, M', *deux points quelconques de* H; *la surface du triangle* MOM' *est équivalente à celle du trapèze curviligne formé par l'axe* MM', *une des asymptotes ox, et les parallèles à oy menées par les points* M, M'.

TRENTE-CINQUIÈME LEÇON

LA PARABOLE

Nous avons montré précédemment (§ 204) que dans le cas où l'on avait $\delta = 0$, l'équation du second degré pouvait être ramenée à la forme réduite :

$$(P) \quad y^2 - 2px = 0,$$

les axes étant rectangulaires. Nous nous proposons de faire, d'après cette équation, une étude particulière des courbes qu'elle représente et que nous avons appelées des paraboles.

357. Construction de la parabole point par point. Soit A un point de la courbe ; joignons OA et menons au point O, à cette droite OA, une perpendiculaire jusqu'à ce qu'elle rencontre en A′ la parallèle à l'axe menée par A. Le triangle rectangle AOA′ donne :

$$\overline{OH}^2 = A'H \,.\, AH,$$

ou,

$$y^2 = A'H \,.\, x.$$

Ainsi A′H est égal à $2p$; le lieu du point A′, quand A se déplace sur la parabole P est donc une droite Δ, perpendiculaire à l'axe, et à une distance du sommet égale à $-2p$.

Si l'on connaît, en même temps que l'axe et que la tangente au sommet de la parabole, le paramètre p, ou un point de la courbe, on pourra construire la droite Δ ; puis, avec l'équerre, obtenir, par une construction rapide, autant de

points de la parabole que l'on voudra, comme l'indique la figure.

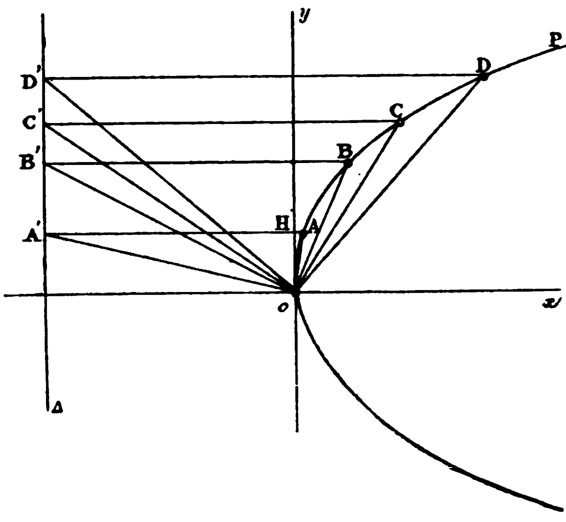


Fig. 136.

358. Différentes formes de l'équation de la tan-

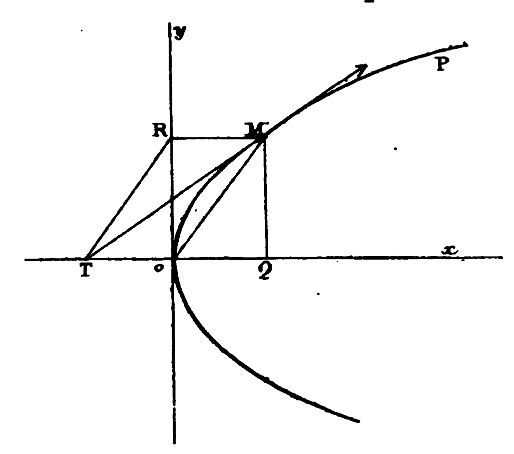


Fig. 137.

gente. L'équation générale des tangentes, appliquée à (P), donne

$$(T_1) \quad yy' = p(x + x'),$$

c'est une première forme de l'équation de la tangente MT. Si l'on observe que (T_1) est vérifié par $y = 0$, $x = -x'$, on voit que *la sous-tangente est double de l'abcisse.*

De cette propriété on peut déduire une construction de la tangente, en un point M pris sur la parabole. Puisque OQ = OT, si, du point M, on abaisse la perpendiculaire MR sur la tangente au sommet, la figure MROT est un parallélogramme. Pour obtenir MT, il suffit donc de joindre OM et d'achever le parallélogramme dont OM et MR sont deux côtés ; la diagonale MT est la tangente cherchée. On remarquera que cette construction n'exige que l'emploi de l'équerre et de la règle.

Cherchons, maintenant, d'autres formes de l'équation de la tangente.

La relation

$$(1) \quad y'^2 = 2px',$$

peut s'écrire,

$$\frac{y'}{x'} = \frac{2p}{y'} = t.$$

on a donc, pour représenter un point M de la parabole, les formules

$$y' = \frac{2p}{t}, \quad , \quad x' = \frac{2p}{t^2};$$

formules dans lesquelles le paramètre t représente le coefficient angulaire de la droite qui va du sommet, au point M. Ces formules donnent, pour la tangente en M, l'équation suivante :

$$(T_2) \quad y = \frac{t}{2}x + \frac{p}{t}.$$

Pour obtenir une forme trigonométrique, on peut remarquer que la relation (1) peut s'écrire

$$y'^2 = \left(x' + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x' - \frac{p}{2}\right)^2,$$

ou,

$$\left(\frac{y'}{x'+\frac{p}{2}}\right)^2+\left(\frac{x'-\frac{p}{2}}{x'+\frac{p}{2}}\right)^2=1.$$

Par suite, on peut poser

$$\frac{y'}{x'+\frac{p}{2}}=\sin\varphi,\ \text{et}\ \frac{x'-\frac{p}{2}}{x'+\frac{p}{2}}=\cos\varphi.$$

Ces formules donnent :

$$x'=\frac{p}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2},\ \text{et}\ y'=p\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}.$$

On est ainsi conduit à une forme trigonométrique qui rentre dans la forme (T_2), en posant $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{t}{2}$.

Enfin, en identifiant l'équation (T_1) avec la suivante :

$$y=mx+n,$$

ou encore, en exprimant que la droite que cette équation représente rencontre la parabole en deux points coïncidents, on trouve

$$n=\frac{p}{2m}.$$

On a ainsi cette troisième forme de l'équation de la tangente, forme souvent employée,

$$(T_3)\quad y=mx+\frac{p}{2m}.$$

De cette équation, on déduit immédiatement, en raisonnant comme nous l'avons fait précédemment (§ 285), dans un cas analogue, que *le lieu des points d'où l'on peut mener à la parabole deux tangentes rectangulaires est la droite qui a pour équation*

$$x+\frac{p}{2}=0.$$

Cette droite est, comme nous l'avons vu, *la directrice de la parabole.*

On voit aussi, sans difficulté, par l'une ou l'autre des équations (T_1), (T_2), ou (T_3) que *la podaire du foyer est la tangente au sommet.*

359. Polaire. L'équation de la polaire du point (x', y') est

$$yy' - p(x + x') = 0.$$

Si l'on cherche l'intersection de cette polaire avec la courbe, les ordonnées des points communs sont données par l'équation.

$$y^2 - 2yy' - 2px' = 0.$$

La somme des racines étant égale à $2y'$, on voit que : *la droite qui joint le pôle au milieu de la corde polaire est parallèle à l'axe.*

360. Équation de la Normale. Soient x', y' les coordonnées d'un point de la parabole; la normale en ce point a pour équation

$$\frac{x - x'}{-p} = \frac{y - y'}{y'},$$

ou,

$$(1) \quad y = -\frac{y'}{p}x + y'\left(1 + \frac{x'}{p}.\right)$$

Cette relation prouve, incidemment, que *la sous-normale est constante et égale à p.*

En identifiant (1) avec l'équation suivante

$$y = mx + n,$$

on a :

$$m = -\frac{y'}{p}, \; n = y'\left(1 + \frac{x'}{p}\right);$$

et, par suite,

$$y' = -pm, \quad x' = -\frac{n+pm}{m}.$$

En tenant compte de l'égalité

$$y'^2 = 2px',$$

on trouve,

$$-n = pm + \frac{pm^3}{2}.$$

L'équation générale des normales à la parabole est donc

$$(\mathrm{N}) \quad y = m(x-p) - \frac{pm^3}{2}$$

361. Développée de la parabole. L'enveloppe des nor-

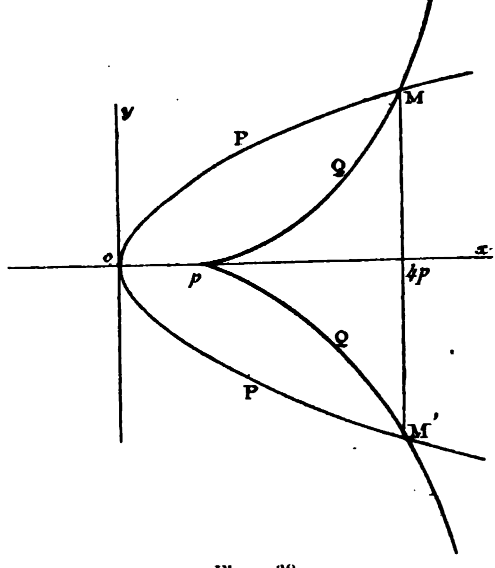


Fig. 138.

males à la parabole s'obtient en écrivant que l'équation précédente admet deux racines égales par rapport au paramètre m.

L'application d'une règle connue (*Alg.*, § 406) donne, pour l'équation de la développée,

$$py^2 = \frac{8}{27}(x-p)^3.$$

Cette courbe, qui est une parabole cubique, a la forme indiquée par la figure. En cherchant son intersection avec la parabole donnée, on doit résoudre l'équation :

$$(1) \quad 27\,p^2x = 4\,(x-p)^3.$$

Le théorème de Rolle, appliqué à cette équation, prouve que $-\frac{p}{2}$, nombre qui fait partie de la suite de Rolle, vérifie l'équation (1). Celle-ci admet donc deux racines égales à $-\frac{p}{2}$. Les courbes P et Q ont un double contact imaginaire, sur la directrice. On trouve ensuite des points réels M,M', communs à P et à Q, et ayant pour abcisse $4p$.

362. Cercle de Joachimsthal. L'équation (N) étant du troisième degré en m, on voit que du point A du plan, partent, dans le sens analytique de ce mot, trois normales à la parabole. Nous allons chercher l'équation du cercle qui passe par les pieds de ces normales.

Soient x_0, y_0, les coordonnées du point A ; soient aussi x, y, celles du pied R de l'une des normales issues de A. En exprimant que l'équation de la normale au point (x, y)

$$\frac{X-x}{-p} = \frac{Y-y}{y},$$

est vérifiée par les coordonnées de A, on a

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y_0-y}{y},$$

ou,

$$(H) \quad xy + y\,(p-x_0) - py_0 = 0.$$

C'est l'équation de l'hyperbole équilatère aux pieds des

normales. Elle a, avec la parabole, un point commun situé à l'infini dans la direction ox, puisque l'une de ses asymptotes est parallèle à l'axe de la parabole. Les trois autres points communs sont situés sur une circonférence, dont nous allons chercher l'équation [1].

L'équation (H) peut s'écrire :

$$xy^2 + y^2(p - x_0) - py_0y = 0,$$

Ou, en remplaçant y^2 par $2px$, et en divisant par $2p$,

$$x^2 + x(p - x_0) - \frac{yy_0}{2} = 0.$$

En combinant cette équation avec celle de la parabole, on a, finalement,

$$\text{(J)} \quad x^2 + y^2 - x(p + x_0) - \frac{yy_0}{2} = 0.$$

On voit que ce cercle passe par le sommet de la courbe et on peut énoncer le théorème suivant qui n'est d'ailleurs que le théorème de Joachimsthal, appliqué à la parabole : *les pieds des trois normales issues d'un point à une parabole et le sommet de cette courbe forment un quadrilatère inscriptible.*

363. Pôle tangentiel et pôle normal. Soit A′ un point quelconque du plan de la parabole, menons les tangentes A′R, A′S et construisons les normales aux points R et S, normales qui se coupent au point A. Nous nous proposons de calculer les coordonnées x_0, y_0, de A, connaissant les coordonnées x', y', de A′.

Le cercle Δ', décrit sur AA′ comme diamètre, a pour équation

$$\left(x - \frac{x_0 + x'}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0 + y'}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_0 - x'}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_0 - y'}{2}\right)^2,$$

ou,

$$(1) \quad x^2 + y^2 - x(x_0 + x') - y(y_0 + y') + x_0x' + y_0y' = 0.$$

1. Voyez, sur ce point la note placée à la fin de ce livre (§ 3).

Le cercle Δ' et le cercle de Joachimsthal ont pour axe radical la droite RS; d'après (1) et (J), RS a pour équation

$$(2) \quad x(x'-p)+y\left(\frac{y_0}{2}+y'\right)-x_0x'-y_0y'=0.$$

En considérant RS comme la polaire du point A', son équation est

$$(3) \quad yy'-p(x+x')=0.$$

En identifiant (2) et (3), on a

$$\frac{y_0+2y'}{2y'}=\frac{p-x'}{p}=\frac{x_0x'+y_0y'}{px'},$$

et ces formules donnent

$$(\mathrm{P}_n) \quad x_0=p-x'+\frac{2y'^2}{p}, \qquad y_0=-\frac{2x'y'}{p}.$$

Ces relations, comme les formules analogues que nous

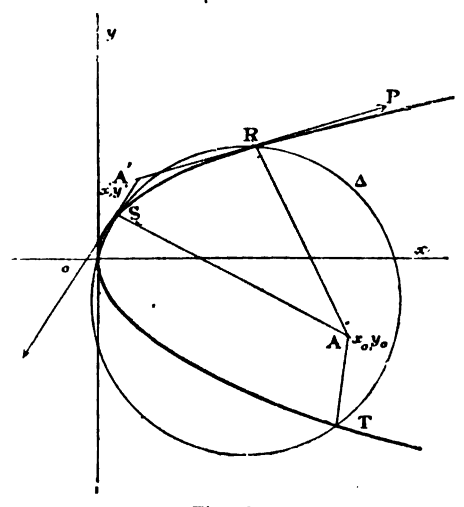


Fig. 139.

avons établies pour l'ellipse (§ 292), permettent de ramener la recherche du lieu décrit par le pôle normal A, à celle du lieu décrit par le pôle tangentiel A'.

Par exemple, si l'on demande *le lieu décrit par le point de concours de deux normales rectangulaires,* on remarquera que le point A′ décrit la directrice et que l'on a, par suite,

$$x' = -\frac{p}{2}.$$

Les formules P_n donnent alors :

$$y_0 = y', \qquad x_0 = \frac{3p}{2} + \frac{2y'^2}{p}.$$

En éliminant y', et en considérant x_0, y_0, comme des coordonnées courantes, on a l'équation du lieu

$$y^2 = \frac{p}{2}\left(x - \frac{3p}{2}\right).$$

Cette équation représente une parabole.

364. Centre de courbure. Si l'on suppose que les deux points R, S viennent coïncider en M, le pôle normal a pour position limite le centre de courbure ω, en ce point M.

Les formules P_n, quand on suppose $y'^2 = 2px'$, donnent

$$\text{(C)} \quad x_0 = p + 3x', \quad \text{(C')} \quad y_0 = -\frac{y'^3}{p^2}.$$

L'égalité (C) prouve que si l'on considère la directrice DD′, comme l'on a

$$\text{HK} = x' + \frac{p}{2}. \qquad \text{et} \qquad \text{KI} = x_0 - x';$$

on a, par suite,

$$\text{KI} = 2\text{HK}.$$

Ainsi Mω est double de MD ; cette remarque conduit à une construction très simple du centre de courbure : *on trace la normale au point considéré, jusqu'à sa rencontre avec la directrice et l'on porte, dans l'autre sens, une longueur*

double de celle qui est interceptée sur la normale par la directrice et le point considéré.

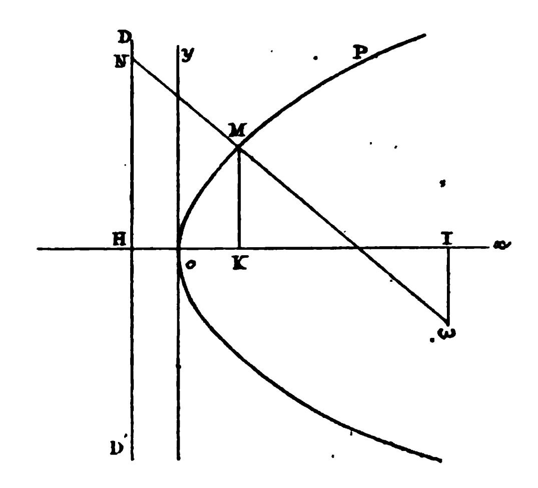


Fig. 140.

Si, entre les égalités (C), (C'), et la relation $y'^2 = 2px'$, nous éliminons x' et y', nous obtenons

$$27py_0^2 = 8\,(x_0 - p)^3.$$

Nous retrouvons ainsi, en considérant x_0 et y_0 comme des coordonnées courantes, l'équation de la développée de la parabole, et ce résultat est une vérification des calculs qui précèdent.

365. Diamètres. Considérons la droite, qui a pour équation

$$y = mx + \lambda,$$

et supposons que, m restant fixe, λ soit un paramètre variable. Les abcisses des points communs à cette droite et à la parabole sont les racines de l'équation

$$(mx + \lambda)^2 = 2px.$$

Par suite l'abcisse X de I, point milieu de la corde considérée, est donnée par la formule

$$(1)\quad X = \frac{p - m\lambda}{m^2}.$$

D'autre part, l'ordonnée Y du point I, vérifie l'égalité

$$(2) \quad Y = mX + \lambda.$$

Entre les équations (1) et (2) éliminons λ et nous avons

$$m^2 X = p - m(Y - mX),$$

ou,

$$Y = \frac{p}{m}.$$

Cette équation représente une droite parallèle à l'axe ox ainsi : *dans la parabole tous les diamètres sont parallèles à l'axe de la courbe.*

Nous vérifions, de la sorte, par le calcul, une proposition déjà établie (§ 182). Il est facile de reconnaître que, réciproquement, *toute droite Δ, parallèle à l'axe de la parabole, partage en deux parties égales les cordes parallèles à la tangente à la courbe, au point qui lui est commun avec Δ.*

366. Équation de la parabole rapportée à une tangente et au diamètre conjugué de cette tangente.

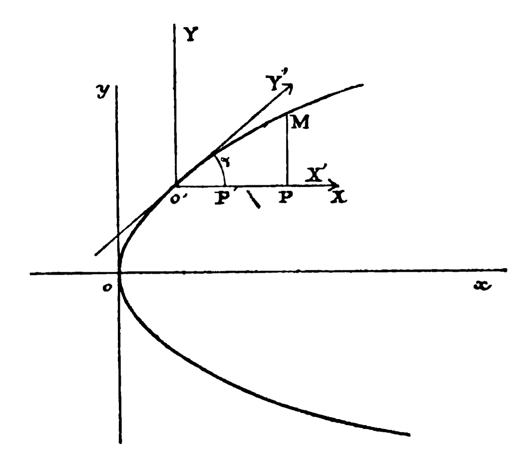


Fig. 141.

Soient x', y' les coordonnées du point o' ; transportons les

axes, parallèlement à eux-mêmes, en ce point. Les formules :

$$x = X + x', \quad y = Y + y',$$

donnent, pour l'équation de la parabole dans le système Y o' X

$$Y^2 - 2y'Y - 2pX = 0.$$

Prenons maintenant pour nouveaux axes de coordonnées la tangente o'Y' et le diamètre o'X. En désignant par α l'angle Y'oX, nous avons :

$$X = X' + Y' \cos \alpha, \quad \text{et} \quad Y = Y' \sin \alpha.$$

L'équation transformée est donc

$$Y'^2 \sin^2 \alpha - 2y' Y' \sin \alpha - 2pX' - 2p Y' \cos \alpha = 0,$$

ou

$$Y'^2 = 2p' X';$$

en posant

$$(1) \quad p' = \frac{p}{\sin^2 \alpha},$$

et, en remarquant que

$$(2) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y'}{p}.$$

La formule (1) prouve que l'on a, finalement,

$$p' = p + 2x'.$$

367. Parabole considérée comme limite d'une conique à centre. Considérons, par exemple, une ellipse rapportée à ses axes ordinaires et transportons les axes, parallèlement à eux-mêmes, au sommet A. Les formules de transformation sont :

$$x = X - a, \quad y = Y;$$

et l'équation de l'ellipse devient

$$\frac{(X-a)^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1,$$

ou,

$$(S) \quad Y^2 = 2pX + qX^2,$$

en posant :

$$p=\frac{b^2}{a}, \text{ et } q=-\frac{b^2}{a^2}.$$

Cette équation, que l'on peut établir directement, par une réduction de l'équation générale, représente toutes les coniques quand on prend pour origine un des sommets de la

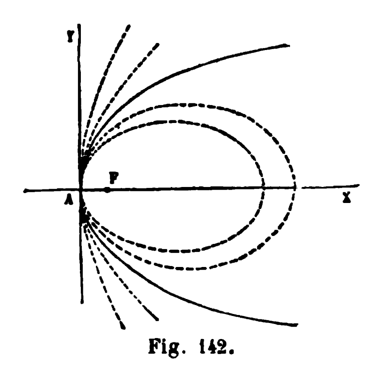


Fig. 142.

courbe et, pour direction des axes de coordonnées, les directions principales de la conique.

Imaginons que a et b croissent indéfiniment, mais sous cette réserve que le paramètre $\frac{b^2}{a}$ reste fixe ou, s'il est variable, qu'il ait une limite finie, et bien déterminée. En remarquant que $q=-\frac{p}{a}$, nous voyons que : Lim $q=0$; par conséquent, les ellipses considérées se sont déformées, mais ont pour position limite la courbe qui correspond à l'équation

$$y^2-2px=0,$$

p étant le paramètre fixe, ou la limite bien déterminée de ce paramètre, quand on le suppose variable.

On peut, de cette remarque, déduire l'extension à la parabole de propriétés démontrées pour les coniques à centre ; on peut aussi obtenir, de certaines formules relatives à ces coniques, des formules correspondantes pour la parabole.

Nous terminerons cette étude de la parabole par la démonstration de deux propriétés importantes, particulières à cette conique.

368. Théorème. *Le centre des hauteurs d'un triangle circonscrit à la parabole est toujours situé sur la directrice.*

Considérons trois tangentes à la parabole, ayant respectivement, pour équation :

$$(T_1) \quad y - m_1 x - \frac{p}{2m_1} = 0,$$

$$(T_2) \quad y - m_2 x - \frac{p}{2m_2} = 0,$$

$$(T_3) \quad y - m_3 x - \frac{p}{2m_3} = 0.$$

Les coordonnées du point A_3, point de concours des droites T_1, T_2, sont, d'après ces équations,

$$x_3 = \frac{p}{2\, m_1 m_2}, \qquad y_3 = \frac{p}{2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}.$$

L'équation de la perpendiculaire abaissée du point A_3 sur T_3 est donc

$$(1) \quad y - \frac{p}{2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = - \frac{1}{m_3}\left(x - \frac{p}{2\, m_1 m_2}\right).$$

Si nous cherchons l'intersection de (1) avec la directrice, il faut, dans cette équation, remplacer x par $-\frac{p}{2}$; nous avons alors

$$Y_3 = \frac{p}{2\, m_1 m_2 m_3}(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 + 1).$$

Le second membre de cette égalité étant une forme symétrique des lettres m_1, m_2, m_3, nous voyons donc que $Y_1 = Y_2 = Y_3$; ainsi, les trois hauteurs du triangle $A_1 A_2 A_3$ coupent la directrice au même point.

369. Théorème. *Le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes quelconques de la parabole passe toujours par le foyer.*

Cette propriété est la conséquence géométrique, tout à fait immédiate, des propriétés élémentaires de la parabole. Elle résulte, par exemple, de ce fait que les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes étant situés en ligne droite, les sommets d'un triangle circonscrit à la parabole, et le foyer de cette courbe, sont situés sur la même circonférence (réciproque du théorème de Simson).

EXERCICES

1. *On considère quatre droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, qui se coupent, deux à deux; soit C_1 le cercle circonscrit au triangle $\Delta_2 \Delta_3 \Delta_4$, et soit ω_1 son centre.*

Démontrer que les quatre points ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, sont situés sur un cercle passant par le foyer de la parabole tangente aux droites données.

(Théorème de Miquel.)

2. *Vérifier que le foyer F de la parabole est aussi un foyer de la développée.*

En général, le foyer d'une courbe est aussi un foyer de la développée. En prenant pour origine le sommet de la développée Δ de la parabole et en exprimant que les deux équations :

$$27pY^2 = 8X^3, \qquad Y = \frac{2\lambda}{3}\left(X + \frac{p}{2}\right)$$

admettent une solution double, on trouve

$$\lambda = \pm\frac{3i}{2}.$$

Les deux tangentes imaginaires issues de F à Δ, ont pour équation :

$$Y + i\left(X + \frac{p}{2}\right) = 0, \qquad Y - i\left(X + \frac{p}{2}\right) = 0.$$

elles sont donc parallèles aux directions isotropes du plan.

3. *Démontrer que l'aire d'un segment parabolique est les $\frac{2}{3}$ du triangle formé par la corde* AB *et les tangentes aux extrémités de cette corde.*

On prendra la parabole rapportée au diamètre conjugué de AB et à la tangente parallèle a AB et on écrit (leç. 34, ex. 5) :

$$\frac{1}{\sin\theta} S'_x = \sqrt{2p'}\, x^{\frac{1}{2}};$$

d'où

$$S = \frac{2}{3} xy \sin\theta.$$

4. Théorème. *Si une corde mobile* AB *détermine avec une parabole fixe un segment de surface constante, la projection de* AB *sur la tangente au sommet, est constante.*

5. *Démontrer que si* X, Y *représentent les coordonnées d'un point* M *pris dans le plan de la parabole qui correspond à l'équation*

$$y^2 - 2px = 0.$$

La fonction $Y^2 - 2pX$ *représente le produit par* $2p$, *de la distance du point* M *à la parabole, distance comptée parallèlement à l'axe.*

6. *Démontrer que la parabole, lieu des points d'où l'on peut mener à une parabole donnée* P, *deux normales rectangulaires, est doublement tangente à la parabole cubique, développée de* P.

7. Théorème. *Le diamètre d'un point* M, *rencontrant la polaire de* M *en* A, *et la parabole en* B, *on a*

$$BM = BA.$$



CINQUIÈME LIVRE

CONSTRUCTION DES COURBES. — LES COORDONNÉES POLAIRES

TRENTE-SIXIÈME LEÇON [1]

CONSTRUCTION DES CONIQUES

370. Dans la première partie de ce dernier livre de la géométrie plane, nous compléterons les principes établis jusqu'ici et qui permettent de tracer la forme générale des courbes qui correspondent à une équation cartésienne donnée; nous les appliquerons aussi à quelques exemples. Dans la seconde partie, nous étudierons les courbes dont l'équation est donnée en coordonnées polaires. Enfin une dernière leçon sera consacrée à légitimer ce mot de coniques dont nous nous sommes servis pour désigner les courbes du second degré : nous ferons voir que ces courbes sont bien des sections planes du cône droit, à base circulaire, et cette étude nous servira de transition naturelle pour passer à la géométrie analytique à trois dimensions.

1. Pour ne pas étendre, outre mesure, la rédaction de cette leçon tout en y faisant entrer les principaux problèmes qu'elle comporte, certaines démonstrations très élémentaires sont seulement indiquées. Le lecteur suppléera facilement aux lacunes que nous signalons ici.

Nous nous occuperons, d'abord, de la construction des coniques. Le problème que nous allons traiter peut se définir dans les termes suivants : *étant donnée une équation du second degré, on suppose que la conique qu'elle représente, vérifie un certain nombre de conditions élémentaires, telles sont les suivantes : passer par un point connu ; être tangente à une droite donnée, etc... ; et l'on propose de déterminer les éléments principaux de la courbe : le centre, les foyers, les axes, etc.*

Dans d'autres cas, ces conditions élémentaires sont données directement et en nombre suffisant pour déterminer la conique.

A ce propos, nous dirons qu'*une condition géométrique imposée au tracé d'une courbe est d'ordre p, lorsqu'elle exige, pour être remplie, que les coefficients de l'équation de la courbe vérifient p (mais non $p + 1$) relations distinctes.*

Lorsque $p = 1$, on dit aussi que la condition proposée est *simple* ; elle est *double*, quand $p = 2$, etc. On vérifiera facilement le tableau suivant qui énumère quelques-unes des conditions que l'on rencontre le plus ordinairement dans le tracé des coniques.

La conique

Passe par un point ;
Est tangente à une droite ;
A une direction asymptotique donnée ;
A ses directions principales données ;
Est semblable à une conique donnée ;
etc.....
} **Condition simple.**

La conique

A pour centre un point donné ;
id. foyer id.;
id. sommet id.;
A une asymptote donnée ;
id. directrice id.;
id. tangente au sommet donnée ;
Est homothétique à une conique donnée;
} **Condition double.**

Une conique à centre est déterminée par des conditions dont le nombre est égal à cinq : la parabole exige seulement quatre conditions.

Nous examinerons d'abord ce dernier cas.

371. Problème I. *Construire une parabole connaissant quatre tangentes.* Soient Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, quatre droites situées dans un plan, et deux à deux concourantes.

On peut circonscrire un cercle C_1 au triangle $\Delta_2 \Delta_3 \Delta_4$; on obtient ainsi quatre circonférences C_1, C_2, C_3, C_4 (1) qui, pour des

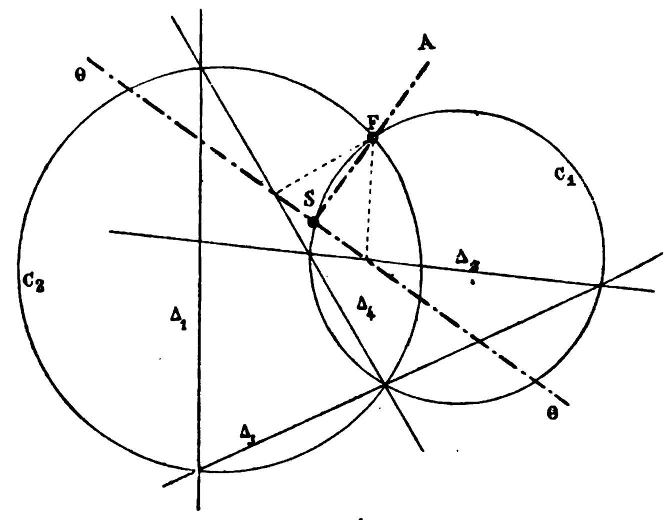


Fig. 143.

raisons géométriques faciles à vérifier, vont passer par le même point F. Si de F on abaisse des perpendiculaires sur les droites Δ, on obtient quatre points situés sur la même droite θ (*Th. de Simson*).

Le point F est le foyer de la parabole cherchée ; θ est la tangente au sommet. En abaissant de F une perpendiculaire sur θ, on obtient l'axe de la courbe. Le foyer F, et le sommet S, sont ainsi déterminés.

1. Ces deux dernières lignes ne sont pas tracées pour laisser plus de clarté à la figure.

372. Problème II. *Construire une parabole, connaissant la tangente au sommet* θ, *et deux tangentes* T, T'.

La droite T rencontre θ en un point A, et ce point peut être considéré comme la projection du foyer, sur T. De cette remarque, appliquée aux droites T et T', on déduit le foyer F. En projetant F sur θ, on obtient le sommet S.

373. Problème III. *Construire une parabole, connaissant la tangente au sommet, et deux points situés dans la même région.*

Nous établirons ici, à propos de ce problème, une remarque qui nous servira d'ailleurs dans d'autres occasions, et que nous énoncerons ainsi :

Théorème. *Lorsqu'une transversale rencontre : 1° la para-*

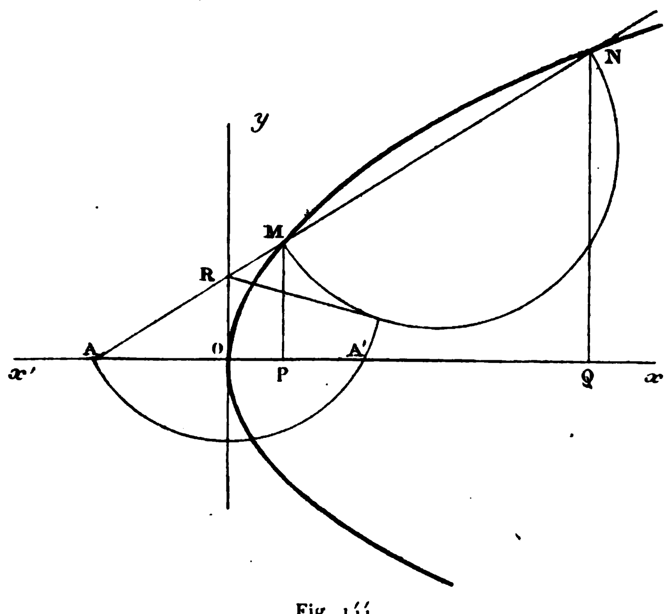


Fig. 144.

bole aux points M *et* N, *2° la tangente au sommet en* R, *3° l'axe en* A ; *on a* $\overline{RA}^2 = RM \cdot RN$.

Cette propriété importante peut être démontrée très simplement par des considérations géométriques ; on peut aussi la vérifier, comme il suit.

Soient (x', y') les coordonnées de M, (x'', y'') celles de N ; l'équation de MN est

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x');$$

on a donc,

$$\mathrm{OA} = \frac{y'x'' - x'y''}{y' - y''}.$$

D'autre part, les relations :

$$y'^2 - 2px' = 0, \quad y''^2 - 2px'' = 0,$$

donnent, par combinaison,

$$y'y''(y' - y'') = 2p(x'y'' - y'x'').$$

On déduit de là,

$$-2p \,.\, \mathrm{OA} = y'y'',$$

ou,

$$4p^2\overline{\mathrm{OA}}^2 = y'^2y''^2,$$

ou, enfin,

$$\overline{\mathrm{OA}}^2 = x'x'' = \mathrm{OP}.\mathrm{OQ}.$$

Cette relation prouve que l'on a aussi :

$$\overline{\mathrm{RA}}^2 = \mathrm{RM}.\mathrm{RN}.$$

Cette remarque étant faite, en effectuant la construction qu'indique la figure, on obtient l'axe de la courbe, et la solution du problème proposé se trouve ramenée à des constructions connues.

On remarquera que la propriété en question peut être appliquée à un diamètre quelconque et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

374. Problème IV. *Construire une parabole, connaissant la directrice* D, *et deux points* A, B.

Le foyer se détermine en décrivant des circonférences ayant pour centres les points A et B et pour rayons les distances de ces points à D [1].

375. Problème V. *Construire une parabole, connaissant la directrice* D, *et deux tangentes* T *et* T'.

Considérons l'une de ces tangentes, T par exemple. Elle rencontre D en un point A et soit T_1 la semi-droite qui, partant de A, fait avec D un angle aigu α. En faisant tourner cette semi-tangente autour de A, d'un angle α, mais dans le sens de rotation qui l'éloigne de la partie considérée sur la directrice, on a une droite passant par le foyer.

La tangente T' donne, en appliquant cette construction, une seconde droite passant par le foyer. Ce point se trouve donc bien déterminé.

376. Problème VI. *Construire une parabole, connaissant le foyer* F, *et deux points* M, N. On remarquera que la directrice est une tangente commune aux deux circonférences décrites, des points M et N comme centres, avec MF et NF pour rayons.

377. Problème VII. *Construire une parabole, connaissant le foyer, et deux tangentes* T, T'. En abaissant, du point donné, des perpendiculaires sur T et T', la droite qui joint les pieds de ces perpendiculaires est la tangente au sommet.

378. Problème VIII. *Construire une parabole, connaissant l'axe, et deux points.* Soit xx' l'axe donné (fig. 144), et soient M et N les points par lesquels doit passer la parabole

1. Ce problème, et quelques-uns de ceux qui suivent, exigeraient une discussion : mais, pour le motif déjà donné, nous la passons sous silence et le lecteur la rétablira sans difficulté.

que l'on veut construire. Si l'on projette les points **M** et **N** sur xx' et si O est le sommet inconnu nous avons **montré** (§ 373) que l'on avait

$$\overline{OA}^2 = OP.OQ.$$

D'après cela, si on détermine le point A', conjugué harmonique de A, par rapport aux points P, Q, on peut dire que O est le milieu de AA'.

379. Problème IX. *Construire une parabole, connaissant l'axe xx', et deux tangentes* RA, RB.

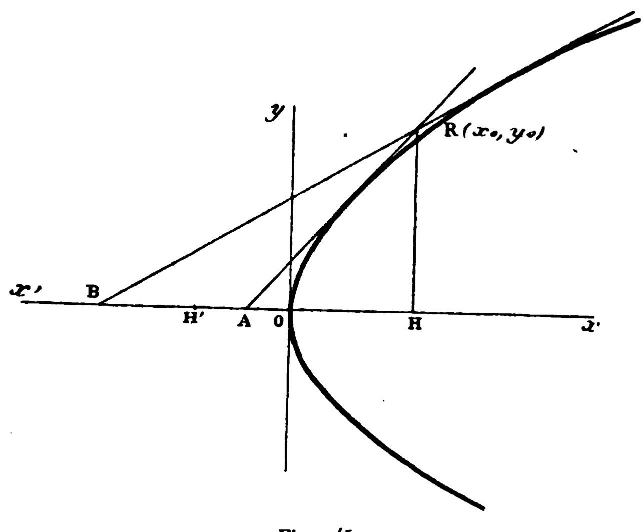


Fig. 145.

Projetons le point R sur xx', nous allons démontrer que l'on a

$$\overline{OH}^2 = OA.OB.$$

En effet, le faisceau des tangentes RA, RB, a pour équation :

$$(y^2 - 2px)(y_0^2 - 2px_0) = (yy_0 - px - px_0)^2.$$

En faisant $y = 0$, nous obtenons une équation du second degré en x,

$$(x + x_0)^2 + \frac{2}{p} x (y_0^2 - 2px_0) = 0,$$

équation dont les racines sont OA et OB. Nous avons donc

$$OA . OB = x_0^2$$

ou

$$OA . OB = \overline{OH}^2.$$

Ainsi, en prenant le point H′, conjugué harmonique de H par rapport aux points A et B, le sommet de la parabole est situé au milieu de HH′.

380. Problème X. *Construire une parabole, connaissant quatre points.*

Examinons d'abord le cas particulier où la figure formée par les quatre points donnés A, B, C, D, est un trapèze.

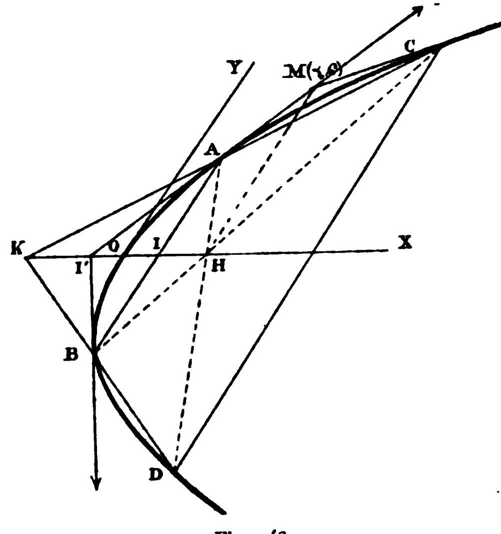


Fig. 146.

Imaginons une parabole passant par ces points et prenons pour axes de coordonnées le diamètre conjugué des cordes AB, CD, et la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

L'équation de la parabole est alors

$$Y^2 = 2p'X$$

et la droite AC, considérée comme polaire du point M, a pour équation

$$\beta Y = p'(X + \alpha).$$

Les droites AC et BD se coupent sur OX, en un point K ; les droites AD et BC, elles aussi, se croisent sur OX, au point H. La droite MH, pour des raisons connues, est la polaire du point K ; elle est donc parallèle à OY. D'autre part, l'équation précédente étant vérifiée pour $Y = 0$ et pour $X = -\alpha$, on voit que $OK = OH$.

Ainsi le point O est le milieu de KH et, si l'on prend $OI' = OI$, les droites I'A, I'B seront les tangentes à la parabole.

On peut déterminer de même les tangentes aux points C et D, et ramener ainsi la question à celle qui a été traitée plus haut (problème I). On peut aussi déterminer le foyer, et par suite la tangente au sommet, au moyen des seules tangentes I'A, I'B. En effet, le foyer est à l'intersection d'un cercle mené par I' et B, tangentiellement à I'A ; et d'un second cercle mené par I' et A, tangentiellement à I'B.

Considérons maintenant le cas général et supposons que les quatre points A, B, C, D soient quelconques. Joignons AB et CD, ces droites se rencontrent en un point O. S'il arrive que les points A et B soient situés du même côté par rapport à O, et les points C et D de côtés différents, le problème est évidemment impossible. Dans le cas où les points A et B, d'une part, C et D, d'autre part, sont situés de côtés différents par rapport à O, en prenant les droites AC et BD, ou encore AD et BC, on obtiendra un système de deux droites concourantes et telles que les points donnés soient situés du même côté par rapport au point de concours.

Prenons pour axes de coordonnées les droites OAB, OCD et posons :

$$OA = a, \quad OB = b ; \quad OC = c, \quad OD = d. \quad (a, b, c, d > 0).$$

L'équation générale des coniques coupant les axes aux points A, B, C, D est [1] (§ 245),

$$(1) \quad \frac{x^2}{ab} - 2\lambda \frac{xy}{abcd} + \frac{y^2}{cd} - x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - y\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) + 1 = 0.$$

Pour que cette équation représente une parabole, il faut prendre $\lambda = 1$, ou $\lambda = -1$. Le problème comporte deux solutions et l'on peut trouver celles-ci de la manière suivante.

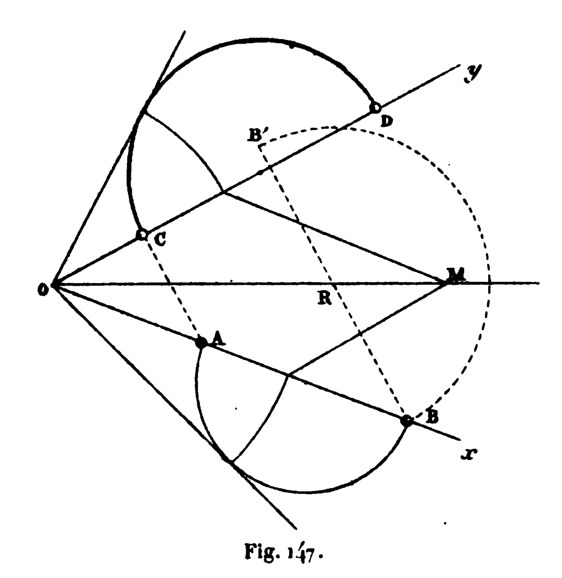


Fig. 147.

D'après l'équation (1), le diamètre qui passe par O a pour équation,

$$(2) \quad \frac{x}{\sqrt{ab}} = \frac{y}{\sqrt{cd}}, \qquad (\lambda = 1).$$

La construction indiquée par la figure prouve que OM est la droite qui correspond à l'équation (1).

1. Nous remplaçons, dans l'équation du paragraphe 245, le paramètre λ par $\frac{\lambda}{abcd}$. Cette légère transformation simplifie un peu l'écriture.

En menant par le point B une parallèle à AC, et en prenant RB′ = RB, B′ est un point de la parabole.

On est donc ramené au cas particulier que nous avons d'abord examiné.

Si l'on observe que, dans le cas où les droites AB et CD sont parallèles, le faisceau de ces deux droites constitue une parabole aplatie passant par les points donnés, on comprend pourquoi le problème, qui est du second degré dans le cas général, se réduit au premier degré, dans le cas particulier signalé.

381. Problème XI. *Construire une parabole, connaissant deux points* A, B *et deux tangentes* T, T′.

Supposons le problème résolu. Soit P la parabole cherchée

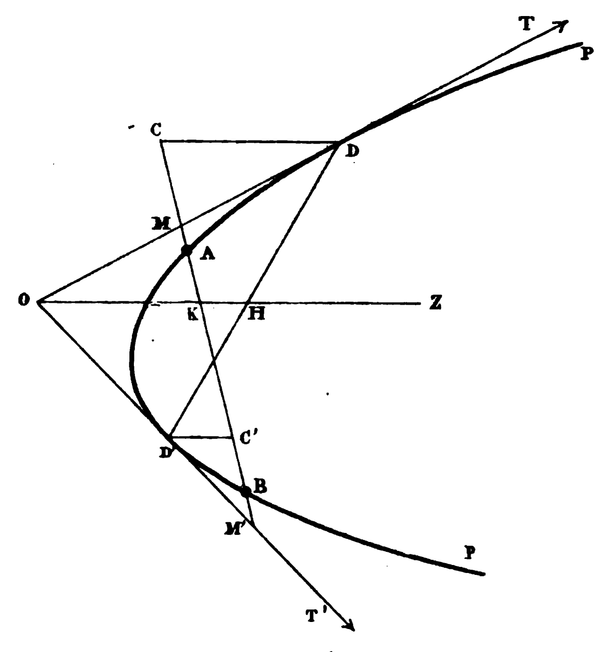


Fig. 148.

qui touche les droites T, T′ aux points D, D′; si l'on joint O au milieu H de DD′, la droite OZ ainsi obtenue est un diamètre de P. Par les points D, D′, menons des parallèles à OZ

jusqu'à leur rencontre avec AB; nous avons, par une propriété établie plus haut (§ 373),

$$\overline{MC}^2 = MA \cdot MB, \quad \text{et} \quad \overline{M'C'}^2 = M'A \cdot M'B.$$

Supposons que les droites T et T′ ne coupent pas le segment AB.

En décrivant sur AB un demi-cercle et en lui menant des tangentes par les points M,M′ nous pouvons déterminer les longueurs MC, M′C′. Remarquons aussi que OZ passe par le milieu K de CC′, la droite OZ se trouve donc déterminée. La suite n'offre plus aucune difficulté.

Comme l'on peut porter MC et M′C′ dans un sens ou dans l'autre, on a quatre points qui, combinés deux à deux, donnent quatre droites OZ. Le problème que nous venons de traiter a, en effet, comme celui qui suit, quatre solutions.

382. Problème XV. *Construire une parabole, connaissant trois points* A, B, C *et une tangente* T.

Soient (fig. 149) A, B, C les trois points donnés situés dans la même région par rapport à T. Le théorème déjà rappelé donne la relation

$$\overline{C'C''}^2 = C'A \cdot C'B.$$

En décrivant sur AB comme diamètre une demi-circonférence, et en lui menant par le point C″ une tangente, on aura la longueur C″C′. Le point C′ se trouve ainsi déterminé. On obtient de même les points A′ et B′, et la direction des diamètres est la droite A′B′C′, ainsi construite. On doit observer que les points A′B′C′, déterminés comme il vient d'être dit, sont au nombre de six. Mais ils sont, pour des raisons géométriques faciles à donner, trois à trois en ligne droite; ils forment donc un quadrilatère complet, et le problème en question admet quatre solutions en prenant, successivement, les quatre côtés de ce quadrilatère pour la direction des diamètres.

Nous allons maintenant examiner quelques problèmes ana-

logues à ceux que nous venons de traiter, mais en supposant que la conique considérée admette un centre.

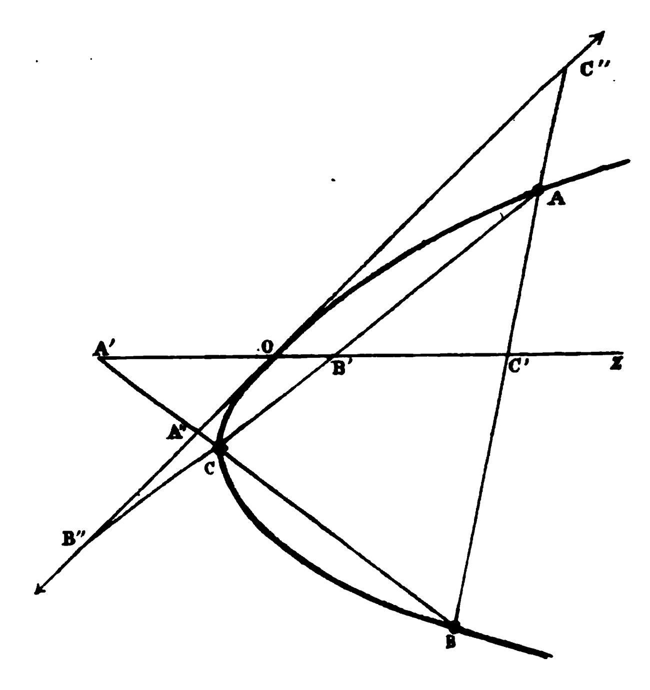


Fig. 149.

383. Problème XIII. *Construire une conique connaissant trois points* A, B, C ; *et le centre* O.

Soit I le milieu de BC ; la droite OI rencontre AB en P, et BC en Q. La polaire de P passe par le point Q, et si l'on désigne par H, l'extrémité du diamètre conjugué des cordes parallèles à BC, on a

$$\overline{OH}^2 = OQ.OP.$$

Par le point H, menons une parallèle à BC et traçons par le point O 1° une droite OM passant par le milieu de AB ; 2° une droite ON parallèle à AB ; OM et ON représentent deux dia-

mètres conjugués et si OH′ représente le diamètre conjugué de OH, nous avons (§ 313)

$$\overline{OH'}^2 = MH.NH.$$

En résumé, nous connaissons, en grandeur et en direction, deux diamètres conjugués de la conique, et nous pouvons considérer le problème proposé comme complètement résolu (§ 314).

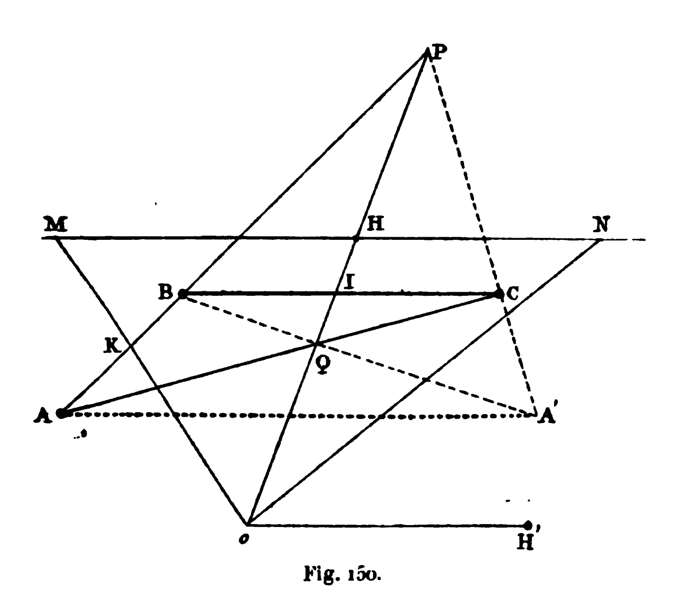


Fig. 150.

384. Problème XIV. *Construire une conique connaissant trois tangentes et le centre* O.

Soit ABC le triangle formé par les trois droites données; si, par le point O, on trace OM parallèle à AC, et ON parallèle à AB, la droite OA partage en deux parties égales la droite MN. On peut conclure de cette remarque que la droite qui joint les points de contact inconnus de AB et de AC avec la conique cherchée, est parallèle à MN (§ 261).

En appliquant cette remarque, successivement, aux sommets A, B, C, on voit que la détermination des points de contact

s'obtient en résolvant ce problème élémentaire : *inscrire, dans un triangle donné, un triangle dont les côtés soient parallèles à des directions données.*

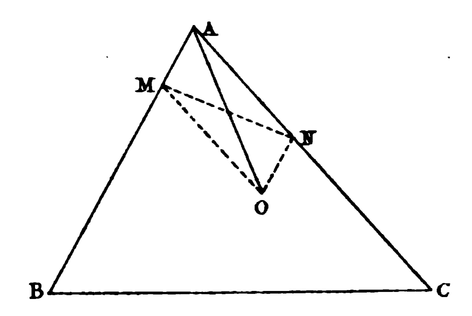


Fig. 151.

On est ainsi ramené au problème précédent.

385. Problème XV. *Construire une conique connaissant cinq points* (A, B, C, D, E).

On peut d'abord construire la conique, point par point, en appliquant le théorème de Pascal. Mais nous voulons indiquer,

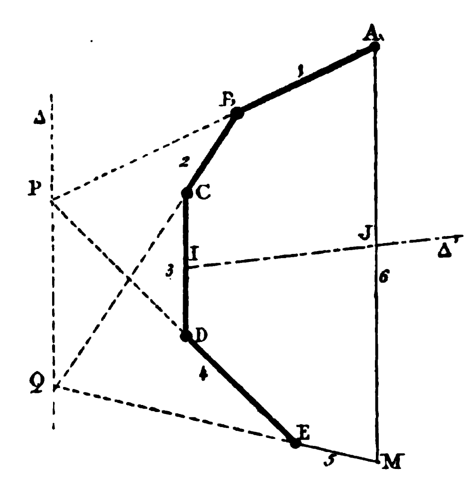


Fig. 152.

particulièrement, comment on peut déterminer le centre de la courbe.

Soit menée par le point A une parallèle à CD, et soit M le point inconnu où elle rencontre Γ. Le théorème de Pascal prouve que la droite PQ est parallèle aux cordes CD et AM. Le point P étant connu, on voit comment on peut déterminer M, et, en général, le point de rencontre de Γ avec une transversale quelconque menée par A. Si l'on joint les milieux I, J, des cordes CD, AM, on a une droite qui passe par le centre. Cette construction repétée une seconde fois (au point B, par exemple) donnera un second diamètre, et le centre se trouvera ainsi déterminé.

Nous indiquerons encore comment on trouve la tangente en un point de la conique déterminée par cinq points.

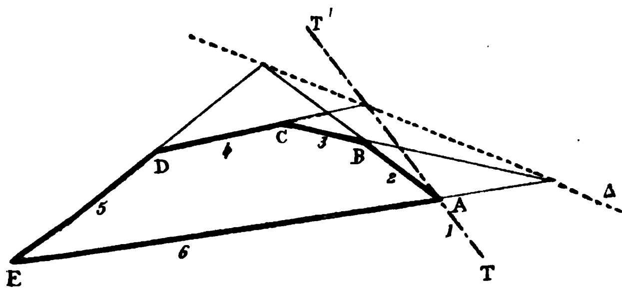


Fig. 153.

Soit A un point d'une conique Γ, dont on connaît quatre autres points B, C, D, E; supposons le problème résolu, et soit TT' la tangente à Γ, au point A. Si l'on considère l'hexagone inscrit dont le premier côté est la tangente TT', on voit, par application du théorème de Pascal, que la tangente TT' passe par le point de rencontre du côté CD avec la droite connue Δ; par suite TT' est déterminée.

386. Problème XVI. *Construire une conique,* Γ *connaissant cinq tangentes.*

En appliquant le théorème de Brianchon au pentagone ABCDE et en considérant, à cet effet, la tangente CD comme une droite double, constituant l'ensemble de deux tangentes coïncidentes issues du point de contact de CD et de Γ, on voit que ce point A' est déterminé, comme l'indique la figure.

On peut trouver ainsi les cinq points de contact, et il est possible de déterminer le centre de Γ comme nous l'avons expliqué tout à l'heure. On peut aussi observer qu'après

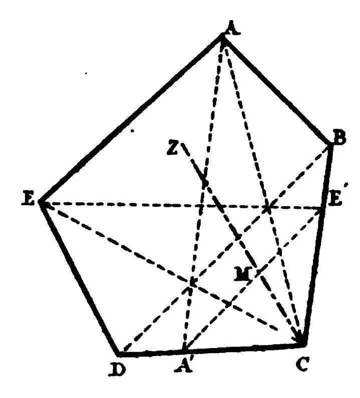


Fig. 154.

avoir trouvé les points de contact A', E' le centre de Γ se trouve sur la droite CZ qui va, du point C, au milieu M de A'E'.

Enfin, nous signalons, aux exercices 4 et 5 de cette leçon, une solution des problèmes XV et XVI basée sur la considération des points et des transversales réciproques.

EXERCICES

1. *Construire une hyperbole connaissant trois points* A, B, C, *et une asymptote* Δ.

On remarquera que la seconde asymptote est la transversale réciproque de Δ, par rapport au triangle ABC.

2. *On considère un triangle rectangle* AOB ; *soit* M *un point mobile sur l'hypoténuse, on joint* OM *et au milieu de cette droite on élève une perpendiculaire qui rencontre la parallèle menée par* M *à* OB, *en un point* I; *trouver le lieu décrit par ce point* I.

En prenant OA pour axe des x, et OB pour axe des y; à la droite AB qui a pour équation :

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1=0,$$

on fait correspondre une hyperbole H. On trouvera que cette hyperbole coupe ox en deux points qui sont les projections, sur cette droite, des bissectrices en O. On trouve aussi que H passe par le milieu de OB et que la parallèle menée par A à OB est une asymptote. On peut alors appliquer les **résultats** de l'exercice précédent.

3. *Construire une hyperbole équilatère* H *connaissant quatre points* A, B, C, D.

Les cercles des neuf points des triangles ABC, ABD, BCD, ACD concourent en un point O qui est le centre de H. Si l'on prend le milieu ω de AB et si de ω comme centre, avec ωO pour rayon on décrit un cercle, il rencontre AB aux points T, T′ ; OT et OT′ sont les asymptotes.

Cette construction est en défaut quand on donne pour le quatrième point D, le centre des hauteurs du triangle formé par les trois autres points A, B, C. Dans ce cas les quatre cercles des neuf points coïncident et l'on s'explique facilement cette indétermination en observant que toute hyperbole équilatère passant par trois points passe aussi par le centre des hauteurs du triangle.

4. *On considère un triangle* ABC *et un point fixe* M ; *autour de* M, *on fait tourner une transversale* Δ *et l'on prend la transversale réciproque* Δ' (§ 18). *Démontrer* 1° *que* Δ' *enveloppe une conique* μ, 2° *que le centre* O *de cette conique, le point* G, *centre de gravité du triangle* ABC, *et le point* M *sont en ligne droite ;* 3° *que l'on a* 2OG = GM.

Déduire de cette remarque une solution du problème XVI *de cette leçon.*

5. *Soit* ABC *un triangle et soit* M *un point dans son plan ; on joint* AM, *cette droite rencontre* BC *en un point* A′ *et l'on prend le point* A″ *symétrique de* A′, *par rapport au milieu de* BC.

Les trois droites AA″, BB″, CC″ *ainsi construites concourent en un point* M′.

Appelons **points réciproques** *les points* M, M′, *qui se correspondent d'après la loi géométrique que nous venons d'énoncer, et qui, en effet, sont tels que si* M′ *correspond à* M, *réciproquement* M *correspond à* M′.

Cette définition étant donnée, on suppose que M *soit mobile sur une droite* Δ, *démontrer* 1° *que la réciproque* M′ *décrit une conique* Δ' *circonscrite au triangle de référence* ABC. 2° *que les tangentes à* Δ', *rencontrent les côtés du triangle* ABC *en trois points qui appartiennent à la transversale réciproque de* Δ, 3° *que si l'on considère la conique* γ *qui est inscrite au triangle* ABC, *aux points* A″, B″ C″, *le centre* ω *de* γ, *le centre de gravité* G *de* ABC *et le point* M *sont trois points en ligne droite ;* 4° *que l'on a :* 2ωG = GM.

Déduire de ces propriétés diverses une solution du problème XV *de cette leçon.*

La solution des problèmes XV et XVI résulte très simplement des théo-

rèmes que nous venons d'énoncer dans cet exercice et dans l'exercice précédent.

Si l'on a cinq tangentes; on peut en considérer trois qui forment un triangle ABC ; il reste deux droites et l'on prend leurs transversales réciproques par rapport à ABC. Ces transversales se coupent en un point M. On obtient autant de tangentes que l'on veut en prenant 1° des transversales passant par M, 2° leurs transversales réciproques. Enfin le centre s'obtient en joignant le point M au centre de gravité de ABC et en prolongeant cette droite d'une longueur moitié moindre.

Si l'on donne cinq points : on prend trois d'entre eux pour former le triangle de référence ABC. Puis on considère les deux autres points D, E et l'on prend leurs réciproques D', E'. En prenant un point M' quelconque sur D'E', le point réciproque M appartient à la conique considérée Γ. Les tangentes à Γ aux points A, B, C se déterminent immédiatement en prenant la transversale réciproque de D'E' et en joignant les points où elle rencontre les côtés du triangle ABC, aux sommets de ce triangle. Connaissant trois tangentes et les points de contact, le centre se trouve déterminé par l'application d'une propriété connue (§ 261).

TRENTE-SEPTIÈME LEÇON

CONSTRUCTION DES COURBES. (Coordonnées Cartésiennes.)

Nous abordons maintenant le problème suivant : *étant donnée, en coordonnées cartésiennes, l'équation d'une courbe; indiquer, par un tracé, la forme générale de cette courbe et ses principales singularités.*

Quelques exemples feront comprendre, mieux que des aperçus généraux, comment on traite ce problème, dans les cas simples où il se présente ordinairement.

L'équation de la courbe proposée étant

$$f(x, y) = 0,$$

il peut arriver : 1° que f soit une forme entière, résoluble par rapport à l'une des variables; 2° que f soit une forme entière, non résoluble; 3° enfin que f représente une forme irrationnelle et même une forme transcendante. Nous examinerons successivement ces différentes hypothèses.

387. Premier cas. (*Équation résoluble.*)

On considère un cercle Δ *et un diamètre fixe* OA; *sur* Δ *on prend un point mobile* M *et après avoir mené par* C *une perpendiculaire à* OA, *on prend :* $\mathrm{MI} = \mathrm{MI}' = \mathrm{OM}$; *trouver le lieu* U *décrit par les points* I *et* I'.

Cherchons d'abord l'équation polaire de U; et remarquons, à cet effet, que OI est la bissectrice de MOA.

Nous avons donc

$$\mathrm{OI} = f = 2\mathrm{OM}\cos\omega, \quad \text{et} \quad \mathrm{OM} = d\cos 2\omega.$$

Ainsi l'équation cherchée est

$$f = 2d \cos \omega \cos 2\omega,$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$\text{(A)} \quad (x^2 + y^2)^2 = 2dx(x^2 - y^2).$$

Cette équation développée, et ordonnée par rapport à y^2, peut s'écrire :

$$(\text{A}_1) \quad y^4 + 2y^2x(x + d) + x^3(x - 2d) = 0,$$

On a d'abord,

$$x - 2d > 0,$$

et si l'on prend AB = OA, la courbe est située toute entière à la gauche de DD'.

D'autre part, on doit avoir

$$x^2(x + d)^2 - x^3(x - 2d) > 0.$$

ou,

$$4x + d > 0.$$

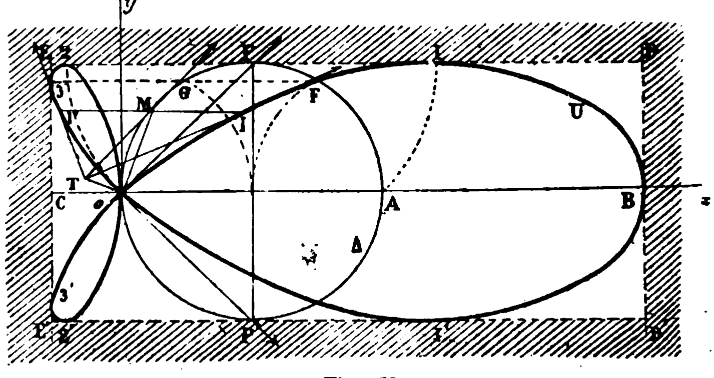


Fig. 155.

Si l'on prend $OC = \frac{OA}{4}$, la courbe U est située à la droite de EE'.

D'après la construction qui donne le point I, on peut soup-

çonner que U est renfermée entre les deux droites DE, D'E'; et l'on vérifie, en effet, que l'équation peut se mettre sous la forme :

$$(A_1) \quad (y^2 - R^2)\{x^2 + (x + R)^2\} + (x^2 - 2Rx - R^2)^2 = 0.$$

On doit donc avoir

$$y^2 - R^2 < 0,$$

et les droites DE, D'E' sont doublement tangentes à la quartique que nous étudions, aux points 1 et 2, obtenus en décrivant un demi-cercle du point P, comme centre, avec PO pour rayon.

Pour toute valeur de x, comprise entre $-\frac{R}{2}$ et 0, l'équation (A_1) admet quatre racines réelles; elle n'en a plus que deux, pour les valeurs de x qui varient entre 0 et 4R.

L'origine est un point triple; les tangentes en ce point sont : 1° les bissectrices OP, OP'; 2° l'axe Oy.

La rencontre de U avec Δ, a lieu en F, OGFA étant le demi-hexagone régulier inscrit dans le demi-cercle OPA. Ce résultat se vérifie facilement, en supposant que le point M est placé en G.

Le point 3, point de contact de U avec EE', se trouve placé précisément sur FG. On le reconnait, d'abord, en faisant

$$x = -\frac{R}{2},$$

dans (A); on le voit aussi en appliquant la remarque générale que nous allons faire pour tracer une tangente quelconque à la courbe U.

A cet effet, considérons une transformation de figures planes, d'après la loi suivante.

Soient O un point fixe, et M un point quelconque; on joint OM et par M on mène une droite Mμ égale à OM et parallèle

à une direction fixe ox. Lorsque le point M décrit une figure f, μ décrit une figure correspondante φ. Telle est la transformation que nous imaginons, et l'on voit que la quartique que nous venons de construire est, dans cet ordre d'idées, la transformée du cercle Δ.

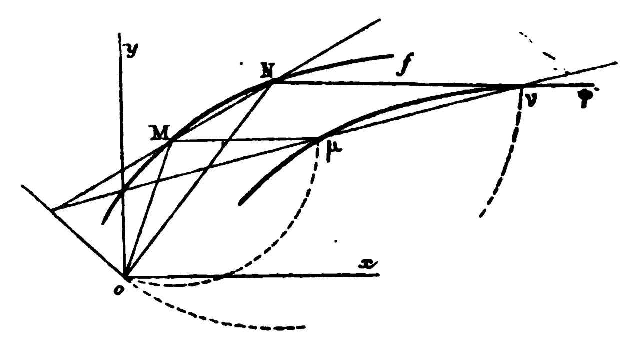


Fig. 156.

Si nous prenons sur f un point N et si nous construisons le point correspondant ν, les triangles semblables RMμ, RNν, donnent :

$$\frac{RM}{RN} = \frac{M\mu}{N\nu},$$

ou,

$$\frac{RM}{RN} = \frac{OM}{ON}.$$

D'après cette remarque, OR est donc la bissectrice extérieure du triangle MON.

Si nous observons maintenant que OR est perpendiculaire sur la bissectrice extérieure et si nous supposons que les points M, N viennent se confondre, nous voyons que *la tangente en μ, à la courbe φ, passe par le point qui est commun à la tangente en* M *à la courbe donnée f, et à la perpendiculaire élevée au point* O *au rayon vecteur* OM.

C'est en nous appuyant sur cette remarque qu'après avoir

élevé OT, perpendiculairement à OM, nous avons construit les tangentes TI, TI′ (fig. 155) [1].

388. Deuxième cas. (*Équation non résoluble.*)

Méthode par régions. Lorsqu'une équation n'est résoluble ni par rapport à x, ni par rapport à y, sa discussion offre, ordinairement, quelque difficulté. Après avoir déterminé, quand la chose est possible, ses asymptotes, ainsi que ses points et ses tangentes remarquables, on peut, le plus souvent, concevoir une idée assez exacte de la forme de la courbe qui correspond à l'équation proposée, en appliquant la méthode par régions qui repose sur un principe que nous allons développer d'abord.

Soit,

$$(1) \quad f(x,y)=0,$$

l'équation donnée ; supposons que nous ayons

$$(2) \quad f(x,y) \equiv P_1 P_2 \dots P_h - Q_1 Q_2 \dots Q_i.$$

L'équation (1) ne peut être vérifiée par les coordonnées x', y', d'un point M, que si les deux produits :

$$P'_1\, P'_2 \dots P'_h\ ;\ Q'_1\, Q'_2 \dots Q'_i\ ;$$

ont le même signe.

1. La formule :

$$y' = -\frac{f'x}{f'y}$$

prouve que l'on peut construire, avec la règle et le compas, la tangente en un point d'une courbe, lorsque celle-ci correspond à une équation rationnelle $f(x,y)=0$. Mais il est toujours sous-entendu, quand on traite le problème de la construction de la tangente, que l'on cherche une solution simple et qui dépende de considérations particulières. Chasles a indiqué (*Aperçu historique*, p. 221) une construction des tangentes à une courbe d'un degré quelconque. (V. Exc. 2, de cette leçon.)

Cette remarque évidente étant faite, construisons les courbes $U_1, U_2, \dots U_h$; $V_1, V_2, \dots V_i$. qui ont pour équation, respectivement,

$$P_1 = 0, P_2 = 0, \dots P_h = 0; \quad Q_1 = 0, Q_2 = 0, \dots Q_i = 0,$$

ces courbes U et V formeront, dans le plan où nous voulons construire f, une sorte de réseau donnant la séparation de ce plan en régions. Imaginons alors un espace E, limité par ce réseau ; si les coordonnées x' et y', d'un point pris dans cet espace, donnent

$$(3) \quad P'_1 P'_2 \dots P'_h \cdot Q'_1 Q'_2 \dots Q'_i < 0$$

nous pourrons couvrir l'espace E de hachures, pour marquer que la courbe n'a aucun bras dans cet espace.

Quand on a ainsi déterminé un des espaces où ne pénètre pas la courbe, on trouve tous les espaces E, qui jouissent de la même propriété, en parcourant le plan, après avoir pris pour point de départ un point de E, et, en notant, comme espace analogue à E, tous ceux que l'on obtient après avoir coupé les lignes du réseau un nombre pair de fois.

En effet, la fonction

$$P_1 P_2 \dots P_h . Q_1 Q_2 \dots Q_h ,$$

change de signe toutes les fois que l'on franchit une des lignes du réseau ; elle passe ainsi successivement du positif au négatif, ou inversement ; par conséquent, tous les espaces E sont tels que l'inégalité (3) soit vérifiée par les coordonnées d'un point quelconque de ces régions ; aucun bras de la courbe ne peut exister dans leur intérieur.

On remarquera que cette démonstration repose sur la continuité des fonctions P et Q ; par suite, des *points isolés* peuvent exister dans les régions E.

On doit aussi observer que la démonstration précédente subsiste, quand les facteurs P et Q sont affectés d'exposants impairs ; mais si l'un deux a un exposant pair, la courbe qui lui correspond ne doit pas faire partie du réseau.

389. Premier exemple. Nous allons appliquer cette méthode à deux équations et nous choisirons, comme première application, le *folium de Descartes,* dont nous avons déjà parlé (§ 69).

L'équation de cette courbe est (en supposant $a = 1$),

$$(F) \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

Cette équation met en évidence une première séparation du plan en régions au moyen des axes et de la seconde

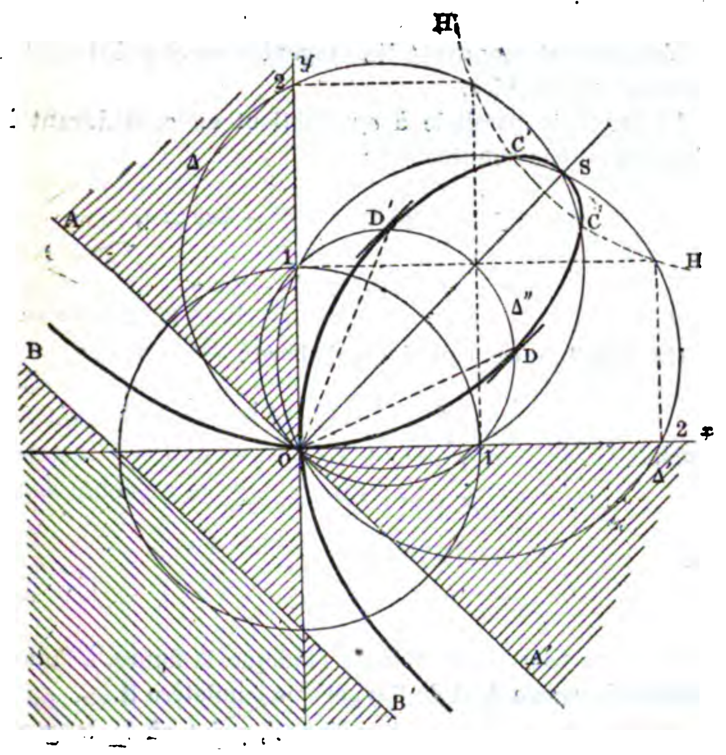


Fig. 157.

bissectrice AA'. Mais on obtient une autre séparation en remarquant que l'on a

$$(x + y)^3 - 3xy(x + y + 1) = x^3 + y^3 - 3xy,$$

et l'on peut adjoindre aux droites déjà signalées, la droite BB′ qui a pour équation

$$x + y + 1 = 0,$$

cette droite BB′, comme on le vérifie sans peine, est l'asymptote réelle du Folium.

La première bissectrice est un axe de symétrie de la courbe, et les coordonnées du sommet sont égales, l'une et l'autre, à $\frac{3}{2}$.

L'origine est un nœud ; les tangentes en ce point sont les axes de coordonnées.

La tangente parallèle à *oy* s'obtient en considérant les deux équations simultanées :

$$(1) \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0,$$

$$(2) \quad \frac{1}{3} f'_y(x, y) = y^2 - x = 0.$$

On déduit de ces équations, d'abord :

$$(3) \quad x^2 - 2y = 0\,;$$

puis,

$$x^2 + y^2 - x - 2y = 0,$$

et,

$$xy = 2.$$

Le point C est donc, comme l'indique la figure, à l'intersection du cercle Δ et de l'hyperbole équilatère H.

On voit de même que le point C′, point où la tangente au folium est parallèle à Ox, est situé sur cette même hyperbole H et sur le cercle Δ′. La détermination des points C et C′ n'est pas un problème quadratique, il ne peut se résoudre par le seul moyen de la règle et du compas. On trouve, en effet, en résolvant les équations (2) et (3) que

l'abcisse de C est égale à $\sqrt[3]{4}$; cette valeur n'est pas susceptible d'une construction quadratique.

Parmi les points remarquables du folium il faut citer, tout particulièrement, ceux pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe de la courbe. Nous allons montrer que la détermination de ces points peut se faire par la règle et le compas.

Considérons, à cet effet, les équations simultanées :

$$f(x,y) = 0,$$

$$\frac{1}{3}f'_x - \frac{1}{3}f'_y = 0.$$

ou,

$$(4) \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0,$$

et,

$$(5) \quad x^2 + y^2 - x - y = 0.$$

Celle-ci nous apprend déjà que les points cherchés sont situés sur le cercle Δ''.

Combinons maintenant les équations (4) et (5), de façon à obtenir l'équation qui représente le faisceau des droites qui joignent l'origine aux points communs à Δ'' et au folium. Nous obtenons le résultat suivant :

$$(x+y)(x^3 + y^3) = 3xy(x^2 + y^2).$$

ou,

$$y^4 - 2y^3x - 2x^3y + x^4 = 0.$$

En posant : $y = tx$, l'inconnue t, coefficient angulaire des droites cherchées, est donnée par l'équation réciproque :

$$(6) \quad t^4 - 2t^3 - 2t + 1 = 0.$$

Cette équation présente deux variations, la transformée en $-t$ n'en a aucune ; elle a donc deux racines positives, tout au plus. D'ailleurs, en substituant successivement : 0, 1, 2,

et 3 ; on trouve qu'il y a une racine t' comprise entre o et 1, et une autre racine t'', entre 2 et 3 ; ces deux racines sont inverses l'une de l'autre, comme le prouve l'équation (6).

Le calcul ordinaire des équations réciproques, appliqué à l'équation (6), donne :

$$2t' = 1 + \sqrt{3} - \sqrt[4]{12},$$
$$2t'' = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{12};$$

et ces valeurs sont suceptibles d'être construites avec la règle et le compas.

Le Folium rentrant dans l'espèce des courbes dites *unicursales*, que nous étudierons plus loin, on peut, comme nous le montrerons alors, construire ces courbes, point par point, avec la règle et le compas, d'une infinité de façons [1].

La méthode par régions que nous venons d'appliquer au Folium est une de celles qui donnent, très rapidement, une indication précieuse pour le tracé de la courbe. Elle peut même s'appliquer, avec avantage, dans le cas des équations résolubles comme le prouve l'exemple suivant.

390. Deuxième exemple. *On considère une ellipse* E, *rapportée à ses axes ; soit* M *un point pris dans son plan ; la polaire de* M *rencontre les axes en des points* P, Q ; *si, par ces points, on mène des parallèles aux axes, on obtient un point* R. *On propose de trouver le lieu de* M, *sachant que la droite* MR *passe par un point fixe* F ; (α, β).

Soient x_0, y_0, les coordonnées de M, la polaire PQ a pour équation :

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

1. Voyez, aux exercices de cette leçon, une génération du Folium, par des droites et des cercles.

Les coordonnées du point R sont : $\frac{a^2}{x_0}, \frac{b^2}{y_0}$, et l'équation de MR peut s'écrire :

$$\frac{y - y_0}{y_0 - \frac{b^2}{y_0}} = \frac{x - x_0}{x_0 - \frac{a^2}{x_0}}.$$

En exprimant que cette équation est vérifiée par : $x = \alpha$, $y = \beta$; puis en rendant x_0, y_0, coordonnées courantes, on a l'équation du lieu :

$$(1) \quad x(x - \alpha)(y^2 - b^2) = y(y - \beta)(x^2 - a^2).$$

La courbe qui correspond à cette équation est une cubique ; les axes de l'ellipse, les tangentes en ses sommets, et les pa-

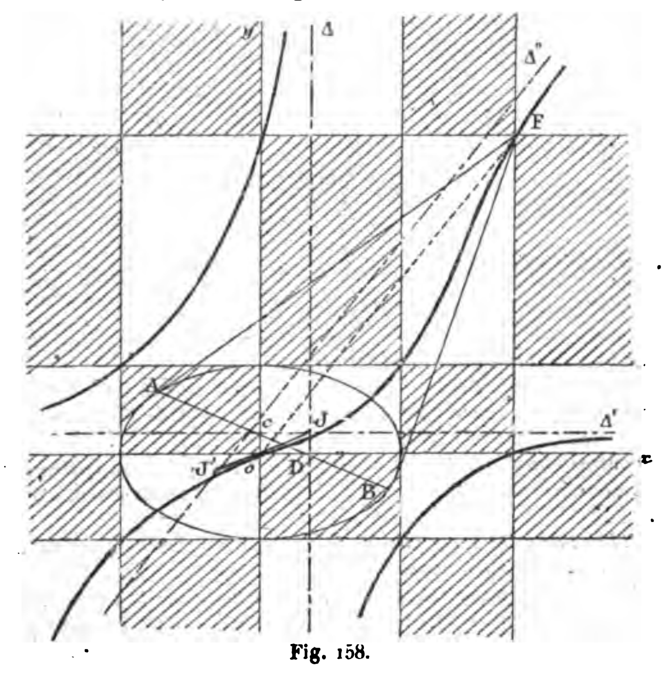


Fig. 158.

rallèles à ces droites menées par F, séparent le plan en régions, comme l'indique la figure.

Si par le point F on mène à l'ellipse les tangentes FA, FB,

6. ***Appliquer les formules précédentes à une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes.***

La transformée de l'hyperbole équilatère est une cubique à centre formée d'une branche serpentine et de deux branches hyperboliques. Son équation est

$$Y(X^2 - Y^2) = 2m^2 X.$$

Les axes de coordonnées, et les bissectrices, donnent une séparation du plan en régions dont la considération facilite le tracé de la courbe.

7. *Chercher dans l'exercice traité plus haut* (§ 390) *le lieu décrit par le point* R.

Ce lieu est le même que celui qui a été trouvé pour M. *Expliquer géométriquement ce résultat.*

Vérifier que le lieu du point M, *ou du point* R, *peut être représenté, indifféremment, par l'une ou l'autre des équations suivantes:*

$$x(x-\alpha)(\beta y - b^2) = y(y-\beta)(\alpha x - a^2)$$
$$(y^2 - b^2)(\alpha x - a^2) = (x^2 - a^2)(\beta y - b^2).$$

Déterminer les différentes formes de la courbe quand le point fixe (α, β) *occupe des positions diverses dans le plan de l'ellipse.*

8. *Vérifier que le folium de Descartes est de la quatrième classe; en déduire que l'équation qui donne les coefficients angulaires des tangentes parallèles à l'axe du folium est nécessairement réciproque et que, par suite, la détermination de ces tangentes est un problème quadratique.*

TRENTE-HUITIÈME LEÇON

CONSTRUCTION DES COURBES (Coordonnées cartésiennes) (*suite*).

391. Lorsque l'équation d'une courbe ne renferme que des coefficients numériques, la forme de cette courbe est bien déterminée. Il n'en est plus de même, pour les équations à coefficients algébriques. Non seulement la courbe se déforme quand on donne aux paramètres qui entrent dans son équation des valeurs différentes, mais son aspect général peut être, suivant ces valeurs, complètement modifié. Des asymptotes qui étaient réelles, peuvent devenir imaginaires, ou être rejetées à l'infini; des points multiples qui formaient des *nœuds*, peuvent devenir des points de rebroussement ou des *points isolés*, etc.; l'équation peut même, dans certains cas, se décomposer en facteurs rationnels.

Il y a donc à faire, pour les équations algébriques, une étude particulière; étude parfois délicate, et qui a pour but de rechercher les formes différentes que peut affecter la sinuosité de la courbe qui correspond à l'équation donnée, quand on suppose variables les paramètres qui entrent dans celle-ci.

392. Construction d'une courbe algébrique. Prenons, comme exemple, l'équation trouvée précédemment (§ 285),

$$(1) \qquad (x^2+y^2)^2 = (a^2+b^2)^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right).$$

si l'on considère le rectangle MNPQ dont les côtés correspondent aux équations :

$$x = \pm a, \qquad y = \pm b,$$

Fig. 159.

et le cercle Δ circonscrit à ce rectangle, on voit que la courbe est complètement extérieure à ce cercle. En effet, l'équation (1) peut s'écrire sous la forme :

$$(1) \qquad (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)\left(a^2\frac{y^2}{b^2} + b^2\frac{x^2}{a^2}\right),$$

et cette équation rend manifeste l'observation que nous venons de faire.

On vérifie aussi, facilement, que les sommets C, C′, D, D′, de la quartique U, qui correspond à (1), sont les sommets du losange obtenu en menant à Δ les tangentes aux points M, N, P, Q.

On a ainsi une idée générale de la courbe U qui a la forme d'un ovale enveloppant le cercle Δ, et ayant pour sommets les points que nous venons d'indiquer.

Mais, dans cet exemple, comme dans beaucoup d'autres, le point délicat est l'étude de la sinuosité de la courbe et l'on peut, dans le cas qui nous occupe, rechercher les formes diverses affectées par la sinuosité qui doit être tracée entre C et D.

Les points qui sont communs à U et à HH' sont réels ou imaginaires, suivant que l'on a :

$$a^2 > 2b^2, \quad \text{ou} \quad a^2 < 2b^2.$$

Dans la première hypothèse, (celle qui correspond à la figure), il y a, en dehors du point C, un point commun à U et à HH', c'est le point R qui a pour ordonnée y',

$$y' = \frac{a^2 + b^2}{ab}\sqrt{a^2 - 2b^2}.$$

En désignant par φ l'angle que fait avec ox la direction inconnue OR, on a

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{y'^2}{x'^2} = \frac{\overline{CR}^2}{\overline{CO}^2} = \frac{a^2 - 2b^2}{b^2}.$$

On tire, de cette relation,

$$b = c\cos\varphi.$$

Le point R s'obtient donc, comme l'indique la figure, en traçant, du point B comme centre, avec a pour rayon, un arc de cercle, ce qui donne le point F ; sur OF comme diamètre, on décrit un demi-cercle, et, du point O comme centre, avec le rayon OB, on trace l'arc BK. La droite OK prolongée donne le point R.

En supposant que $a^2 \leqslant 2b^2$, on a des ovales n'offrant plus la même apparence et complètement renfermés dans le rectangle IHI'H'.

Pour compléter les renseignements utiles au tracé de C, il resterait à déterminer les tangentes parallèles à Oy. En posant $OF = c$, on trouve que la tangente double SS′ a pour équation :

$$x = \frac{a(a^2 + b^2)}{2bc}$$

On peut construire cette droite de bien des façons et nous laissons au lecteur le soin de rechercher une construction simple.

Dans le cas où $a = b$, le lieu considéré est un cercle. En se reportant (§ 285) à la définition géométrique de cette courbe, on se rendra facilement compte de cette particularité.

La quartique considérée correspond à la définition générale suivante :

1° *Elle passe doublement par les ombilics du plan ;*

2° *Elle a un centre ;*

3° *Ce centre est un point double isolé.*

293. Construction d'une courbe correspondant à une équation irrationnelle. Proposons-nous le lieu géométrique suivant :

On considère un cercle Δ *et, sur ce cercle, un point fixe* A ; *soit* BB′ *la tangente à* Δ, *au point* A′, *diamétralement opposé à* A. *Par ce dernier point, on mène une transversale* ACD, *qui rencontre* Δ *en* C, *et* BB′ *en* D ; *du point* C, *comme centre avec* CD *pour rayon, on décrit un demi-cercle qui rencontre la perpendiculaire abaissée de* C *sur* AA′ *aux points* I, I′; *trouver le lieu décrit par ces points* I, I′.

En désignant par α l'angle que fait avec AA′ la transversale mobile, on a, en posant $AA' = d$,

$$CD = \frac{d \sin^2\alpha}{\cos\alpha},$$

et, par suite,

$$y = \frac{d}{2} - d\cos^2\alpha,$$

$$x = d\sin\alpha\cos\alpha + \frac{d\sin^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

On a donc

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{\frac{d}{2} - y}{d}},$$

et,

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{\frac{d}{2} + y}{d}}.$$

L'équation du lieu, sous une forme irrationnelle, est donc

$$(1) \quad x = \frac{\pm\left(\frac{d}{2} - y\right)\sqrt{\frac{\frac{d}{2}+y}{d}} + y + \frac{d}{2}}{\pm\sqrt{\frac{\frac{d}{2}-y}{d}}}.$$

Cette équation prouve que la courbe est située tout entière entre les deux tangentes parallèles BB', $\beta\beta'$; à toute valeur de y, comprise entre $+\frac{d}{2}$ et $-\frac{d}{2}$, correspondent quatre valeurs de x, deux à deux égales et de signes contraires.

En écrivant l'équation (1) sous la forme :

$$(1') \quad x^2 = \frac{\frac{d}{2}+y}{\frac{d}{2}-y}\left\{\frac{d}{2} - y \pm \sqrt{d\left(y + \frac{d}{2}\right)}\right\}^2,$$

on voit que l'équation

$$\left(\frac{d}{2}-y\right)^2 = d\left(y+\frac{d}{2}\right)$$

qui peut s'écrire

$$y^2 - 2dy - \frac{d^2}{4} = 0,$$

donne les ordonnées de deux points doubles de la courbe.

L'un, celui qui correspond à la racine positive, est un point isolé; l'autre, le point P, est réel et il se construit comme le montre la figure.

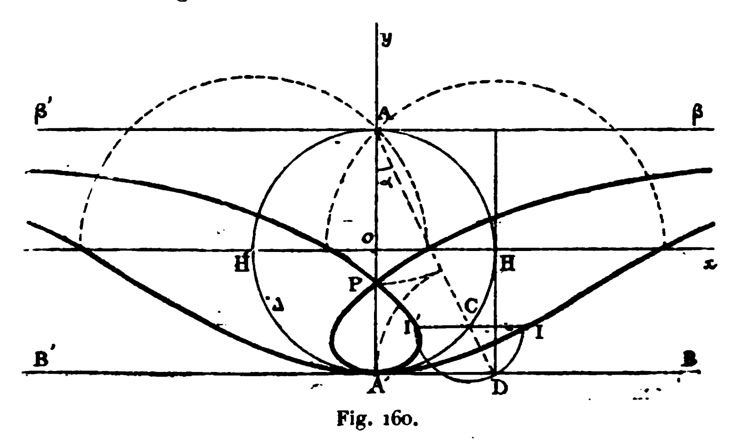


Fig. 160.

Les points de rencontre de Ox avec la courbe se déterminent au moyen de deux cercles qui sont décrits des points H et H', comme centres, avec AH = AH' pour rayon.

En résumé, la courbe a l'aspect général qu'indique la figure.

394. Remarque. Supposons que l'équation d'une courbe soit irrationnelle, et qu'elle renferme notamment les expressions $\sqrt{U}$, et $\sqrt{V}$; on dit alors, ordinairement, que les conditions $U > 0$, $V > 0$, sont nécessaires pour que l'on puisse trouver des solutions réelles à l'équation considérée. Mais il y a, dans cette façon de raisonner, une pétition de principe

qu'il importe de signaler; $\sqrt{U}$, et $\sqrt{V}$ pouvant être imaginaires, sans que l'expression $f(\sqrt{U}, \sqrt{V})$ le soit nécessairement.

Nous ne faisons que signaler ici cette exception et l'on trouvera dans l'exercice proposé plus loin (Ex. 24), un exemple de cette singularité.

Nous allons montrer, maintenant, comment on étudie, autour d'un de ses points, une courbe correspondant à une équation irrationnelle. Mais, à ce propos, nous établirons d'abord un principe algébrique, très utile dans les discussions de ce genre, et auquel nous avons fait allusion précédemment (lec. 15; ex. 2.)

395. Théorème. *On a :*

$$\sqrt[p]{1 + \alpha x + \beta x^2 + \ldots + \lambda x^q} = 1 + Ax + Bx^2 + \ldots + Mx^r + \varepsilon x^r,$$

A, B, ... M *étant des coefficients dépendant de la valeur attribuée aux lettres* α, β, ... λ *; et* ε *désignant une fonction de* x *qui s'annule, en même temps que* x.

1re *Démonstration.* Prenons d'abord le cas le plus simple et considérons l'égalité

$$y = \sqrt[p]{1 + \alpha x}.$$

On peut toujours poser

$$(2) \quad (1 + \alpha x)^{\frac{1}{p}} = 1 + \frac{1}{p}\alpha x + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)\frac{\alpha^2 x^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right) \ldots \left(\frac{1}{p} - r + 1\right)\frac{\alpha^r x^r}{r!} + \varepsilon x^r,$$

mais il faut montrer que l'on a

$$\text{Lim } \varepsilon = 0, \qquad (\text{pour } x = 0).$$

On a, d'abord,

$$\varepsilon = \frac{(1 + \alpha x)^{\frac{1}{p}} - 1 - \frac{1}{p}\alpha x - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)\frac{\alpha^2 x^2}{1 \cdot 2} \ldots - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right) \ldots \left(\frac{1}{p} - r + 1\right)\frac{\alpha^r x^r}{r!}}{x^r}$$

Pour $x = 0$, cette expression se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Appliquons-lui la règle de l'Hôpital et cherchons, pour $x = 0$, la vraie valeur de l'expression :

$$\varepsilon_1 = \frac{\frac{1}{p}\alpha(1+\alpha x)^{\frac{1}{p}-1} - \frac{\alpha}{p} - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\alpha^2 x \ldots - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{p}-r+1\right)\frac{\alpha^r x^{r-1}}{(r-1)!}}{r x^{r-1}}$$

Pour $x = 0$, on trouve encore $\frac{0}{0}$, et, par une application nouvelle de la règle de l'Hôpital, on a :

$$\varepsilon_2 = \frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\alpha^2(1+\alpha x)^{\frac{1}{p}-2} - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\alpha^2 \ldots - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{p}-r+1\right)\frac{\alpha^r x^{r-2}}{(r-2)!}}{r(r-1)x^{r-2}}$$

et ainsi de suite ; on arrive, finalement, à chercher la vraie valeur de l'expression :

$$\varepsilon_r = \frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{p}-r+1\right)\alpha^r(1+\alpha x)^{\frac{1}{p}-r} - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{p}-r+1\right)\alpha^r}{1.2.\ldots r},$$

pour $x = 0$. Cette valeur est zéro : on a donc $\lim \varepsilon = 0$, pour $x = 0$.

Revenons maintenant au cas général et considérons l'expression

$$y = \sqrt[p]{1 + \alpha x + \beta x^2 + \ldots + \lambda x^q}.$$

Posons :

$$\rho = \alpha + \beta x + \ldots + \lambda x^{q-1},$$

nous avons alors

$$y = \sqrt[p]{1 + \rho x},$$

et nous pouvons appliquer, à cette forme algébrique, l'identité (2). Nous obtenons ainsi :

$$(L)\qquad \begin{aligned} y = 1 &+ \frac{1}{p}(\alpha + \beta x + .. + \lambda x^{q-1})x \\ &+ \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)(\alpha \mp \beta x + \dots + \lambda x^{q-1})^2 x^2 \\ &+ \dots + \varepsilon' x^r \end{aligned}$$

Si nous groupons tous les termes en : $x^0, x^1, \dots x^{r-1}; x^r$; la partie complémentaire sera formée par des termes en $x^{r+1} x^{r+2}$, etc... ; auxquels il faut encore adjoindre $\varepsilon' x^r$. En mettant x^r en facteur commun dans cette seconde partie, nous avons donc :

$$(L') \quad y = 1 + Ax + Bx^2 + \dots + Mx^r + \varepsilon x^r,$$

εs' annulant avec x puisque ε' jouit de cette propriété.

2° *Démonstration.* On peut encore établir le principe précédent par le calcul suivant, calcul auquel nous avons fait allusion précédemment (p. 203), et qui offre l'avantage de ne pas s'appuyer sur la règle de l'Hôpital.

En appliquant à l'expression $1+\alpha x$ la règle d'extraction de la racine d'indice p (Alg., § 71.), on trouve :

$$(1) \quad 1 + \alpha x = (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_r x^r)^p + x^{r+1} U,$$

U désignant une fonction entière, et les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$ se calculant, comme le prouve la règle citée, par les formules

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{p}, \alpha_2 = \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right), \dots, \alpha_r = \frac{\alpha^r}{r!}\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)\dots\left(\frac{1}{p} - r + 1\right)$$

On peut toujours poser :

$$(2) \quad \sqrt[p]{1 + \alpha x} = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_r x^r + x^r V,$$

et nous nous proposons de démontrer que

$$\text{Lim } V = 0, \text{ (pour } x = 0).$$

L'identité (2) donne, d'abord,

$$(3)\quad 1+ax = (1+\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_r x^r)^p + px^r V(1+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_r x^r) + \ldots ;$$

en comparant (2) et (3), nous avons :

$$pV(1+\alpha_1 x + \ldots + \alpha_r x^r)^{p-1} + \ldots = xU.$$

Dans le premier membre les termes sont en nombre fini, et, à l'exception du premier, le terme pV, s'annulent tous pour $x = 0$; d'ailleurs, U est une fonction entière de x; on a donc

$$\text{Lim } V = 0, \text{ pour } x = 0.$$

396. Remarque. Dans la formule (L'), les trois premiers coefficients A, B, C, ceux dont on a le plus ordinairement besoin dans la pratique, sont d'après (L), donnés par les formules :

$$A = \frac{\alpha}{p}, \qquad B = \frac{1}{p}\left[\beta + \alpha^2\left(\frac{1}{p} - 1\right)\right],$$

$$C = \frac{1}{p}\left\{\gamma + \left(\frac{1}{p} - 1\right) 2\alpha\beta + \left(\frac{1}{p} - 1\right)\left(\frac{1}{p} - 2\right)\alpha^3\right\}.$$

397. Application. *On propose de discuter, autour de l'origine, la forme de la courbe qui correspond à l'équation :*

$$(1)\quad y = \sqrt[3]{1+ax} - \sqrt[5]{1+bx}.$$

La variable y a une valeur bien déterminée, quel que soit x. Pour $x = 0$, on trouve $y = 0$; un bras de la courbe passe donc par l'origine, et nous nous proposons d'étudier sa situation.

D'après ce que nous venons de voir, nous pouvons poser :

$$(1+ax)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{a}{3}x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\frac{a^2x^2}{2} \varepsilon x^2,$$

et,

$$(1+bx)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{b}{5}x + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\frac{b^2x^2}{2} + \varepsilon' x^2.$$

Nous avons donc

$$(1') \quad y=\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{5}\right)x+x^2\left\{\frac{2}{25}\beta^2-\frac{1}{9}\alpha^2+\varepsilon+\varepsilon'\right\}.$$

Nous distinguerons trois cas suivant que l'on suppose :

$$\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{5}>0, \quad \frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{5}<0, \quad \frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{5}=0.$$

Dans la première comme dans la deuxième hypothèse, la droite Δ qui correspond à l'équation

$$Y=\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{5}\right)x,$$

est tangente à la courbe, à l'origine, et la courbe considérée est située au-dessus ou au-dessous de sa tangente suivant le signe de la quantité u,

$$u=\frac{2\beta^2}{25}-\frac{\alpha^2}{9}.$$

Nous examinerons, tout à l'heure, le cas particulier où u est nul. Mais, auparavant, nous ferons encore remarquer que si $\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{5}$, l'équation (1') prouve que l'axe des x est tangente à la courbe et que celle-ci est placée au-dessus de ox, ou au-dessous de cette droite, suivant que u est positif ou négatif. Pour que cette dernière conclusion soit rigoureuse, il faut pourtant observer que l'on ne peut pas avoir, simultanément, $\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{5}$ et $u=0$.

Enfin, si l'on suppose $u=0$, en prenant dans les développements de $(1+\alpha x)^{\frac{1}{3}}$ et de $(1+\beta x)^{\frac{1}{5}}$ un terme de plus, on voit que la différence $Y-y$ change de signe avec x ; la droite Δ traverse la courbe, c'est une tangente inflexionnelle.

398. Courbes transcendantes. On désigne ainsi celles qui correspondent à des équations renfermant les trans-

cendantes, e^x, sin x, tg x, etc.... Les principes que nous avons indiqués pour la construction des courbes, notamment ceux qui sont relatifs à la tangente (§ 97) et aux asymptotes (§ 147), s'appliquent, en général, aux courbes transcendantes. Ces courbes offrent assez souvent des particularités que nous n'avons pas rencontrées dans les courbes algébriques. Telles sont, pour citer les plus saillantes, 1° le point d'arrêt, 2° le point anguleux, 3° un seul bras asymptote à une droite (point d'arrêt à l'infini), 4° une infinité de points sur une droite, etc...

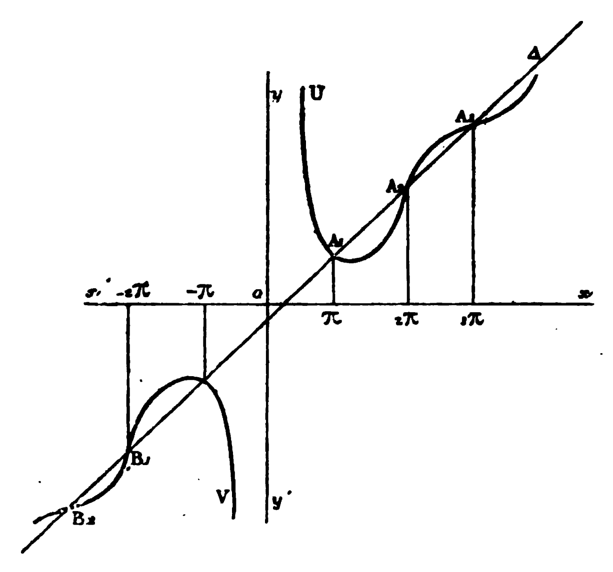


Fig. 161.

Soit, par exemple, l'équation

$$(1) \quad y = ax + b + \frac{\sin x}{x^2}.$$

En cherchant 1° la limite de $\frac{y}{x}$, 2° celle de $y - cx$, (pour $x = \infty$) ; on voit que la droite Δ qui correspond à l'équation

$$(\Delta) \quad Y = ax + b,$$

est une asymptote de la courbe. On reconnaît aussi, comme nous l'avons déjà vu (p. 199), que l'axe oy est une seconde asymptote, parce que, pour $x = 0$, on a

$$\text{Lim}\,\frac{\sin x}{x^2} = \text{Lim}\,\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x} = \infty, \text{ (pour } x = 0).$$

Les points de rencontre de la courbe avec Δ ont pour abcisses, π, 2π, 3π, ... ; $-\pi$, -2π, etc.... La courbe qui correspond à l'équation (1) a donc la forme indiquée par la figure ; elle se compose de deux branches U et V coupant l'asymptote Δ, en un nombre infini de points $A_1, A_2, \ldots; B_1, B_2, \ldots$

Nous n'insisterons pas davantage sur la construction des courbes ; mais nous donnerons quelques théorèmes généraux qui permettent, à l'occasion, de reconnaître que la courbe qui correspond à une équation donnée est une strophoïde, une cissoïde, ou une lemniscate.

399. Théorème. *Lorsqu'une cubique passe par les ombilics du plan, si elle admet un nœud avec des tangentes rectangulaires, cette courbe est une strophoïde (droite ou oblique).*

L'équation de la cubique proposée, en prenant pour axes les tangentes au nœud, peut s'écrire

$$\text{(S)} \quad (x^2 + y^2)(mx + ny) = xy,$$

et il faut démontrer que la courbe correspondante est une strophoïde.

A cet effet, reportons-nous à la génération que nous avons donnée de la strophoïde (§ 23).

Si nous prenons pour axe les droites OP, OQ (fig. 14) et si, dans ce système, nous appelons x et y les coordonnées du point I ; les notations qu'indique la figure étant maintenues, nous obtenons :

$$(1) \quad x = \rho \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \omega\right),$$

$$(2) \quad y = \rho \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \omega\right).$$

Nous avons aussi, d'après le triangle OAI qui est égal à OCD,

$$(3)\quad \rho = R\frac{\sin(\alpha - 2\omega)}{\sin(\alpha - \omega)}.$$

Les égalités (1) et (2) donnent, d'abord,

$$(4)\quad 2xy = \rho^2 \sin(\alpha - 2\omega),$$

puis en les multipliant, respectivement, par $\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\sin\frac{\alpha}{2}$,

$$(5)\quad x\cos\frac{\alpha}{2} + y\sin\frac{\alpha}{2} = \rho\sin(\alpha - \omega).$$

Une combinaison évidente des relations (3), (4), et (5), donne

$$(S')\quad 2Rxy = (x^2 + y^2)\left(y\cos\frac{\alpha}{2} + y\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Cette remarque étant faite, nous voyons qu'en posant

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2R} = m, \qquad \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2R} = n;$$

ormules qui donnent

$$\operatorname{Tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{n}{m}, \qquad R^2 = \frac{1}{4(m^2 + n^2)};$$

les équations (S) et (S′) sont identiques. Les valeurs de R et de α sont réelles, bien déterminées, et la proposition énoncée se trouve ainsi établie.

La strophoïde est droite, ou oblique, suivant que $(m - n)$ est égal à zéro, ou diffèrent de zéro.

400. Théorème. *Lorsqu'une cubique passe par les ombilics du plan, si elle admet un point de rebroussement, cette courbe est une cissoïde (droite ou oblique).*

D'après l'hypothèse que nous venons de faire, en prenant pour axe des x la tangente de rebroussement et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite, au point de rebroussement, l'équation de la cubique proposée est

$$(C)\quad (x^2+y^2)(mx+ny)=y^2.$$

En adoptant la génération précédemment indiquée (§ 20) pour la cissoïde, et en prenant : 1° pour axe des x, la droite AB (fig. 10), 2° pour axe des y, une perpendiculaire à AB, au point A ; nous avons :

$$x=\rho\cos\omega,\quad y=\rho\sin\omega,\quad \text{et}\quad \rho=d\frac{\sin^2\omega}{\cos(\alpha-\omega)}.$$

L'équation cartésienne de la cissoïde est donc

$$(C')\quad (x^2+y^2)(x\cos\alpha+y\sin\alpha)=dy^2.$$

On peut identifier les équations (C) et (C'), et la propriété énoncée se trouve ainsi démontrée.

401. Théorème. *Lorsqu'une quartique U passe doublement par les ombilics du plan, si elle a, en outre, un nœud à tangentes rectangulaires et si ce point est le centre de cette courbe, celle-ci est une lemniscate de Bernoulli.*

Prenons pour la génération de la lemniscate, point par point, celle que nous avons indiquée plus haut (§ 29), et cherchons l'équation de la courbe rapportée aux tangentes au point double (fig. 25).

Les notations du paragraphe cité étant conservées ; on trouve :

$$x=\rho\cos\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right),$$
$$y=\rho\sin\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)$$

et, par suite,

$$2xy=\rho^2\sin\left(2\omega+\frac{\pi}{2}\right)=\rho^2\cos 2\omega.$$

D'autre part, on a

$$\rho^2 = 2c^2 \cos 2\omega$$

et, par conséquent,

$$(L) \quad 4c^2xy = (x^2 + y^2)^2 .$$

D'ailleurs, l'hypothèse que nous avons faite sur la quartique U prouve que l'équation de celle-ci, en prenant pour axes les tangentes au nœud, est

$$(L') \quad m^2xy = (x^2 + y^2)^2 .$$

Les deux équations (L), (L'), peuvent être identifiées ; la proposition est donc démontrée.

402. Enfin voici, pour compléter cette leçon, quelques dénominations ([1]) qu'il est bon de connaître et qui peuvent être utilement employées pour exprimer les formes diverses, les plus communes, affectées par les branches des différentes courbes.

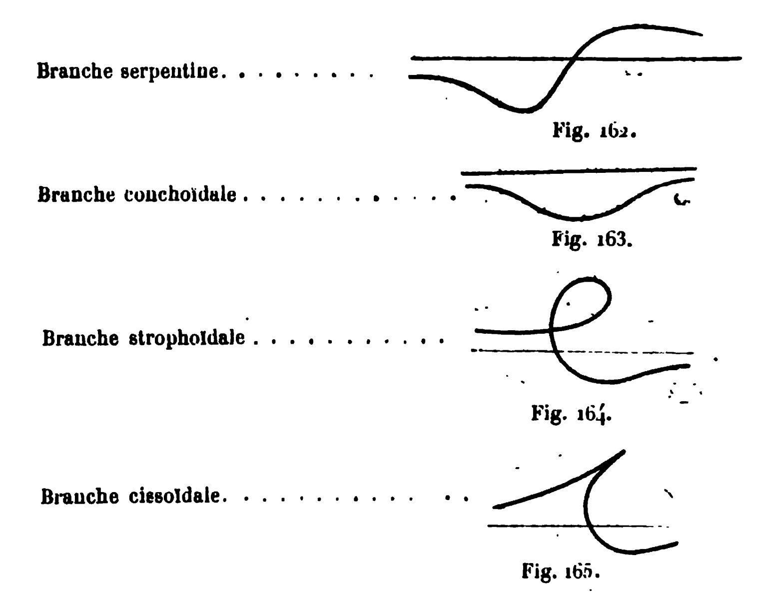


Fig. 162.
Fig. 163.
Fig. 164.
Fig. 165.

1. La plupart de ces expressions sont dues à Newton.

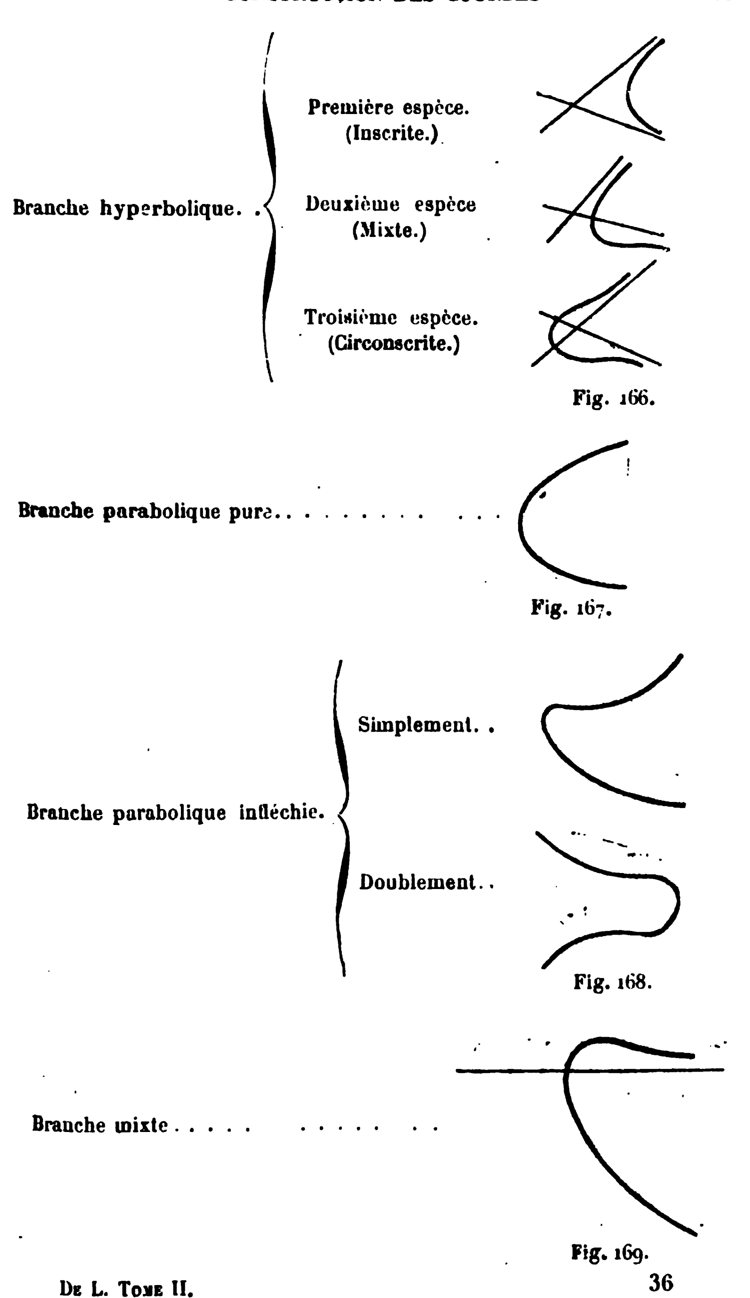


Fig. 166.

Fig. 167.

Fig. 168.

Fig. 169.

Branche hyperbolique aplatie. Premier genre. . Deuxième genre .

Fig. 170.

Ovale. . . . .

Fig. 171.

Folium. . . . .

Fig. 172.

EXERCICES (1)

1. *On considère deux axes rectangulaires, ox, oy; et sur ces droites deux points mobiles* P *et* Q, *tels que l'on ait:* $OP + OQ = A$; *démontrer que le lieu décrit par la projection du point* O *sur* PQ *est une strophoïde.*

2. *Deux points mobiles* P *et* Q, *sur deux axes rectangulaires* ox, oy, *sont tels que l'on ait ;* $\overline{OP}^2 = a \, . \, OQ$; *démontrer que le lieu décrit par la projection du point* O *sur* PQ, *est une cissoïde.*

3. *Une droite* PQ *détermine avec deux axes fixes, rectangulaires, un triangle* OPQ *de surface constante ; démontrer que le lieu décrit par la projection du point* O *sur* PQ *est une lemniscate.*

4. *On donne deux droites rectangulaires ox, oy, et un point fixe* A; *par les points* O *et* A *on fait passer une infinité de cercles; soit* Δ *l'un d'entre eux et soient* P *et* Q *les points communs à* Δ *et aux axes. Démontrer que le lieu des projections de* O *sur* PQ *est une strophoïde.*

1. La plupart de ces exercices ont été choisis de façon à faire connaître quelques-unes des formes les plus importantes des courbes du troisième ordre. Les formes diverses des cubiques et les variétés qu'elles comportent ont été distinguées par Newton, puis par Plücker. Leur nombre est très considérable. Plücker, dont la classification paraît complète, a trouvé 200 formes diverses de cubiques.

5. *On considère un cercle* Δ *et sur ce cercle un point fixe* O. *Soit* BC *une corde fixe parallèle au diamètre qui passe par le point* O. *Par* O *on mène une transversale mobile qui rencontre* BC *en* D *et le cercle* Δ *en* A; *puis, par* A, *on mène une parallèle et, par* D, *une perpendiculaire à* BC. *Ces droites se coupent en un point* I *dont on demande le lieu géométrique.*

L'origine étant O, l'axe ox étant parallèle à BC, et les axes étant rectangulaires, on trouve :

$$(1) \quad y = \frac{dd'x}{d^2 + x^2};$$

d' désigne le diamètre du cercle et d la distance de O à la corde BC.

La cubique (1) a pour centre l'origine ; elle a la forme d'une branche serpentine.

6. *On imagine des coniques circonscrites à un rectangle et on leur mène des tangentes parallèles à une direction fixe* Δ; *trouver le lieu des points de contact.*

L'origine étant au centre du rectangle, les axes étant parallèles à ses côtés, on trouve :

$$x(y^2 - b^2) - my(x^2 - a^2) = 0.$$

m est le coefficient angulaire de Δ, $2a$ et $2b$ désignent les longueurs des côtés du rectangle. La cubique est formée d'une branche serpentine passant par l'origine qui est le centre de la courbe. Elle passe par les sommets du rectangle et, en ces points, la tangente est parallèle à Δ. Les asymptotes (§ 155) correspondent aux équations :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y = mx.$$

On distinguera le cas où $m = \frac{b}{a}$ et on pourra généraliser cet exercice en remplaçant le rectangle par un quadrilatère quelconque. En désignant par :

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0;$$

les équations des côtés du quadrilatère, l'équation du lieu, a la forme :

$$\frac{\alpha}{P} + \frac{\beta}{Q} + \frac{\gamma}{R} + \frac{\delta}{S} = 0.$$

7. *On considère des coniques inscrites à l'angle droit yox et qui sont telles : 1° que le diamètre conjugué des cordes parallèles à ox coupe oy en un point fixe* B, (OB $= b$); *2° que le diamètre conjugué des cordes parallèles à oy coupe ox en un point fixe* A, (OA $= a$); *trouver le lieu des extrémités des diamètres conjugués de la direction* AB.

On trouve l'équation

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)+\frac{4xy}{ab}\left(2-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0.$$

La courbe correspondante est formé de deux branches mixtes se coupant à l'origine.

L'asymptote Δ a pour équation

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-2=0.$$

La courbe a une inflexion à l'infini et les points de cette courbe qui sont situés entre Δ et la parallèle AB proviennent des hyperboles du réseau des coniques considérées.

8. *On considère une corde* AB *d'une parabole rapportée à ses axes, et l'on suppose que les tangentes aux extrémités de cette corde rencontrent la tangente au sommet en des points distants l'un de l'autre, d'une longueur constante et égale à* l. *Trouver le lieu décrit par le pôle normal de cette corde.*

On trouve pour l'équation du lieu :

$$y^2=\frac{8}{27p}\left(x-p-\frac{l^2}{2p}\right)\left(x-p-2\frac{l^2}{p}\right)^2.$$

La courbe est formée d'une branche parabolique avec un folium ; sa rencontre avec la parabole donnée a lieu sur la droite qui correspond à l'équation :

$$x=3p+\frac{2l^2}{p}.$$

9. *Autour du sommet* O *d'une parabole* P, *on fait tourner un angle droit* AOB*; trouver le lieu décrit par le point de rencontre de la corde* AB, *avec la bissectrice de l'angle* AOB.

La courbe est une cubique ayant la forme d'une branche strophoïdale ; elle correspond à l'équation

$$y^2=x^2\frac{2p-x}{3x+2p}.$$

10. *On considère deux coniques* U, V *homothétiques, tangentes à ox à l'origine, et des coniques doublement tangentes à chacune d'elles. Par un point* P *de ox, on leur mène des tangentes. Lieu des points de contact* (OP $=$ d).

(Concours académique de Poitiers — 1877)

Soient $S=0$, $S'=0$, les équations des deux coniques U, V. L'équation générale des coniques doublement tangentes à U et à V est

$$Q^2-2\mu(S+\lambda S')+\mu^2P^2=0.$$

Dans cette équation λ est une des racines de l'équation en λ qui correspond aux coniques proposées ; μ est un parallèle variable et l'on suppose que l'on a

$$PQ \equiv S - \lambda S',$$

En prenant pour axe des y le diamètre des coniques U et V qui est conjugué de ox, on a

$$S \equiv x^2 + Ay^2 + 2cy$$
$$S' \equiv x^2 + Ay^2 + 2c'y.$$

L'équation en λ donne une racine simple, $\lambda' = 1$; et une racine double, $\lambda'' = \frac{c}{c'}$.

1re Hypothèse ($\lambda = 1$). L'équation du lieu est :

$$(x^2 + Ay^2) \left\{ 2dx + (c + c')y \right\} = 2(d^2x^2 - cc'y^2).$$

1e *cas*. $A > 0$. Cette cubique admet deux formes différentes ; si ox laisse les ellipses S, S', du même côté, on a une cubique ayant la forme d'une branche strophoïdale.

Si, au contraire, les deux ellipses sont placées de cotés différents, par rapport à ox on a une cubique formée d'une branche conchoïdale ; l'origine étant au point double isolé.

2e *cas*. $A < 0$. Les trois asymptotes sont réelles. Il y a trois branches hyperboliques, dont l'une présente un nœud quand on suppose $cc' > 0$.

2e hypothèse $\left(\lambda = \frac{c}{c'}\right)$. On trouve une conique qu est homothétique aux proposées.

11. *On considère une parabole* P *et un diamètre* Δ *de cette courbe ; soit* A *un point mobile sur* P *: la normale à* P, *en* A, *rencontre* Δ *au point* B *; trouver le lieu décrit par le milieu de* AB.

L'équation du lieu, les axes de coordonnées étant ceux de la parabole, est

$$x = \frac{(2y - h)^3 - 2p^2(h - y)}{2p\,(2y - h)}$$

h désignant la distance de l'axe à Δ. La cubique qui correspond à cette équation est formée de deux branches mixtes dont l'ensemble constitue cette forme à laquelle on a donné, quelquefois, le nom de *trident*.

12. *Appelons* **puissance** *d'un point* M *par rapport à un triangle* ABC, *le produit des perpendiculaires abaissées de* M *sur ses côtés; on demande le lieu des points d'égale puissance.*

Ce lieu est une cubique U qui affecte différentes formes suivant la valeur choisie pour la puissance.

Les trois côtés du triangle sont des asymptotes de U ; et les médianes de ce triangle sont les diamètres des cordes parallèles à ses cotés. On explique facilement ce fait remarquable par des considérations géométriques.

13. *On donne deux droites rectangulaires ox, oy; sur ox deux points fixes* A, A',

$$OA = OA' = a\,;$$

par ces points A, A' *on fait passer un cercle* Δ *et l'on mène à ce cercle les tangentes* AR, A'R*; enfin on joint le point* R *à un point fixe* P (α, β). *Trouver le lieu des points communs à* Δ *et à* PR.

Le lieu est la cubique U qui correspond à l'équation

$$(x^2 + y^2 - a^2)(\alpha y - \beta x) = 2a^2 y\,(x - \alpha).$$

L'asymptote a pour équation

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{2a^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

La courbe a la forme d'une branche serpentine. Elle présente une inflexion à l'infini et, par conséquent, prend la forme conchoïdale, quand le point P est situé sur la lemniscate qui correspond à l'équation

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\omega.$$

14. *On considère deux diamètres conjugués fixes* OA, OB, *d'une ellipse* Γ*: par les extrémités* A, B *on mène deux cordes parallèles* AA', BB'*; trouver le lieu décrit par le point de concours des droites* BB' *et* OA'*.*

Le lieu est une cubique formée d'une branche strophoïdale ; en posant $oA = a'$, $oB = b'$, et en prenant oA et oB, pour axes de coordonnées, elle a pour équation

$$\frac{b'^2 x^2}{a'^2} = \frac{y\,(y - b')^2}{2b' - y}.$$

15. *On considère deux droites rectangulaires ox, oy; et, sur ox deux points fixes* A, A',

$$OA = OA' = a\,;$$

par les points A, A' *on fait passer des coniques* Γ, *homothétiques à une conique fixe ayant pour équation*

$$x^2 + 2B''xy + A'y^2 + \ldots = 0.$$

Du point* O, *on abaisse des normales sur* Γ, *trouver le lieu décrit par le pied de ces normales.

On trouve pour le lieu cherché, l'équation

$$2B''y^3 + (2 - A')xy^2 + x^3 - a^2x = 0.$$

En posant

$$u = B^2 + \left(\frac{2 - A'}{3}\right)^3,$$

on reconnait qu'à cette équation correspondent trois formes de cubiques suivant le signe de u.

1° *Si u est positif*, la courbe est formée d'une branche serpentine ;

2° *Si u est négatif*, on trouve une branche serpentine et deux branches hyperboliques inscrites ;

3° Enfin, *si l'on a* $u = 0$, la courbe est constituée par deux branches hyperboliques inscrites et une branche hyperbolique aplatie, du second genre.

16. *Construire les cubiques qui correspondent aux équations suivantes :*

$$y^3 + x^3 - y^2 + x = 0. \qquad \text{(Branche serpentine)}$$

$$(y-1)^2(2y+1-x) = h^2(1-x)$$

- $h < 1$: Une branche hyperbolique inscrite. — circonscrite. — aplatie du premier genre.
- $h = 1$: L'axe des x et une hyperbole.
- $h > 1$: Deux branches hyperboliques inscrites. Une branche hyperbolique aplatie du second genre.

$$hy^2 = 2(x-1)^2(h-2x)$$

- $h < 0$ Branche parabolique avec un folium.
- $h > 0$ Branche parabolique avec un point double isolé.
- $h = 2$ Branche parabolique avec un rebroussement de première espèce.

$$y^3 - 4xy^2 + y^2 - x^2 = 0$$

Deux branches mixtes asymptotes à la droite $\left(y - 4x + \frac{15}{16} = 0\right)$.

17. *Construire les quartiques qui correspondent aux équations suivantes :*

1° $$x^4 + y^4 - x^2 - 2y^3 = 0.$$
2° $$y^4 - x^4 + 2ly^3 = 0.$$
3° $$x^4 + x^2y^2 - 18x^2y + 9y^2 = 0.$$
4° $$x^4 + y^4 - x^2y = 0.$$
5° $$y^4 + 24y^2 + 25x^2 - x^4 = 0.$$
6° $$y^4 + x^3 - x = 0.$$
7° $$x^4 - 4x^2y^2 + y^2 = 0.$$

1° La courbe a la forme d'une ovale ; on étudiera avec soin sa sinuosité ; elle est renfermée entre les tangentes parallèles à oy dont les points de contact ont pour ordonnée $\frac{3}{2}$ et entre les tangentes parallèles à ox dont les points de contact ont pour abcisse $\frac{3}{4}$. Il y a une inflexion aux points de rencontre de la courbe avec les axes ;

2° La courbe est formée de deux branches hyperboliques inscrites dans l'angle formé par les droites qui correspondent aux équations :

$$y + x + \frac{l}{2} = 0, \quad y - x + \frac{l}{2} = 0 ;$$

3° La forme de la courbe est celle d'un double folium présentant à l'origine un point d'embrassement ;

4° C'est encore un double folium, l'origine est un point triple ;

5° Cette quartique est formée de deux branches hyperboliques asymptotes aux bissectrices des axes ;

6° On trouve un ovale et une branche parabolique pure ;

7° La courbe est composée de quatre branches hyperboliques de première espèce. — Pour préciser leur tracé on déterminera le cercle qui a son centre à l'origine et qui est tangent à ces quatre branches.

18. *On donne une ellipse fixe* Γ, *soit* O *le centre de* Γ *et soit* MM′ *une corde principale mobile perpendiculaire au grand axe. Par les points* M, M′ *on fait passer une parabole* P *ayant son sommet en O, et l'on trace une tangente commune* Δ, *aux courbes* Γ *et* P ; *trouver le lieu des points de contact de* P *et de* Δ.

Le lieu cherché est la quartique qui correspond à l'équation

$$x^2y^2 = a^2y^2 + 4b^2x^2.$$

19. *Construire la courbe qui correspond à l'équation*

$$y^2 - 2x^2y + x^5 = 0.$$

Cette courbe est formée d'un folium à bras paraboliques et l'origine est un

point double présentant cette particularité que, des deux branches qui passent par ce point, et qui sont mutuellement tangentes, une d'elles présente une inflexion.

20. *Construire la quartique qui correspond à l'équation*

$$y^2 = \frac{4a^2x^2 + b^2(x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Pour faciliter la discussion, on résout cette équation par rapport à x^2.

21. *On demande de construire la courbe* U *qui correspond à l'équation*

$$y^2 = \frac{1}{x(x + \alpha)(x + \beta)(x + \alpha + \beta) + \gamma},$$

et de distinguer les différentes formes que peut affecter U.

On observe d'abord que l'on a

$$x(x + \alpha)(x + \beta)(x + \alpha + \beta) + \frac{\alpha^2\beta^2}{4} = \left\{x^2 + x(\alpha + \beta) + \frac{\alpha\beta}{2}\right\}^2$$

Trois cas doivent être distingués suivant que la quantité $\left(\gamma + \frac{\alpha^2\beta^2}{4}\right)$ est positive, nulle ou négative.

1° Dans le premier cas, on étudiera la sinuosité de la courbe en remarquant que l'équation $y' = 0$, revient à celle-ci :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + \alpha} + \frac{1}{x + \beta} + \frac{1}{x + \alpha + \beta} = 0.$$

Dont les trois racines sont :

$$x' = -\frac{\alpha + \beta}{2}, \quad x'' = -\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad x''' = -\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

2° Si l'on a $\gamma = \frac{\alpha^2\beta^2}{4}$ la courbe est formée de deux cubiques symétriques par rapport à ox. L'une de ces cubiques est formée de deux branches hyperboliques simples et d'une troisième branche hyperbolique, aplatie, du premier genre.

3° Enfin si γ est plus petit que $\frac{\alpha^2\beta^2}{4}$, on trouvera encore à distinguer des formes diverses de courbes suivant que

$$\gamma + \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}\right)^2$$

est positif, nul, ou négatif.

22. *On considère la sinusoïde, courbe qui correspond à l'équation*

$$y = \sin x.$$

On propose de transformer cette équation au moyen des formules

$$y = Y, \quad xX = 1,$$

et de déduire, de la forme connue de la sinusoïde, celle de la courbe transformée, U.

A chaque spire de la sinusoïde correspond une spire de U, en considérant les spires de la sinusoïde qui s'éloignent de plus en plus on a, dans U, des spires correspondantes qui se rapprochent de plus en plus de l'axe *oy*.

On remarque aussi que la construction très simple de la tangente en un point de la sinusoïde entraîne la connaissance de la tangente, au point correspondant de U. (Lec. 16 ; ex. 1.)

23. *Étudier, dans le voisinage de l'origine, la courbe qui a pour équation*

$$y = \sqrt[m]{1 + x} - 1 - ax^2.$$

24. *Construire la courbe qui correspond à l'équation*

$$y = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt[4]{x^4 - 1}$$

et vérifier qu'elle a quatre points doubles isolés ayant pour coordonnées

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} \quad y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

TRENTE-NEUVIÈME LEÇON

LES UNICURSALES

403. Définition du genre. Nous avons dit (Leç. 16, ex. 2), mais nous rappelons ici, que le *genre* [1] d'une courbe est le nombre qui exprime la différence entre le nombre maximum de points doubles qu'elle peut avoir, son ordre étant donné, et le nombre de ces points doubles qu'elle possède effectivement.

404. Théorème. *Lorsqu'une courbe* F *du degré* p *est du genre zéro, les coordonnées de l'un quelconque de ses points peuvent s'exprimer par les formules*

$$x = \frac{U}{W}, \quad y = \frac{V}{W};$$

U, V, W *désignant des fonctions entières, par rapport à un paramètre variable* t, *et tout au plus du degré* p. *Ces courbes sont dites* **unicursales.**

La courbe proposée F admet $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ points doubles A; prenons, sur F, $(p-3)$ autres points A.

Le nombre total des points A et B est donc

$$\frac{1}{2}(p-1)(p-2) + p - 3,$$

1. Les Anglais emploient le terme préférable *deficiency* (V. Salmon, *higher plane curves;* troisième édition, p. 30). La démonstration du théorème suivant est tirée du livre cité; nous l'avons seulement développée pour en rendre la lecture plus courante.

ou,

$$\frac{1}{2}(p-1)(p-2)+(p-2)-1,$$

ou, encore,

$$(1)\quad \frac{1}{2}(p+1)(p-2)-1.$$

D'ailleurs (Leç. 15, ex. 1) une courbe de l'ordre m, a, dans son équation générale, un nombre de paramètres arbitraires égal à

$$\frac{m(m+3)}{2}.$$

D'après cette remarque, et d'après (1), par les points A, B, et par un point arbitraire du plan, on peut faire passer une courbe Φ de l'ordre $p-2$; et on n'en peut faire passer qu'une.

Cherchons combien les courbes F et Φ possèdent de points communs, en dehors des points A et B, que nous supposons fixes.

La courbe F est du degré p, Φ est du degré $(p-2)$; elles ont donc, tout au plus, $p(p-2)$ points communs.

Mais il y a $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ points A, et chacun de ces points étant double, on peut dire que F et Φ ont $(p-1)(p-2)$ points communs confondus avec ces points A. Ajoutons-y les $(p-3)$ points B et nous trouvons, pour les points fixes, un nombre total de points communs dont le nombre est

$$(p-1)(p-2)+p-3,$$

ou,

$$p(p-2)-1.$$

Ainsi, les courbes F et Φ ne peuvent avoir, en dehors des points fixes A et B, qu'*un seul point commun* M.

Les courbes Φ forment un réseau; mais si l'on observe que *par un point donné passe une seule courbe de ce réseau*, on

voit que l'équation générale de ces courbes admet des coefficients variables, dans lesquels n'entre qu'une variable t, *au premier degré*. Les coordonnées x_0, y_0, du point M, vérifient donc les deux équations :

$$(F) \quad f(x,y) = 0,$$
$$(\Phi) \quad \varphi(x,y) = 0.$$

L'équation $f = 0$ est du degré p ; si on élimine y entre ces deux équations, le résultant est du degré p par rapport aux coefficients de φ ; ce résultant $R(x) = Ax^h + \ldots = 0$, est donc du degré p, par rapport à t. Mais toutes les racines de cette équation sont connues et l'on peut écrire

$$x - x_0 = \frac{R(x)}{A.S(x)},$$

$S(x)$ représentant le produit

$$(x - \alpha)^2 (x - \alpha')^2 \ldots \ (x - \beta)(x - \beta') \ldots ;$$

expression dans laquelle $\alpha, \alpha', \ldots$; désignent les abcisses des points A : $\beta, \beta', \ldots$; celles des points B. L'identité précédente prouve que x_0 est donné par la formule

$$x_0 = -\frac{R(0)}{A.S(0)}.$$

Dans cette égalité, $R(0)$ et A sont, en général, du degré p, par rapport à t, et, dans tous les cas, ne sont pas d'un degré supérieur ; $S(0)$ est une constante indépendante de t.

405. Théorème. *Lorsque les coordonnées x, y, d'un point* M *vérifient constamment les relations*

$$\frac{x}{U} = \frac{y}{V} = \frac{z}{W},$$

U, V, W *désignant des fonctions entières de t du degré p, du moins pour celle qui est de l'ordre le plus élevé ; si* U, V *et* W *ne sont pas divisibles, simultanément, par un facteur commun, fonction de t ; on peut dire que le lieu décrit par* M *est une courbe* F, *du degré p.*

Prenons en effet une droite quelconque Δ, dans le plan de F et soit

$$ax + by + cz = 0,$$

l'équation de cette droite. Pour déterminer les points communs à F et à Δ, nous devons, d'abord, résoudre l'équation en t:

$$aU + bV + cW = 0,$$

laquelle est du degré p et n'est pas décomposable, quels que soient a, b, c, en facteurs rationnels, si, comme nous le supposons, U, V, W n'admettent pas de diviseur commun. Elle a donc t racines $t_1, t_2, \dots t_p$, à chacune desquelles correspond un point commun à F et à Δ. Cette remarque établit que l'ordre de F est égal à p.

406. Théorème. *Si une courbe unicursale correspond aux formules suivantes:*

$$\text{(A)} \quad \frac{x}{f(t)} = \frac{y}{\varphi(t)} = \frac{z}{\psi(t)},$$

le coefficient angulaire m_t de la tangente au point M qui correspond à la valeur t, du paramètre variable, est donné par l'égalité

$$\text{(B)} \quad m_t = \frac{\varphi'\psi - \psi'\varphi}{f'\psi - \psi'f}.$$

On a, en effet,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};$$

et, d'autre part,

$$y'_t = \frac{\varphi'\psi - \psi'\varphi}{\psi^2}$$

$$x'_t = \frac{f'\psi - \psi'f}{\psi^2}$$

En divisant ces deux égalités, membre à membre, la formule annoncée se trouve établie.

407. Théorème. *La classe d'une unicursale du degré p est égale à $(2p-2)$, tout au plus.*

Cherchons combien l'on peut mener de tangentes, parallèles à une direction donnée, à une unicursale de l'ordre p.

L'égalité (B) est, tout au plus, du degré $2p-2$, par rapport à t. Prenons, par exemple, le numérateur $\varphi'\psi-\psi'\varphi$: cette expression est, en apparence, du degré $2p-1$; mais il faut observer que dans $\varphi'\psi$ et $\psi'\varphi$, pour des raisons évidentes, le terme du degré le plus élevé disparait nécessairement. Cette remarque s'applique au dénominateur $f'\psi-\psi'f$. Ainsi le nombre des tangentes parallèles à une direction quelconque est tout au plus égal à $2p-2$; ce dernier nombre exprime donc la classe de la courbe, à moins que cette classe ne soit inférieure à $2p-2$.

408. Corollaire. *Les cubiques à point double sont, tout au plus, de la quatrième classe.*

409. Théorème. *Les coniques sont des unicursales.*

Ces courbes sont du genre zéro, elles sont donc unicursales. Mais nous voulons le vérifier directement et montrer comment on peut exprimer les coordonnées d'un point de la courbe, en fonction d'un paramètre variable t.

L'équation d'une conique peut toujours, par la méthode de décomposition en carrés, se mettre sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$P^2+Q^2=h^2, \quad \text{(Ellipse.)}$$
$$P^2-Q^2=H^2; \quad \text{(Hyperbole.)}$$
$$P^2=mQ; \quad \text{(Parabole.)}$$

P, Q, désignant des formes linéaires d'x et d'y; et h, H, m, représentant des constantes réelles.

En posant :

$$\left.\begin{array}{l} P = h\dfrac{2t}{t^2+1}, \\ Q = h\dfrac{t^2-1}{t^2+1}, \end{array}\right\} \text{(dans le premier cas)},$$

$$\frac{P+Q}{H} = \frac{H}{P-Q} = t \;\Big\}\; \text{(dans le deuxième cas)},$$

$$\left.\begin{array}{l} P = t \\ Q = \dfrac{t^2}{m} \end{array}\right\} \quad \text{(dans le troisième cas)};$$

l'expression des coordonnées x, y, d'un point mobile sur une conique, en fonction, d'un paramètre variable t, sera obtenue en résolvant les équations précédentes par rapport à x et à y.

410. Remarque relative aux cubiques unicursales. Lorsqu'une cubique admet un point double M (α, β) ; elle est unicursale. La réciproque est vraie; car, si la cubique déterminée par les formules (A), (§ 406), n'avait aucun point double, elle serait de la sixième classe.

En effet, la conique qui représente la dernière polaire d'un point P (x_0, y_0, z_0), passe par les points de contact des tangentes issues de P à la cubique (§ 123). Elle passe aussi par les points multiples de la courbe, car l'équation

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0$$

est vérifiée, quand il existe une solution commune aux équations

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0.$$

L'abaissement de la classe, de 6 à 4, ne peut donc se faire que si la cubique présente un point double.

Cette propriété est susceptible d'une généralisation sur laquelle nous n'insisterons pas ; nous voulons seulement

faire observer comment on calcule la fonction du paramètre variable t, les coordonnées d'un point mobile sur une cubique unicursale.

Transportons les axes, parallèlement à eux-mêmes, au point double ; la constante et les termes du premier degré disparaissent, et l'équation de la cubique prend la forme

$$\varphi_3 (XY) - \varphi_2 (X,Y) = 0.$$

En posant

$$Y = tX,$$

on a

$$X = \frac{\varphi_2 (1, t)}{\varphi_3 (1, t)},$$

et,

$$Y = \frac{t\varphi_2 (1, t)}{\varphi_3 (1, t)}.$$

411. Détermination des Asymptotes. Pour bien préciser cette détermination, nous devons faire remarquer que les formules les plus générales qui puissent définir une courbe unicursale F sont :

$$x = \frac{P}{Q}, \quad \text{et} \quad y = \frac{R}{S} ;$$

P et Q, d'une part ; R et S, d'autre part ; étant des polynômes entiers en t, premiers entre eux. Les formules que nous avons employées plus haut rentrent dans celles-ci, quand on réduit les fractions $\frac{P}{Q}, \frac{R}{S}$, au plus petit dénominateur commun D, et l'ordre de l'unicursale F est alors le degré le plus élevé des trois fonctions :

$$P \frac{D}{Q}, \quad R \frac{D}{S}, \text{ et } D.$$

Un point peut s'éloigner à l'infini, sur F, dans l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :

1° x devient infini, y restant fini,

2° y devient infini, x restant fini,

3° y et x deviennent, simultanément, infinis.

Désignons par Δ le plus grand commun diviseur des polynômes Q et S, et posons :

$$Q = Q'\Delta, \quad S = S'\Delta;$$

nous avons, alors,

$$D = S'Q'\Delta.$$

Les points qui s'éloignent à l'infini, dans la direction ox, sont ceux qui correspondent aux valeurs de t qui sont racines réelles de l'équation $Q' = 0$. De même, les racines réelles de l'équation $S' = 0$, donnent les asymptotes parallèles à oy. Enfin, une valeur de t, $(t = t')$ annulant Δ, donne une direction asymptotique qui, en général, n'est parallèle, ni à ox, ni à oy; et, pour la déterminer, il suffit de remarquer que l'on a

$$\frac{y}{x} = \frac{RQ'}{PS'}.$$

On cherche la valeur de $\frac{y}{x}$, pour $t = t'$; puis, en désignant cette valeur par μ, on détermine la valeur de $y - \mu x$, pour $t = t'$.

L'expression $y - \mu x$ se présente, ordinairement, sous la forme d'un rapport de deux fonctions entières de t, qui s'annulent évidemment pour $t = t'$; et, pour avoir la valeur de $y - \mu x$, on doit, d'abord, diviser haut et bas les deux termes du rapport par $(t - t')$.

Ajoutons enfin que, dans certains cas, un point de la courbe peut s'éloigner à l'infini quand t prend une valeur infinie. On devra donc examiner avec attention ces différentes hypothèses pour lesquelles un point d'une unicursale s'éloigne indéfiniment.

412. Détermination des points multiples. Pour que le mobile qui décrit l'unicursale et dont les coordonnées se calculent au moyen des formules :

$$\frac{x}{f(t)} = \frac{y}{\varphi(t)} = \frac{z}{\psi(t)}$$

formules dans lesquelles t désigne une variable indépendante prenant toutes les valeurs possibles entre $-\infty$ et $+\infty$, il est nécessaire et suffisant que pour des valeurs différentes de t et de θ, on puisse avoir :

$$\frac{f(t)}{f(\theta)} = \frac{\varphi(t)}{\varphi(\theta)} = \frac{\psi(t)}{\psi(\theta)}.$$

Ces équations débarrassées de la solution évidente $t = \theta$, donnent les valeurs cherchées.

413. Détermination des points d'inflexion. Soit :

$$ax + by + cz = 0,$$

l'équation de la tangente inflexionnelle Δ ; cette droite Δ doit avoir, avec l'unicursale considérée, des points communs parmi lesquels trois coïncident avec un certain point M. Si M est un point simple, Δ est une tangente inflexionnelle.

L'équation

$$af(t) + b\varphi(t) + c\psi(t) = 0,$$

a donc une racine triple. Cette équation, d'une part ; les suivantes, d'autre part,

$$af'(t) + b\varphi'(t) + c\psi'(t) = 0,$$
$$af''(t) + b\varphi''(t) + c\psi''(t) = 0,$$

déterminent les points d'inflexion et les tangentes inflexionnelles. On peut remarquer que les valeurs de t qui correspondent aux points d'inflexion sont racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} f(t) & \varphi(t) & \psi(t) \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ f''(t) & \varphi''(t) & \psi''(t) \end{vmatrix} = 0.$$

414. Application à un exemple. Proposons-nous de construire la cubique U qui correspond aux équations

$$(A) \quad x = \frac{t^2}{t^3 - 1}, \quad y = \frac{2t - 1}{t^3 - 1}.$$

Les valeurs remarquables de t, c'est-à-dire celles qui annulent, soit le numérateur, soit le dénominateur, de x ou de y, sont :

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_3 = 1.$$

1° *Asymptotes*. L'examen des formules (A) prouve qu'un point de U ne peut s'éloigner à l'infini que pour $t = 1$. On a, d'ailleurs,

$$\frac{y}{x} = \frac{2t - 1}{t^2}$$

Pour $t = 1$, on trouve que le coefficient angulaire de l'asymptote est égal à 1. Cherchons la limite de $y - x$, pour $t = 1$. Nous avons.

$$y - x = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^3 - 1} = \frac{t - 1}{t^2 + t + 1}.$$

Ainsi, pour $t = 1, y - x$ a pour valeur zéro; l'asymptote réelle de U est la première bissectrice.

2° *Points d'inflexion*. Soit

$$ax + by - 1 = 0,$$

l'équation d'une tangente inflexionnelle à U. On doit avoir :

$$at^2 + b(2t - 1) - t^3 + 1 = 0,$$
$$2at + 2b - 3t^2 = 0,$$
$$a - 3t = 0.$$

En éliminant a et b entre ces trois équations on trouve

$$2t^3 - 3t^2 - 2 = 0.$$

Cette équation admet pour t une seule racine réelle, comprise entre $\frac{3}{2}$ et 2.

3° *Points limites.* Cherchons les points où la tangente est parallèle : soit à ox, soit à oy.

Le coefficient angulaire y'_x, d'une tangente, est égal à

$$\frac{4t^3 - 3t^2 + 2}{t(t^3 + 2)}.$$

Il y a une tangente parallèle à oy ; 1° pour $t = 0$; 2° pour $t = \sqrt[3]{-2}$; et une tangente parallèle à ox ; 1° pour $t = \pm \infty$, 2° pour une valeur de t comprise entre $\sqrt[3]{-2}$ et 0.

4° *Point double.* Cherchons à résoudre les équations

$$\frac{t^2}{t^3 - 1} = \frac{\theta^2}{\theta^3 - 1}, \quad \frac{2t - 1}{t^3 - 1} = \frac{2\theta - 1}{\theta^3 - 1}.$$

La première donne, après simplification,

$$(1) \quad t^2\theta^2 + t + \theta = 0.$$

D'autre part, en considérant l'équation

$$\frac{t^2}{2t - 1} = \frac{\theta^2}{2\theta - 1},$$

on a, après avoir divisé par $t - \theta$,

$$(2) \quad 2t\theta = t + \theta.$$

Les équations (1) et (2) donnent :

$$t\theta = -2, \text{ et } t + \theta = -4.$$

Ainsi, t et θ sont racines de l'équation :

$$\tau^2 + 4\tau - 2 = 0.$$

Le point double correspond donc à la valeur $-2 - \sqrt{6}$, ou à la valeur $-2 + \sqrt{6}$, attribuée à t.

En résumant ces résultats divers, le tracé de la courbe U qui est une cubique à nœud, est conforme, dans son aspect général, à celui qu'indique la figure ci-dessous.

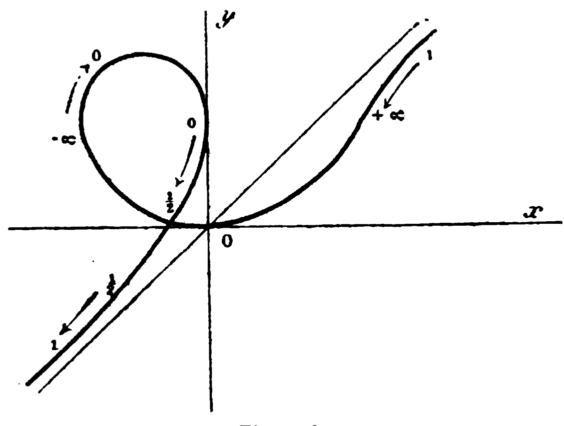


Fig. 173.

EXERCICES

1. *Répondre à l'objection suivante :*
On considère l'unicursale U *qui correspond aux formules :*

$$(\text{A}) \quad x = \frac{f(t)}{\psi(t)}, \quad y = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}$$

on change de variable, en posant :

$$t = \text{F}(\theta)$$

F *étant du degré* K, *par rapport à* θ. *Les formules* (A) *qui étaient du degré* p, *par rapport à* t, *deviennent du degré* Kp, *par rapport à* θ. *Le raisonnement qui a été fait* (§ 405) *pour établir le degré de l'unicursale indiquerait donc une courbe du degré* p, *et aussi une courbe du degré* Kp; *ce qui implique contradiction ?*

On montrera qu'en faisant varier θ, on tracera K fois la courbe U.

2. *Une conique γ étant considérée comme unicursale et correspondant aux formules :*

$$x = \frac{a + bt + ct^2}{\alpha + \beta t + \gamma t^2}, \quad y = \frac{a' + b't + c't^2}{\alpha + \beta t + \gamma t^2},$$

déterminer ses foyers.

1re *méthode*. On forme la quantité

$$(x - x')^2 + (y - y')^2$$

et on exprime que c'est un carré parfait. On obtient deux relations entre x' et y' et leur résolution conduit à une équation du quatrième degré. Mais on peut toujours résoudre cette équation parce que, comme nous l'avons montré, le problème en question est quadratique.

2e *méthode.* On prend l'équation

$$y = mx + n,$$

et on exprime que la droite qui lui correspond est tangente à γ. On considère alors un foyer comme un point tel que les coefficients anguluires des tangentes issues de ce point sont $+i$ et $-i$.

Application. Soit

$$x = \frac{t}{1 - t^2}, \quad y = \frac{t^2}{2 - t^2}.$$

On trouve :

1° foyers réels,

$$F_1 \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -\dfrac{1 + \sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad F_2 \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = -\dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$

2° foyers imaginaires.

$$F_3 \begin{cases} x_3 = \sqrt{-\dfrac{1}{2}} \\ y_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad F_4 \begin{cases} x_4 = -\sqrt{-\dfrac{1}{2}}. \\ y_4 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

3. *On donne une courbe* U, *dont l'équation, rapportée aux axes rectangulaires ox, oy, est :*

$$f(x, y) = 0.$$

Soit m un point mobile sur U; on joint OM et, à cette droite, au point m, on élève une perpendiculaire qui rencontre ox en A. On fait tourner la droite mA, autour de m, dans le sens direct jusqu'à ce qu'elle vienne se rabattre sur om; soit M la nouvelle position du point A.

1° Trouver l'équation de la courbe V, lieu des points M.

2° Appliquer les formules de transformation au cas particulier où U est une droite.

3° La transformée d'une droite étant une hyperbole, dont les asymptotes se déterminent facilement, déduire de cette remarque une construction simple de la tangente au point M, à la courbe transformée V.

4° Examiner le cas particulier où U est une hyperbole équilatère, ayant pour asymptotes ox et oy, et montrer que la transformée est une quartique unicursale.

5° Démontrer, d'une façon générale, que si U est une courbe unicursale, la transformée V est aussi une unicursale.

1° En désignant par x, y les coordonnées de m; par X, Y celles de M: on a :

$$\text{(A)} \quad x = \frac{X^2}{X+Y}, \quad y = \frac{XY}{X+Y};$$

et,

$$\text{(B)} \quad X = x + y, \quad Y = \frac{y(x+y)}{x}.$$

2° A la droite Δ qui a pour équation

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0,$$

correspond une hyperbole H′, dont l'équation est

$$x\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) = x + y.$$

3° L'équation précédente pouvant s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{x}{q} - 1\right)\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 + \frac{q}{p}\right) = 1 - \frac{q}{p},$$

les asymptotes sont mises ainsi en évidence.

A la tangente Δ en m, à U, correspond une hyperbole H, tangente à V, au point M. La tangente à V, en ce point, est donc confondue avec la tangente à H ; droite que l'on construit en menant par M une droite partagée en deux parties égales par ce point et par les asymptotes de H.

4° En prenant l'équation :

$$xy = m^2,$$

on trouve, pour la transformée,

$$(1) \quad X^2Y = m^2(X + Y)^2.$$

En posant :

$$m(X + Y) = tXY$$

on voit que la quartique (1) est unicursale.

5° Cette dernière proposition est la conséquence évidente des formules (B).

4. *Construire les unicursales qui correspondent aux formules :*

$$1^\circ \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{t}{1 - t} \\ y = \dfrac{t^3}{1 + t} \end{array} \right. \qquad 2^\circ \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{t}{1 - t^3} \\ y = \dfrac{1 + t^2}{1 - t^3} \end{array} \right.$$

La première courbe est une quartique formée de trois branches hyperboliques dont l'une est aplatie et du premier genre. Elle présente un point d'inflexion à l'origine et un point limite pour $t = -\frac{3}{2}$.

L'autre est une cubique, ayant un point double isolé, à l'infini, dans la direction de la seconde bissectrice ; elle a la forme d'une branche serpentine tangente à l'origine à l'axe des y et ayant pour asymptote la droite qui correspond à l'équation $y - 2x = 0$.

Les équations cartésiennes de ces courbes sont, respectivement,

$$y = \frac{x^3}{(x + 1)^2(2x + 1)}, \quad x = (y + x)(y - 2x)(y + x - 1)$$

5. *Construire la courbe qui correspond aux formules :*

$$x = \frac{t}{1 - t^2}, \quad y = t\,\frac{1 - 2t^2}{1 - t^2}$$

(École Polytechnique. 1878.)

Cette cubique est formée de trois branches hyperboliques dont l'une est une branche aplatie du second genre. Son équation cartésienne est :

$$x(y + x)^2 + 2(y - x) = 0.$$

Elle admet quatre points limites, points pour lesquels les tangentes sont parallèles à ox et les points de contact correspondent aux racines de l'équation

$$2t^4 - 5t^2 + 1 = 0.$$

Les asymptotes sont : 1° l'axe des y, 2° deux parallèles à la seconde bissectrice et coupant les axes à une distance $+2$, ou -2, de l'origine.

6. *Expliquer comment on peut reconnaître que, dans une unicursale, un point M, dont les coordonnées (x', y') correspondent à la valeur t' du paramètre variable, est un centre de la courbe.*

Vérifier : 1° que le point $(0, -1)$ est un centre de la cubique unicursale qui est définie par les formules :

$$x = \frac{t}{1+t^2}, \quad y = \frac{1-t}{t}.$$

2° Que le point $(0, +1)$ est le centre de la courbe qui correspond aux équations :

$$x = \frac{t}{1-t^2}, \quad y = \frac{1+t}{t}.$$

7. *Démontrer que si une courbe est définie par les formules :*

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

l'aire S du trapèze curviligne formé par un arc de la courbe, l'axe des x, et les deux ordonnées qui correspondent aux extrémités de l'arc considéré, vérifie la formule :

$$\frac{1}{\sin\theta} S'_t = \varphi(t)\, f'(t).$$

8. *Trouver l'aire d'un segment hyperbolique.*

On prend l'équation de l'hyperbole sous la forme

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

et on pose

$$\frac{x}{a'} = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}, \quad \frac{y}{b'} = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}.$$

En appliquant le principe de l'exercice précédent on trouve

$$\frac{1}{\sin\theta} S = \frac{a'b'}{4} \left\{ \frac{1}{2} e^{2\varphi} + \frac{1}{2} e^{-2\varphi} - 2\varphi - 1 \right\}.$$

QUARANTIÈME ET QUARANTE ET UNIÈME LEÇONS

LES COORDONNÉES POLAIRES

(FORMULES GÉNÉRALES)

415. Équation de la droite. Considérons une droite Δ, et soit ox l'axe polaire. Si nous désignons par h la distance de l'origine à Δ, le triangle OMH nous donne la relation

$$h = \rho \cos(\alpha - \omega).$$

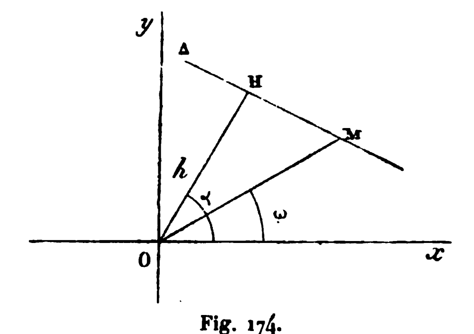


Fig. 174.

C'est l'équation polaire de la droite. On remarque qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$u \cos \omega + v \sin \omega = \frac{1}{\rho}.$$

Réciproquement, toute équation de cette forme représente

une droite. En effet, en la transformant en coordonnées cartésiennes on a :

$$ux + vy = 1.$$

Il faut pourtant observer que les droites passant par l'origine ont, dans le système polaire, pour équation :

$$\omega = \alpha, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \omega = K.$$

416. Droites passant par deux points. Soient ρ_1, ω_1 ; ρ_2, ω_2 ; les coordonnées des points donnés. L'équation de cette droite, en supposant $\omega_1 - \omega_2 \neq 0$, est

$$\frac{1}{\rho} = u \cos \omega + v \sin \omega,$$

et l'on a, par conséquent,

$$\frac{1}{\rho_1} = u \cos \omega_1 + v \sin \omega_1,$$

$$\frac{1}{\rho_2} = u \cos \omega_2 + v \sin \omega_2.$$

Ces trois égalités donnent, entre les coordonnées courantes (ρ, ω) d'un point de la droite proposée, la relation

$$(D) \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & \cos \omega & \sin \omega \\ \frac{1}{\rho_1} & \cos \omega_1 & \sin \omega_1 \\ \frac{1}{\rho_2} & \cos \omega_2 & \sin \omega_2 \end{vmatrix} = 0.$$

417. Équation générale des tangentes. Soit $f(\rho, \omega) = 0$ l'équation d'une courbe U, en coordonnées polaires. Prenons sur U un point M_1, (ρ_1, ω_1) et joignons M_1 à un second point M_2 (ρ_2, ω_2) voisin de M_1, sur la courbe. La droite M_1M_2 a pour

équation (D), et celle-ci peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\rho} & \cos\omega & \sin\omega \\ \dfrac{1}{\rho_1} & \cos\omega_1 & \sin\omega_1 \\ \dfrac{\dfrac{1}{\rho_1}-\dfrac{1}{\rho_2}}{\omega_1-\omega_2} & \dfrac{\cos\omega_1-\cos\omega_2}{\omega_1-\omega_2} & \dfrac{\sin\omega_1-\sin\omega_2}{\omega_1-\omega_2} \end{vmatrix} = 0.$$

En supposant que ω_2 varie et tende vers ω_1, cette relation devient, à la limite,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\rho} & \cos\omega & \sin\omega \\ \dfrac{1}{\rho_1} & \cos\omega_1 & \sin\omega_1 \\ \left(\dfrac{1}{\rho_1}\right)' & -\sin\omega_1 & \cos\omega_1 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant on a, finalement,

$$\text{(T)} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos(\omega-\omega_1) + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)'\sin(\omega-\omega_1).$$

Dans cette équation, $\left(\frac{1}{\rho_1}\right)'$ désigne les dérivées de la fonction $\frac{1}{\rho}$ quand on y a remplacé les coordonnées courantes ρ, ω, par les coordonnées particulières ρ_1, ω_1, du point considéré.

418. Équation de l'asymptote. Lorsque le point (ρ_1, ω_1) s'éloigne à l'infini, dans une direction déterminée, on a :

$$\lim \rho_1 = \infty, \text{ et } \lim \omega_1 = \alpha.$$

L'équation de l'asymptote est donc

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{\rho_\alpha}\right)' \sin(\omega - \alpha).$$

Dans cette relation, $\left(\frac{1}{\rho_\alpha}\right)'$ désigne la dérivée de $\frac{1}{\rho}$ quand on y remplace : $\frac{1}{\rho}$, par 0 ; et ω, par α. Nous reviendrons, tout à l'heure (§ 427) sur la discussion que comporte cette équation.

419. Équation des coniques. Nous avons déjà montré (§ 329), que l'équation polaire de l'ellipse était

$$\text{(C)} \quad \frac{p}{\rho} = 1 - e \cos \omega.$$

Nous rappelons que l'origine choisie est le foyer de gauche et que la direction positive de l'axe polaire est celle du mobile qui se dirige, du foyer pris pour origine, vers le second foyer.

L'équation précédente peut représenter les trois genres de coniques ; c'est ce que nous allons établir.

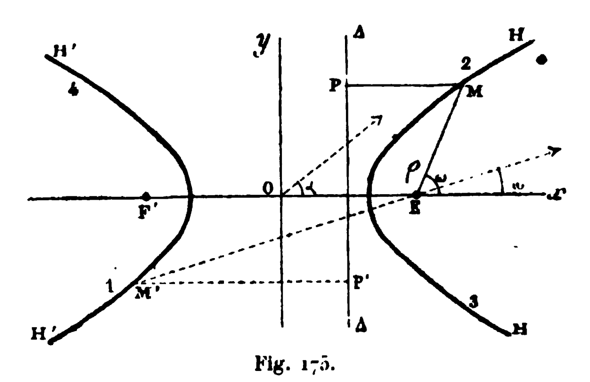


Fig. 175.

Considérons d'abord une hyperbole ; prenons pour origine le point F, foyer de droite ; et pour direction négative de l'axe polaire celle du mobile allant, du foyer considéré, à l'autre

foyer F'. Soit Δ la directrice qui correspond au foyer F; ayant pris un point M sur l'hyperbole on a :

$$(1)\quad \frac{MF}{MP} = e = \frac{c}{a},$$

e désignant l'excentricité.

D'autre part, on a, par une propriété connue,

$$OH = \frac{a^2}{c},$$

et, par suite,

$$FH = c - \frac{a^2}{c} = \frac{b^2}{c}.$$

La relation (1) peut donc être écrite :

$$\frac{\rho}{\frac{b^2}{c} + \rho \cos \omega} = \frac{c}{a},$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a}\cos \omega},$$

ou, enfin,

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \omega}.$$

Il est facile de vérifier qu'en faisant varier ω de 0 à 2π, cette équation donne les deux branches H, H' de l'hyperbole.

Prenons en effet un point M' sur la seconde branche H'. Nous avons, encore,

$$\frac{M'F}{M'P'} = e, \quad \text{ou} \quad \frac{M'F}{M'F \cos \omega' - \frac{b^2}{c}} = \frac{c}{a}.$$

Le point M' correspond à une valeur ω' de ω, valeur comprise entre 0 et α, 2α désignant l'angle formé par les deux semi-asymptotes qui comprennent une branche de l'hyperbole. Si nous désignons par ρ', la coordonnée ρ du point M', ρ' est une valeur négative et nous devons poser $M'F = -\rho'$. La relation précédente s'écrit donc :

$$\frac{-\rho'}{-\rho'\cos\omega' - \frac{b^2}{c}} = \frac{c}{a},$$

ou,

$$\rho' = \frac{p}{1 - e\cos\omega'}.$$

On retrouve ainsi l'équation précédemment obtenue. En poursuivant cette discussion, on voit que : le bras 1 est engendré par la variation de ω entre 0 et α ; les bras 2 et 3 quand ω prend les valeurs comprises entre α et $2\pi - \alpha$; enfin le bras 4 quand on fait varier ω entre $2\pi - \alpha$ et 2π.

En prenant le foyer de la parabole pour origine et pour direction négative de l'axe polaire celle du mobile qui se dirige du foyer vers le sommet de la courbe, l'équation de la courbe est

$$\frac{p}{\rho} = 1 - \cos\omega.$$

Il suffit, pour l'obtenir, d'exprimer que tout point de la courbe est situé à égale distance du foyer et de la directrice.

En résumé, les conventions relatives à l'origine et à la direction positive, ou négative, de l'axe polaire étant celles qui ont été formulées plus haut, on peut dire que l'*équation*

$$\frac{p}{\rho} = 1 - e\cos\omega$$

représente, dans ce système d'axes, l'équation générale des coniques.

420. Équation générale des tangentes aux coniques. Cherchons, d'après (C), l'équation générale des tangentes aux coniques. Nous avons, d'abord,

$$p\left(\frac{1}{\rho}\right)' = e \sin \omega.$$

L'équation (T) est, alors,

$$\frac{p}{\rho} = (1 - e\cos\omega_1)\cos(\omega - \omega_1) + e\sin\omega_1 \sin(\omega - \omega_1),$$

ou,

$$\frac{p}{\rho} = \cos(\omega - \omega_1) - e\left\{\cos\omega_1 \cos(\omega - \omega_1) - e\sin\omega_1 \sin(\omega - \omega_1)\right\},$$

ou, enfin,

$$(\text{T}') \quad \frac{p}{\rho} = \cos(\omega - \omega_1) - e\cos\omega.$$

421. Inclinaison du rayon vecteur sur la courbe. Imaginons qu'un point M soit mobile sur une courbe V et occupe, sur cette courbe, une position M′ voisine de M. Nous dirons que le mouvement du mobile considéré est direct si la semi-droite OM, tournant autour du point O de l'angle MOM′, vient se placer sur OM′, après avoir pivoté dans le sens direct; ou, si l'on préfère, dans le sens négatif des coordonnées ω.

Si l'on joint un point M de U au point voisin M′, défini comme il vient d'être dit, la limite des positions des semi-droites MM′, quand M′ vient se confondre avec M, est une semi-droite Δ, bien déterminée et que nous allons considérer.

Nous appellerons inclinaison du rayon vecteur OM sur la courbe U, l'angle que fait la semi-droite MO, avec la semi-tangente Δ.

Il résulte de ces explications que cet angle, ou celui qui lui est opposé par le sommet, est bien déterminé; il n'a qu'une valeur, que nous désignerons par V.

422. Formule donnant tg V. Cette formule peut s'établir directement, mais elle est aussi, comme nous allons le montrer, la conséquence immédiate de l'équation (T).

En faisant $\omega = 0$, dans cette formule, nous avons :

$$OT = \frac{1}{\rho_1}\cos\omega_1 - \left(\frac{1}{\rho_1}\right)'\sin\omega_1,$$

ou,

$$(1) \quad \frac{\rho_1}{OT} = \cos\omega_1 + \frac{\rho'_1}{\rho_1}\sin\omega_1.$$

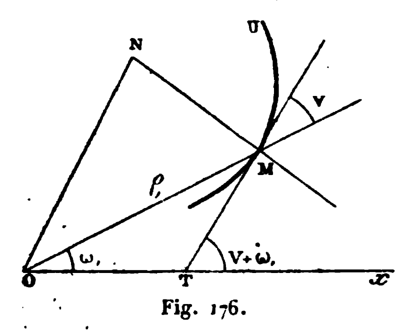


Fig. 176.

D'autre part, le triangle OMT donne

$$\frac{\rho_1}{\sin(V+\omega_1)} = \frac{OT}{\sin V},$$

ou,

$$(2) \quad \frac{\rho_1}{OT} = \cos\omega_1 + \operatorname{cotg} V \sin\omega_1.$$

La comparaison des résultats (1) et (2) conduit à la formule cherchée :

$$(A) \quad \operatorname{tg} V = \frac{\rho_1}{\rho'_1}.$$

423. Remarque. Le plus souvent, dans le système des coordonnées polaires, l'équation de la courbe est donnée sous la forme :

$$\frac{1}{\rho} = f(\omega).$$

La formule (A) que nous venons de trouver peut aussi s'écrire :

$$\text{cotg}\,V = -\rho_1\left(-\frac{\rho'_1}{\rho_1^2}\right),$$

ou,

$$\text{cotg}\,V = -\frac{\left(\frac{1}{\rho_1}\right)'}{\left(\frac{1}{\rho_1}\right)},$$

On a donc,

$$\text{cotg}\,V = -\frac{f'(\omega_1)}{f(\omega_1)}.$$

Cette nouvelle forme est commode dans un grand nombre de cas, et la remarque que nous voulions faire peut se résumer ainsi : *la cotangente de l'angle* V *est égale, et de signe contraire, à la dérivée logarithmique de la fonction* $\frac{1}{\rho}$.

424. Équation de la normale. Soit MN la normale (fig. 176); on a $\text{ON} = \rho_1 \cos V$. L'équation de MN est donc

$$\rho_1 \cos V = \rho \cos (V + \omega_1 - \omega);$$

ou,

$$\frac{\rho_1}{\rho} \cos V = \cos V \cos (\omega_1 - \omega) - \sin V \sin (\omega_1 - \omega),$$

ou encore,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \cos (\omega_1 - \omega) - \frac{\text{tg}\,V}{\rho_1} \sin (\omega_1 - \omega).$$

En appliquant la formule précédente, il vient

$$\text{(N)}\quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \cos (\omega - \omega_1) + \frac{1}{\rho'_1} \sin (\omega - \omega_1).$$

425. Sous-tangente et sous-normale. La perpendiculaire élevée au rayon vecteur OM, au point O, rencontre la tangente en A et la normale en B. Dans le système des coordonnées polaires, OA s'appelle la *sous-tangente ;* OB est la *sous-normale.*

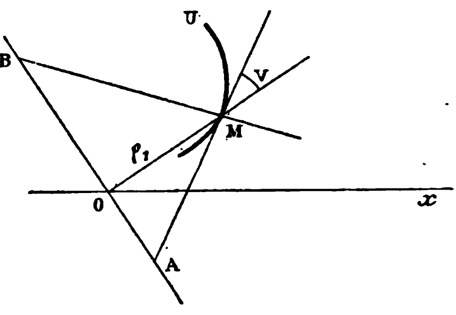


Fig. 177.

La sous-tangente est positive lorsqu'elle est placée à la droite de l'observateur qui, du point O, regarde l'extrémité M du rayon vecteur. Au contraire, la sous-normale est positive quand elle est placée à la gauche de cet observateur.

Les triangles OMA, OMB donnent :

$$OA = \rho_1 \operatorname{tg} V, \quad OB = \rho_1 \operatorname{cotg} V;$$

En désignant la sous-normale par S_n, la sous-tangente par S_t, on a donc :

$$S_t = OA = \rho_1 \frac{\rho_1}{\rho_1'} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_1}\right)'},$$

et,

$$S_n = OA = \rho_1 \frac{\rho_1'}{\rho_1} = \rho_1'$$

426. Application aux spirales. — 1° Spirale d'Archimède. Cette courbe correspond à l'équation :

$$\text{(A)} \quad \rho = a\omega.$$

C'est une équation transcendante et nous devons expliquer

d'abord comment on peut imaginer une construction, point par point, de cette courbe.

Dans un cercle de rayon R, on fait un angle au centre égal à ω et l'on considère l'arc intercepté par les côtés de cet angle. Soit Ω la longueur de cet arc.

Pour obtenir le point correspondant de la spirale, on fait tourner, autour de l'origine, la semi-droite ox d'un angle ω, dans le sens positif; et, sur cette droite, à partir du point O, on prend une longueur qui est une quatrième proportionnelle aux lignes a, Ω, R.

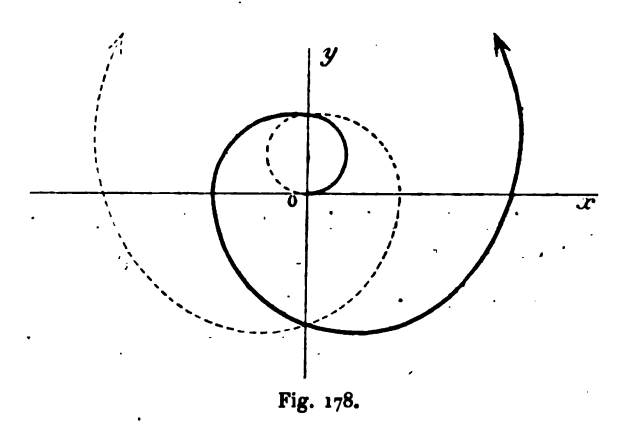


Fig. 178.

Dans les courbes polaires transcendantes, *pour obtenir toute la courbe, on doit faire varier* ω *de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

La spirale d'Archimède a la forme indiquée par la figure ci-dessus; elle jouit de cette propriété que *la sous-normale est constante*. On a, en effet, $S_n = a$.

2° Spirale logarithmique. Cette courbe correspond à l'équation

$$\text{(B)} \qquad \rho = \mathrm{K}a^{\omega}.$$

On a, dans cet exemple,

$$\operatorname{tg} \mathrm{V} = \frac{1}{\mathrm{L}a};$$

on peut donc dire que *dans la spirale logarithmique tous les rayons vecteurs qui partent du pôle coupent la courbe sous le même angle.*

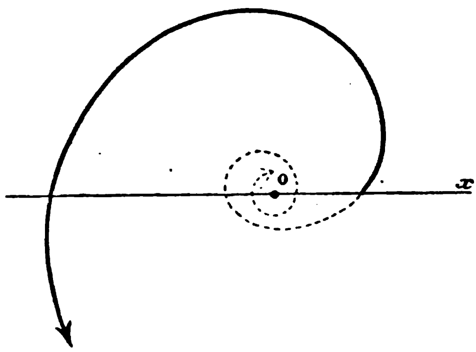


Fig. 179.

Lorsque cet angle est égal à 90°, on a $La = 0$, ou $a = 1$; et, par suite $\rho = K$. Le cercle est donc un cas particulier des spirales logarithmiques.

3° Spirale hyperbolique. L'équation de la spirale hyperbolique est

$$(C) \quad \rho = \frac{a}{\omega},$$

ou,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\omega}{a}.$$

On a donc

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)' = \frac{1}{a},$$

et l'on voit ainsi que cette spirale jouit de la propriété d'avoir *une sous-tangente constante.* L'axe polaire est une direction asymptotique; la courbe qui a la forme indiquée par la

figure (180) admet une asymptote parallèle à l'axe polaire et correspondant à l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin \omega}{a}.$$

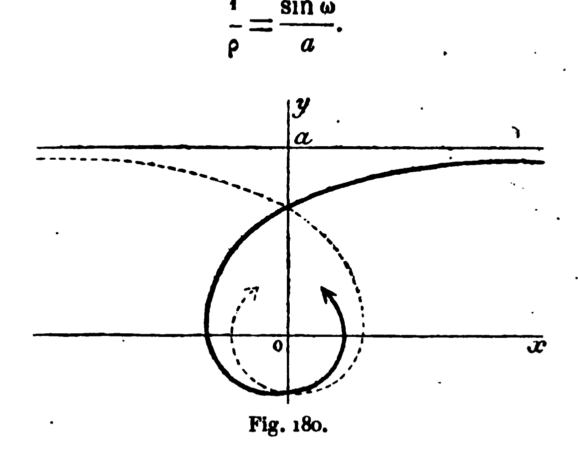


Fig. 180.

4° Spirales sinusoïdales. Ces courbes ont pour équation

$$\text{(D)} \quad m\rho^m = a^m \sin m\omega$$

Cette égalité représente, pour des valeurs particulières de m, des courbes que nous avons déjà rencontrées.

Ainsi, on vérifie facilement que si $m = \frac{1}{2}$, la courbe (D) est une *cardioïde* dont le cercle générateur a un rayon égal à a.

En supposant $m = 2$, on obtient une *lemniscate*, dont les foyers sont situés à l'intersection de la première bissectrice et du cercle, concentrique à l'origine, qui a un rayon égal à a.

Les courbes qui correspondent à l'équation D jouissent d'une propriété remarquable, qui permet de construire très simplement la tangente en un point pris sur l'une d'elles.

Nous avons, en effet,

$$m\rho^{m-1}\rho' = a^m \cos m\omega$$

et, par suite,

$$\frac{\rho}{\rho'} = \operatorname{tg} V = \operatorname{tg} m\,\omega.$$

Cette formule donne

$$V = m\omega + K\pi.$$

L'angle V, étant l'angle de deux semi-droites, est toujours inférieur à π, et l'on a, finalement,

$$V = m\omega.$$

On déduit de là, entre autres conséquences, que : *dans la cardioïde, une corde passant par le point double et les tangentes aux extrémités de cette corde forment un triangle rectangle.*

427. Asymptotes. — (*Détermination et discussion.*) Nous avons trouvé plus haut que l'asymptote qui correspond à une direction asymptotique α, avait pour équation

$$\text{(A)} \quad \frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{\rho_\alpha}\right)' \sin(\omega - \alpha);$$

mais il nous reste à montrer comment on détermine les asymptotes, quand l'équation précédente devient une identité.

On peut toujours supposer que la courbe considérée correspond à une équation polaire ayant une forme entière, par rapport à ρ. Soit

$$\rho^m \varphi(\omega) - \rho^{m-1} f(\omega) + \rho^{m-2} \psi(\omega) + \ldots = 0,$$

l'équation proposée. Elle peut s'écrire encore sous la forme :

$$\varphi(\omega) - \frac{1}{\rho} f(\omega) + \frac{1}{\rho^2} \psi(\omega) + \ldots = 0,$$

et l'on a, par suite,

$$\varphi' - \left(\frac{1}{\rho}\right)' f - \frac{1}{\rho} f' + \left(\frac{1}{\rho^2}\right)' \psi + \frac{1}{\rho^2} \psi' + \ldots = 0.$$

Supposons d'abord que nous n'ayons pas, simultanément,

$$\varphi'(\alpha) = 0, \text{ et } f(\alpha) = 0.$$

Si nous faisons : $\omega = \alpha$, et $\rho = \infty$, dans la relation précédente, nous avons

$$\varphi'(\alpha) - \left(\frac{1}{\rho_\alpha}\right)' f(\alpha) = 0.$$

L'équation de l'asymptote est donc, en supposant $f(\alpha) \neq 0$,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varphi'(\alpha)}{f(\alpha)} \sin(\omega - \alpha),$$

ou,

$$\text{(A')} \quad \frac{1}{\rho} f(\alpha) - \varphi'(\alpha) \sin(\omega - \alpha) = 0.$$

Dans le cas où l'on a

$$f(\alpha) = 0, \text{ et } \varphi'(\alpha) \neq 0,$$

l'équation de l'asymptote est $\omega = \alpha$.

Cette asymptote est une parallèle, menée par l'origine, à la direction asymptotique considérée.

Si l'on suppose :

$$f(\alpha) \neq 0, \text{ et } \varphi'(\alpha) = 0;$$

l'asymptote est rejetée à l'infini.

Enfin, il nous reste à examiner le cas que nous avons réservé, celui où nous supposons, simultanément,

$$f(\alpha) = 0, \quad \varphi'(\alpha) = 0.$$

428. Asymptotes parallèles. Lorsqu'une courbe a des asymptotes parallèles, il peut arriver que l'équation (A) soit identique. Les asymptotes se déterminent alors comme nous allons l'expliquer.

Posons :

$$\frac{1}{\rho} = \mu \sin(\omega - \alpha)$$

et cherchons à déterminer μ.

A cet effet, changeons de variable et soit

$$\omega = \alpha + \Omega.$$

L'équation de la courbe est alors, par application de la formule de Taylor,

$$\varphi(\alpha) + \Omega\varphi'(\alpha) + \frac{\Omega^2}{1.2}\varphi''(\alpha) + \dots$$
$$- \frac{1}{\rho}\left\{ f(\alpha) + \Omega f'(\alpha) + \dots \right\}$$
$$+ \frac{1}{\rho^2}\left\{ \psi(\alpha) + \dots \right\} = 0.$$

En tenant compte des hypothèses que nous avons faites, et en divisant par Ω^2, cette relation peut s'écrire

$$(1) \quad \frac{\varphi''(\alpha)}{1.2} - \frac{1}{\rho\Omega} f'(\alpha) + \frac{1}{\rho^2\Omega^2}\psi(\alpha) + \dots = 0.$$

Dans la partie qui n'est pas écrite, les termes renferment des facteurs de la forme

$$H\left(\frac{1}{\rho}\right)^p \Omega^q \left(\frac{1}{\rho\Omega}\right)^r,$$

H étant une fonction de α, et p, q, r, désignant des nombres entiers, positifs ou nuls, mais ayant une somme supérieure à zéro.

Cette remarque étant faite, observons que l'équation de l'asymptote cherchée peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho\Omega} = \mu\left(\frac{\sin\Omega}{\Omega}\right).$$

Par conséquent, si, comme nous le supposons, μ a pour limite une valeur finie, $\frac{1}{\rho\Omega}$ a pareillement pour limite une valeur finie, qui est la même que celle de μ.

En appelant m cette limite, l'équation (1) prouve que l'on a

$$(2)\quad \frac{\varphi''(\alpha)}{2} - mf'(\alpha) + m^2\psi(\alpha) = 0.$$

Cette égalité donne par m des valeurs réelles ou imaginaires, finies ou infinies, si l'on n'a pas, simultanément :

$$(3)\quad \varphi''(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) = 0,\quad \psi(\alpha) = 0.$$

Nous avons supposé que la limite de $\frac{1}{\rho\Omega}$ était finie. Dans l'hypothèse contraire, on cherchera la limite de $\rho\Omega$ et l'on trouvera, pour la déterminer, l'équation (2), après y avoir changé m en $\frac{1}{m}$. Nous pouvons donc dire que (2) donne toujours, la valeur de m, exception faite du cas où l'on suppose que les relations (3) sont vérifiées.

Dans ce cas singulier, on aura encore recours à l'équation (1) et, après l'avoir simplifiée, on obtiendra, pour déterminer m, une équation du troisième degré; et ainsi de suite.

429. Cercles et points asymptotes. On rencontre dans la construction de certaines spirales *des cercles et des points asymptotes.* On dit qu'un cercle (ou un point) Δ, est asymptote à une spirale U, lorsque cette courbe est constituée, en partie au moins, par une infinité de spires qui s'enroulent autour de Δ, sans jamais l'atteindre, mais en s'approchant de lui d'une quantité qui tend vers zéro.

Nous avons trouvé dans la spirale logarithmique, et dans la spirale hyperbolique, des exemples de points asymptotes.

Dans la spirale qui a pour équation

$$\rho = \frac{\omega}{3\omega - 1},$$

en faisant varier ω de 0 à $-\infty$ on a une première partie de la courbe formée d'un nombre infini de spires intérieures au

cercle Δ. La courbe est asymptote à ce cercle qui a pour centre l'origine et dont le rayon est égal à $\frac{1}{3}$. La courbe est complétée : 1° par un bras partant de l'origine, situé dans le troisième angle, et asymptote à la droite Δ', qui correspond à l'équation

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho} = 9 \sin(\omega - \alpha),$$

α étant l'angle au centre qui, dans un cercle de rayon 1, correspond à un arc de longueur $\frac{1}{3}$;

2° Par une seconde spire, dont l'un des bras est asymptote à Δ', et qui s'enroule extérieurement à Δ, en étant asymptote à ce cercle.

Finalement, la spirale proposée a la forme générale qu'indique la figure ci-dessous.

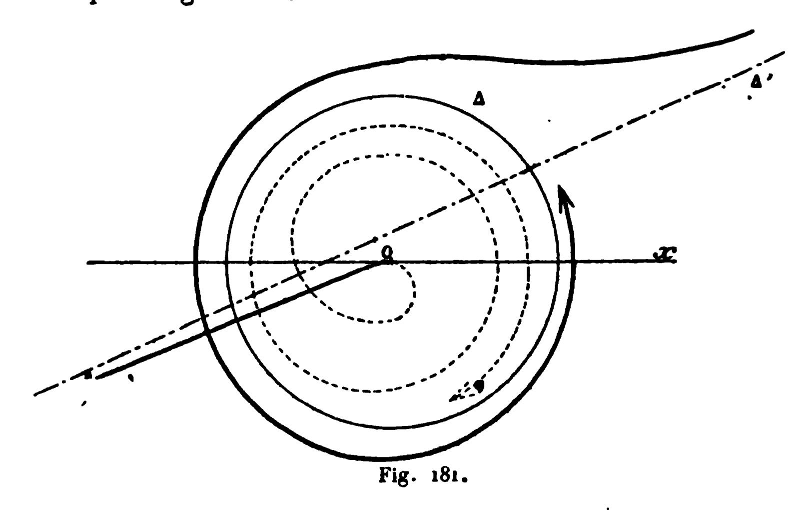


Fig. 181.

430. Concavité. Soit U, la courbe qui correspond à l'équation

$$f(\rho, \omega) = 0.$$

Soit **M** un point de U; la tangente Δ en ce point a pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \cos(\omega - \omega_1) + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)' \sin(\omega - \omega_1).$$

Soient ρ et ω, les coordonnées d'un point B pris sur U dans le voisinage de M et considérons la quantité u, fonction de ω et définie par l'égalité.

$$u = \frac{1}{OA} - \frac{1}{OB}.$$

Nous avons

$$u = \frac{1}{\rho_1} \cos(\omega - \omega_1) + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)' \sin(\omega - \omega_1) - \frac{1}{\rho},$$

par suite,

$$u' = -\frac{1}{\rho_1} \sin(\omega - \omega_1) + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)' \cos(\omega - \omega_1) - \left(\frac{1}{\rho}\right)'$$

et, finalement,

$$u'' = -\frac{1}{\rho_1} \cos(\omega - \omega_1) - \left(\frac{1}{\rho_1}\right)' \sin(\omega - \omega_1) - \left(\frac{1}{\rho}\right)''.$$

Désignons par υ la valeur de u'', pour $\omega = \omega_1$, et posons, par conséquent,

$$\text{(A)} \qquad \upsilon = -\frac{1}{\rho_1} - \left(\frac{1}{\rho_1}\right)''.$$

Si nous supposons υ positif, u'' est une fonction de ce qui est positif quand ω prend des valeurs plus grandes ou plus petites que ω_1, mais voisines de ω_1.

La fonction u' est croissante, et pour $\omega = \omega_1$, u' s'annule: donc u' a une valeur négative, avant le passage de ω par ω_1; et positive après ce passage. Conformément à cette remarque, nous pouvons donc dire que u décroît avant le passage, et qu'il croît après le passage. D'ailleurs, pour $\omega = \omega_1$, u prend

la valeur zéro. En résumé, avant et après le passage, le rayon vecteur de la courbe est plus grand que celui de la tangente; la courbe a donc, dans le voisinage de M, la forme indiquée par la figure.

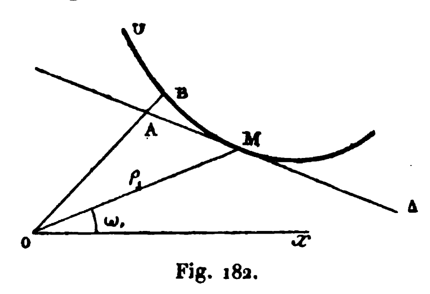


Fig. 182.

Au contraire, en supposant υ négatif on trouve que, avant comme après le passage, le rayon vecteur de la courbe, dans le voisinage de M, est plus petit que le rayon vecteur correspondant de la tangente; la courbe tourne alors sa concavité vers le pôle.

431. Points d'inflexion. Il nous reste à examiner le cas particulier où l'on a $\upsilon = 0$.

Le raisonnement que nous avons fait prouve que, si υ s'annule, *en changeant de signe*, la courbe tourne d'abord sa concavité vers le pôle; puis, après le passage, sa convexité, ou inversement. Dans l'un et l'autre cas, la tangente traverse la courbe; le point considéré est un point d'inflexion.

432. Points multiples. Lorsque l'équation polaire d'une courbe est, sous la forme explicite : $\rho = f(\omega)$, les points multiples peuvent se déterminer en cherchant quelles sont les valeurs de ω qui, différant d'un multiple de 2π, donnent pour ρ des valeurs égales; ou, dans d'autres cas, quelles sont les valeurs de ω, dont la différence est égale à $(2k+1)\pi$, et qui donnent à ρ des valeurs égales et de signes contraires.

433. Points limites. Nous nommerons ainsi ceux pour lesquels la tangente est parallèle, ou perpendiculaire, à l'axe polaire.

Pour les premiers, on a, V ayant son sens ordinaire (§ 422),

$$V + \omega = \pi, \quad \text{ou} \quad V + \omega = 2\pi; \quad \text{etc...}$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tg} V = -\operatorname{tg} \omega = \frac{\rho}{\rho'};$$

Pour les autres, on a :

$$V + \omega = \frac{\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad V + \omega = 3\frac{\pi}{2}, \quad \text{etc...}$$

et, par suite,

$$\operatorname{tg} V = \operatorname{cotg} \omega = \frac{\rho'}{\rho}.$$

434. Symétrie par rapport aux axes. Les équations polaires de certaines courbes permettent de reconnaître immédiatement qu'elles admettent certaines droites, passant par l'origine, comme axes de symétrie. Cette observation facilite le tracé de la courbe, et la symétrie par rapport à l'axe polaire *ox*, et aussi celle qui est relative à l'axe perpendiculaire *oy*, se constatent facilement en appliquant les remarques suivantes :

1° Une courbe est symétrique par rapport à *ox* quand son équation ne change pas : soit qu'on substitue à ω, $2\pi - \omega$; soit qu'on remplace, simultanément : ρ, par $-\rho$; et ω, par $\pi - \omega$.

2° Une courbe est symétrique par rapport à *oy* quand son équation ne change pas lorsqu'on remplace ω par $\pi - \omega$; ou, simultanément, ρ par $-\rho$, et ω par $2\pi - \omega$.

On peut d'ailleurs généraliser cette règle en l'appliquant, soit aux bissectrices des axes, soit à la droite qui correspond à l'équation $\omega = \alpha$.

435. Transformations centrales. Dans ces transformations, la figure de référence est constituée par un seul

point fixe O, qui est le pôle; deux points correspondants m, M sont toujours situés en ligne droite avec le pôle et si l'on pose

$$om = u, \quad OM = v,$$

on donne, pour définir la transformation, une relation entre les rayons vecteurs u, v.

Par exemple, si l'on a

$$u = kv,$$

k désignant une constante, les figures transformées sont homothétiques.

Les deux transformations les plus simples que l'on puisse imaginer, après la transformation homothétique, sont celles qui correspondent aux formules :

$$u \pm v = k, \quad uv = \pm k^2.$$

Comme deux figures symétriques par rapport à un point sont égales, on peut choisir le signe de v et prendre les formules précédentes sous la forme :

$$\text{(A)} \quad u - v = k, \qquad \text{(B)} \quad uv = k^2.$$

A la première, correspondent les courbes que nous avons nommées conchoïdes (§ 24); l'autre formule donne la transformation dite *par rayons vecteurs réciproques*.

436. Transformation par rayons vecteurs réciproques. On sait que, dans cette transformation, les demi-tangentes aux points correspondants de deux courbes transformées, font des angles supplémentaires avec le rayon vecteur. Nous nous proposons de reconnaitre analytiquement cette propriété remarquable.

Soit

$$(1) \quad f(u, \omega) = 0,$$

l'équation de la courbe U; les formules de transformation sont :

$$(2) \quad \omega = \Omega, \quad uv = k^2,$$

et, à la courbe U, correspond une transformée V ayant pour équation

$$f\left(\frac{k^2}{v}, \Omega\right) = 0.$$

Les angles α et β que nous voulons considérer vérifient les égalités (§ 422) :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{u}{u'} = -\frac{uf'_u(u,\omega)}{f'_\omega(u,\omega)},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v}{v'} = \frac{v \cdot \frac{k^2}{v^2} \cdot f'_{\frac{k^2}{v^2}}\left(\frac{k^2}{v},\Omega\right)}{f'_\Omega\left(\frac{k^2}{v},\Omega\right)}.$$

En tenant compte des formules (2), cette dernière égalité peut être écrite

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{uf'_u(u,\omega)}{f'_\omega(u,\omega)};$$

on a donc,

$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta,$$

par suite, les angles α, β, qui sont compris entre 0 et π, sont supplémentaires.

La transformation par rayons vecteurs réciproques jouit de quelques autres propriétés fondamentales qui se reconnaissent immédiatement par l'analyse. Ainsi, à la droite qui a pour équation,

$$u = \frac{1}{A\cos\omega + B\sin\omega},$$

correspond la courbe dont l'équation est

$$v = k^2(A\cos\omega + B\sin\omega),$$

c'est-à-dire que : *à une droite, correspond un cercle passant par le pôle.*

De même, à un cercle U, dont l'équation est

$$u^2 + u(\mathrm{A}\cos\omega + \mathrm{B}\sin\omega) + \mathrm{C} = 0$$

correspond une courbe V ayant pour équation :

$$k^4 + k^2 v(\mathrm{A}\cos\omega + \mathrm{B}\sin\omega) + \mathrm{C}v^2 = 0.$$

Cette courbe V est un cercle ; ainsi, *à un cercle correspond un cercle.*

EXERCICES

---

1. *Trouver le lieu des points tels que si, de l'un d'entre eux on mène les deux tangentes à une ellipse, la bissectrice de l'angle formé par ces deux droites passe par un point fixe.*

Le lieu cherché est une strophoïde.

2. *Démontrer :*

1° *Que la* **spirale d'Archimède** *est la seule courbe qui jouisse de la propriété d'avoir une sous-normale constante ;*

2° *Que toute courbe qui coupe les rayons vecteurs issus d'un point fixe sous un angle constant, est une* **spirale logarithmique** *;*

3° *Qu'il n'existe pas d'autre courbe que la* **spirale hyperbolique,** *ayant une sous-tangente de grandeur constante.*

3. *Démontrer que si l'on désigne par* ρ *la longueur d'un rayon vecteur quelconque, partant du centre de l'ellipse, et par* V *l'angle sous lequel il coupe l'ellipse, on a*

$$\rho^4 - \rho^2(a^2 + b^2) + \frac{a^2b^2}{\sin^2 \mathrm{V}} = 0.$$

En déduire les théorèmes d'Apollonius.

4. *Autour du foyer* F *d'une conique* Γ *on fait tourner deux semi-droites faisant un angle constant* $2\mathrm{V}$ *; elles rencontrent* Γ *en deux points* A, B : *trouver : 1° le lieu décrit par le pôle* I *de* AB *; 2° l'enveloppe des cordes* AB.

On peut appliquer à cet exercice l'équation :

$$\frac{p}{\rho} = \cos(\omega - \omega_1) - e\cos\omega,$$

et l'on trouve que le lieu du point I est une conique qui a le même foyer et la même directrice que la proposée, et qui correspond à l'équation

$$\frac{p'}{\rho} = 1 - e' \cos \omega ;$$

en posant :

$$p' = \frac{p}{\cos V}, \quad e' = \frac{e}{\cos V}.$$

Pour trouver l'enveloppe des cordes AB, le calcul peut être dirigé de la nière suivante.

En désignant par ρ_1, ω_1 ; ρ_2, ω_2 ; les coordonnées polaires des points A et B, l'équation de AB est :

$$\frac{\sin(\omega_2 - \omega_1)}{\rho} + \frac{\sin(\omega - \omega_2)}{\rho_1} + \frac{\sin(\omega_1 - \omega)}{\rho_2} = 0.$$

En tenant compte des relations :

$$\frac{p}{\rho_1} = 1 - e \cos \omega_1, \quad \frac{p}{\rho_2} = 1 - e \cos \omega_2 ;$$

et, en posant,

$$\lambda = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},$$

on trouve que l'équation de AB est

$$\frac{p}{\rho} \sin 2V - 2 \sin V \cos(\omega - \lambda) + e \cos \omega \sin 2V = 0.$$

L'équation de l'enveloppe est

$$\frac{p''}{\rho} = 1 - e'' \cos \omega,$$

en posant

$$p'' = p \cos V, \quad e'' = e \cos V.$$

5. *On donne un cercle Δ et sur sa circonférence un point fixe O. Par O, on mène une corde mobile OA et, dans le segment de cercle ainsi obtenu, on inscrit un cercle Δ' tangente à l'arc OA, en son milieu. A Δ', on mène une tangente perpendiculaire à OA ; trouver le lieu décrit par le point* **I**, *commun à ces deux droites.*

Les coordonnées polaires donnent immédiatement l'équation :

$$\rho = \frac{R}{2} + R\cos\omega - \frac{R}{2}\sin\omega,$$

la courbe correspondante est un limaçon.

6. *On considère un point fixe* O, *qui est le pôle de la transformation que nous allons définir :*

Soit m un point quelconque, dans un plan donné ; joignons O*m et, au point m, élevons à* O*m une perpendiculaire que nous désignerons par* μ. *Lorsque le point m décrit une courbe f,* μ *enveloppe une courbe correspondante* φ.

On propose de trouver l'équation de φ, *dans le système des coordonnées polaires, l'équation de f étant :* $\rho = f(\omega)$. *Cette courbe* φ *est la première podaire négative de f.*

Démontrer qu'il n'y a que la parabole qui ait pour podaire une droite, le pôle étant nécessairement le foyer de la conique.

7. *On considère l'égalité*

$$Auv + B(u + v) + C = 0;$$

cette formule de transformation donne les courbes conchoïdes quand on suppose $A = 0$, *et conduit à la transformation par polaires réciproques quand on a* $B = 0$. *On propose d'étudier la transformation qui correspond à l'hypothèse* $C = 0$.

On remarquera que la formule de transformation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{p},$$

et l'on considérera un cercle, de centre O, et de rayon p, (O étant le pôle).

8. *Une courbe* U, *de forme invariable, roule sur une droite* ox, *en restant tangente à cette droite au point fixe* O ; *trouver le lieu décrit par un point* I, *lié à* U *d'une façon invariable.*

On prend l'équation de U en coordonnées polaires, l'origine étant au point I, et l'axe polaire IX étant choisi de façon que l'équation de U soit aussi simple que possible. Soit

$$(1) \quad f(\rho, \omega) = 0$$

cette équation et soit V l'angle Iox, on a :

$$(2) \quad \text{Tg}\, V = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Si entre (1) et (2) on élimine ω, on a une certaine relation :

$$\varphi(\rho, V) = 0,$$

qui est l'équation du lieu cherché, lorsqu'on prend le point O pour origine et *ox* pour axe polaire.

9. *On considère une droite Δ et sur cette droite, deux points fixes* P, Q ; *par* Q *on mène une transversale* Δ′, *sur laquelle on abaisse la perpendiculaire* PC, *puis on imagine l'ellipse* Γ *qui a pour axes* CQ *et* CP ; *trouver le lieu des foyers de* Γ.

L'origine étant en P, Δ étant l'axe polaire, on trouve :

$$\rho^2 - 2h\rho\cos\omega + h^2\sin^2\omega = 0 \quad (PQ = h).$$

La courbe qui correspond à cette équation a la forme d'un folium avec rebroussement. En posant

$$u = h\cos\omega, \text{ et } v^2 = h^2\cos 2\omega$$

on a,

$$\rho = u \pm v.$$

On peut appliquer, pour la construction de la tangente en un point pris sur la courbe, une remarque qu'on trouvera plus loin (§ 442).

10. *Une parabole* P, *de forme invariable, glisse entre deux droites rectangulaires ox, oy ; trouver le lieu décrit par le point* I, *commun à* P *et au diamètre passant par* O.

En désignant par φ, l'inclinaison variable de l'axe de P sur *ox*, les données d'un point I sont :

$$8\frac{x}{p} = \frac{1}{\cos\varphi\sin^2\varphi}, \quad \frac{8y}{p} = \frac{1}{\sin\varphi\cos^2\varphi}.$$

L'équation du lieu est

$$64x^4y^4 = p^2(x^2 + y^2)^3.$$

La courbe U qui correspond à cette équation est formée de quatre branches paraboliques, doublement infléchies.

Les points d'inflexion se déterminent facilement en remarquant que U a pour équation polaire :

$$\frac{p}{\rho} = 1 - \cos 4\omega.$$

On trouve, d'après cela,

$$p\left(\frac{1}{\rho}\right)'' = 4^2 \cos 4\omega.$$

et les points d'inflexion correspondent à :

$$\cos 4\omega = -\frac{1}{15} \quad \rho = \frac{15}{16}.$$

QUARANTE-DEUXIÈME LEÇON

LES COORDONNÉES POLAIRES (suite)

(CONSTRUCTION DES COURBES)

437. Idées générales pour la construction des courbes en coordonnées polaires.

Lorsque l'équation d'une courbe est

$$(1) \quad f(\rho, \sin\omega, \cos\omega) = 0,$$

f désignant une forme entière des quantités : ρ, $\sin\omega$, $\cos\omega$, il est évident que la courbe qui correspond à cette équation est une courbe algébrique, dont l'équation cartésienne, si l'on désire l'avoir, s'obtient en s'appuyant sur les formules :

$$\cos\omega = \frac{x}{\rho}, \ \sin\omega = \frac{y}{\rho}, \ \rho^2 = x^2 + y^2.$$

En faisant varier ω de 0 à 2π, on peut tracer toute la courbe qui correspond à l'équation proposée.

Cette variation de ω, entre 0 et 2π, peut, dans certains cas, être limitée à un intervalle moindre, lorsque la forme de l'équation proposée met en évidence une symétrie de la courbe, par rapport à une ou plusieurs droites passant par le pôle; de telle sorte qu'il soit possible de déduire le tracé total de la courbe, des parties obtenues par une variation de ω, moindre que 2π.

Mais les axes de symétrie n'existent qu'exceptionnellement dans les courbes et l'on ne doit pas commencer la discussion d'une équation en coordonnées polaires par la recherche de ces droites remarquables.

Sans se préoccuper de ce détail, ni de beaucoup d'autres, il est préférable de faire varier ω, pour donner, le plus rapidement possible, une première forme très générale du tracé cherché.

S'il arrive alors que, dans cette représentation *très approximative*, on soit conduit à tracer deux parties de la courbe qui semblent symétriques par rapport à une droite passant par le pôle; on vérifiera, sans tarder, et en appliquant les principes que nous avons donnés plus haut (§ 434), que la symétrie soupçonnée existe, ou non, réellement.

Ces diverses observations s'appliquent aux équations polaires qui renferment des fonctions circulaires de $\frac{\omega}{2}$, de $\frac{\omega}{3}$, etc.; il faut seulement ajouter que, dans cette hypothèse nouvelle, on doit, en général, faire varier ω : de o à 4π, de o à 6π, etc...

Ajoutons encore que, quelle que soit l'équation proposée, avant de commencer la discussion qu'elle comporte, on doit déterminer les *valeurs remarquables* de ω; nous appelons ainsi celles qui rendent ρ nul ou infini; et, dans la variation de ω, on doit s'arrêter à ces valeurs remarquables et aussi aux valeurs simples, telles que o, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$.

Quant au cas où l'équation polaire renferme les fonctions trigonométriques des multiples de ω, ce cas rentre, évidemment, dans celui que représente l'équation (1).

Les exemples qui suivent feront mieux comprendre que des considérations générales, la marche qui nous paraît devoir être adoptée dans la construction des courbes polaires.

438. Construction d'une courbe en coordonnées polaires. — (*Branches finies.*) Soit

$$(1) \quad \rho = \frac{a}{2} \sin 2\omega,$$

l'équation proposée; désignons par U la courbe correspondante.

Pour étudier la variation de ρ, considérons la dérivée ρ'; nous avons

$$(2) \quad \rho' = a \cos 2\omega.$$

Cette relation prouve que ρ va constamment en croissant, quand ω varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

Il est d'ailleurs facile de vérifier que les axes de coordonnées, ainsi que les bissectrices des angles formés par ces axes, sont des axes de symétrie de U; de telle sorte que le tracé complet de cette courbe se détermine quand on a obtenu la partie qui correspond à la variation : $\left(0 \text{ à } \frac{\pi}{4}\right)$.

On peut d'ailleurs construire la courbe U, point par point, en appliquant la remarque suivante.

Écrivons l'équation (1) sous la forme :

$$(3) \quad a = \rho \operatorname{tg} \omega + \rho \operatorname{cotg} \omega.$$

Soit A un point pris sur U et soit BC la perpendiculaire élevée, au point A, à OA.

L'égalité (3) prouve que l'on a

$$BC = a.$$

La courbe U se construit donc, point par point, en projetant l'origine sur une droite, de longueur constante, dont les extrémités reposent sur les axes de coordonnées.

On peut aussi remarquer que l'on a, dans cet exemple,

$$\operatorname{tg} V = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\omega.$$

Cette relation remarquable permet de construire, très simplement, la tangente en un point pris sur U.

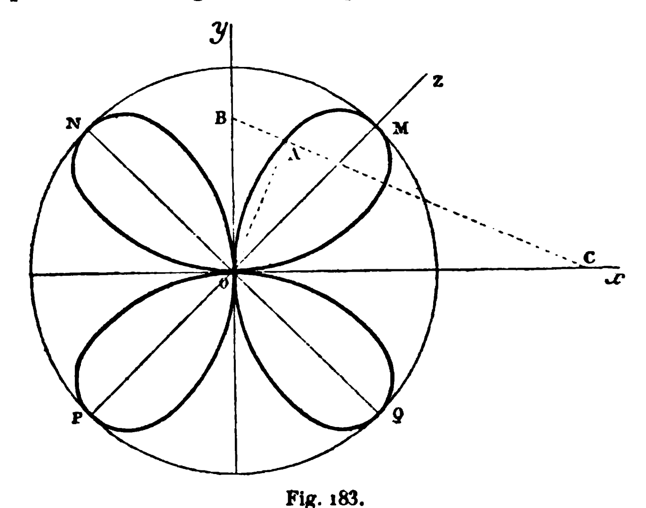


Fig. 183.

Les tangentes parallèles aux axes de coordonnées ont une importance évidente dans le tracé de la courbe proposée. Elles se déterminent, conformément à la règle donnée précédemment (§ 433), au moyen de l'équation

$$\operatorname{tg} V = \operatorname{cotg} \omega.$$

Cette relation donne

$$\frac{\operatorname{tg} \omega}{1 - \operatorname{tg}^2 \omega} = \frac{1}{\operatorname{tg} \omega}$$

ou,

$$\operatorname{tg}^2 \omega = \frac{1}{2}.$$

L'angle ω qui correspond à cette égalité et la valeur correspondante de ρ se déterminent par des constructions simples et sur lesquelles il est inutile d'insister.

439. Construction d'une courbe en coordonnées polaires. — (*Branches infinies, hyperboliques.*)

Proposons-nous de construire la courbe U, qui correspond à l'équation

$$(U) \quad \rho^2 \cos\omega\,(1+\sin 2\omega)+2\,(\sin\omega-\cos\omega)=0.$$

Cette courbe U admet des points à l'infini ; cherchons d'abord les asymptotes correspondantes aux directions asymptotiques qui sont, dans le cas présent, l'axe des y et la seconde bissectrice.

On voit immédiatement que l'axe des y est la première asymptote et, à ce propos, on peut faire cette remarque générale que *si* $\omega=\alpha$ *annule le coefficient* $\varphi(\omega)$ *de la plus haute puissance de* ρ, *mais n'annule pas* $\varphi'(\omega)$; *si, de plus, l'équation ayant pour premier terme* $\rho^p\varphi(\omega)$, *n'a pas de terme en* ρ^{p-1} ; *on peut dire que la droite menée par l'origine, et faisant avec l'axe polaire l'angle* α, *est une asymptote de la courbe.*

Ceci résulte immédiatement de l'équation établie plus haut (§ 418).

Revenons à l'équation (U) et cherchons à déterminer les asymptotes qui sont parallèles à la direction de la seconde bissectrice. Nous allons rencontrer ici une petite difficulté qui nous donnera l'occasion d'appliquer la remarque que nous avons faite, dans la leçon précédente, à propos de la détermination des asymptotes parallèles.

En conservant les notations adoptées plus haut, nous avons

$$\varphi(\omega)=\cos\omega\,(1+\sin 2\omega),$$
$$f(\omega)=0,$$
$$\psi(\omega)=2(\sin\omega-\cos\omega);$$

et, par suite,

$$\varphi'(\omega)=-\sin\omega-\sin\omega\sin 2\omega+2\cos\omega\cos 2\omega,$$

et,

$$\varphi''(\omega)=-\cos\omega-\cos\omega\sin 2\omega-4\sin\omega\cos 2\omega-4\cos\omega\sin 2\omega$$

Cette dernière identité peut s'écrire encore,

$$\varphi''(\omega) = -\cos\omega\,(1 + \sin 2\omega) - 4\sin 3\omega.$$

Pour $\omega = \alpha = \frac{3\pi}{4}$, nous avons

$$\varphi''(\alpha) = -2\sqrt{2},$$
$$\psi(\alpha) = \sqrt{2}.$$

L'équation de l'asymptote cherchée étant

$$\frac{1}{\rho} = m \sin\left(\omega - \frac{3\pi}{4}\right),$$

nous déterminons donc (§ 428) le paramètre m, par l'égalité

$$\frac{\varphi''(\alpha)}{1.2} - m f'(\alpha) + m^2 \psi(\alpha) = 0.$$

Dans le cas présent, nous trouvons

$$m^2 = 2.$$

Ainsi, il y a deux asymptotes parallèles à la seconde bissectrice et elles correspondent aux équations

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{2}\sin\left(\omega - \frac{3\pi}{4}\right),$$
$$\frac{1}{\rho} = -\sqrt{2}\sin\left(\omega - \frac{3\pi}{4}\right);$$

ou, dans le système cartésien, aux équations

$$x + y + 2 = 0,$$
$$x + y - 2 = 0.$$

L'origine est centre de la courbe et la formule

$$\rho^2 = \frac{2(\cos\omega - \sin\omega)}{\cos\omega(\sin\omega + \cos\omega)^2},$$

prouve que l'on doit avoir

$$\cos\omega(\cos\omega - \sin\omega) > 0;$$

il n'y a donc pas de point réel de la courbe dans la partie qui est comprise entre la première bissectrice et l'axe yy'.

On peut, d'après ces remarques diverses, tracer la courbe qui a l'aspect général indiqué par la figure ci-dessous [1].

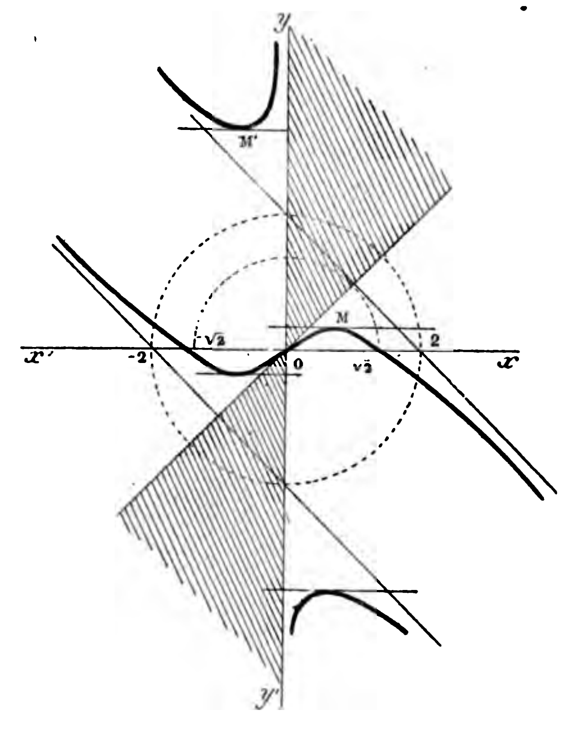


Fig. 184.

1. Cette courbe n'est autre chose que celle que nous avons proposée plus haut (Leç. 39, ex. 5). Elle a un point double à l'infini, elle est donc unicursale. Sa discussion se fait sans difficulté, soit par les formules unicursales, soit par l'équation cartésienne. En la construisant au moyen des coordonnées polaires, nous avons voulu montrer par cet exemple, que, en général, il y avait plus de longueurs et de difficultés dans les discussions par les coordonnées polaires. Ces coordonnées s'appliquent aussi bien que possible, à quelques courbes, ou à quelques lieux géométriques, et certaines questions semblent particulièrement faites pour cette partie de la géométrie analytique. Mais en dehors de ces applications assez restreintes, on doit préférer l'emploi de la géométrie cartésienne.

La forme générale de cette courbe nous conduit naturellement à chercher des points où la tangente est parallèle à *ox*.

On a, d'abord,

$$\rho\rho' = \frac{-\cos\omega(\sin\omega+\cos\omega)^2-(\cos\omega-\sin\omega)(2\cos^2\omega-\sin^2\omega-3\sin\omega\cos\omega)}{\cos^2\omega\,(\cos\omega+\sin\omega)^3}$$

et, par suite

$$-\frac{\rho'}{\rho}=\frac{1}{2}\,\frac{\cos\omega(\sin\omega+\cos\omega)^2+(\cos\omega-\sin\omega)(2\cos^2\omega-\sin^2\omega-3\sin\omega\cos\omega)}{\cos\omega\,(\cos\omega-\sin\omega)\,(\cos\omega+\sin\omega)}$$

au point limite M, on a $tg V = -tg\omega$, et l'angle que nous cherchons s'obtiendra en résolvant l'équation

$$2\frac{\cos\omega}{\sin\omega}=\frac{\cos\omega(\sin\omega+\cos\omega)^2+(\cos\omega-\sin\omega)(2\cos^2\omega-\sin^2\omega-3\sin\omega\cos\omega)}{\cos\omega\,(\cos\omega-\sin\omega)\,(\cos\omega+\sin\omega)}$$

ou, après simplifications,

$$\sin^4\omega+3\sin^3\omega\cos\omega-\sin^2\omega\cos^2\omega+3\sin\omega\cos^3\omega-2\cos^4\omega=0.$$

En posant

$$z=\operatorname{tg}\omega,$$

on a donc

$$z^4+3z^3-z^2+3z-2=0.$$

Cette équation n'admet pas de racine commensurable; mais elle peut être abaissée par la méthode des facteurs commensurables (V. Alg.; § 465). On trouve ainsi que l'équation précédente peut s'écrire

$$(z^2+1)(z^2+3z-2)=0.$$

Les points M et M′ de la figure correspondent donc aux valeurs de tg ω, qui sont les racines de l'équation :

$$\operatorname{tg}^2\omega+3\operatorname{tg}\omega-2=0,$$

racines que l'on peut construire facilement.

440. Construction d'une courbe en coordonnées polaires. (*Branches infinies, paraboliques.*)

Soit

$$(1) \quad \rho = \frac{2 + \sin \omega}{1 + \cos \omega},$$

l'équation d'une courbe U.

Cette courbe admet une direction asymptotique, celle de l'axe ox' ; mais la dérivée de $(1 + \cos \omega)$ s'annulant, pour $\omega = \pi$, on voit, par application de la formule (§ 418) que l'asymptote est rejetée à l'infini. La courbe a donc des bras de forme parabolique et dont la concavité, vers les parties extrêmes, tout au moins, est tournée vers l'axe polaire ox'.

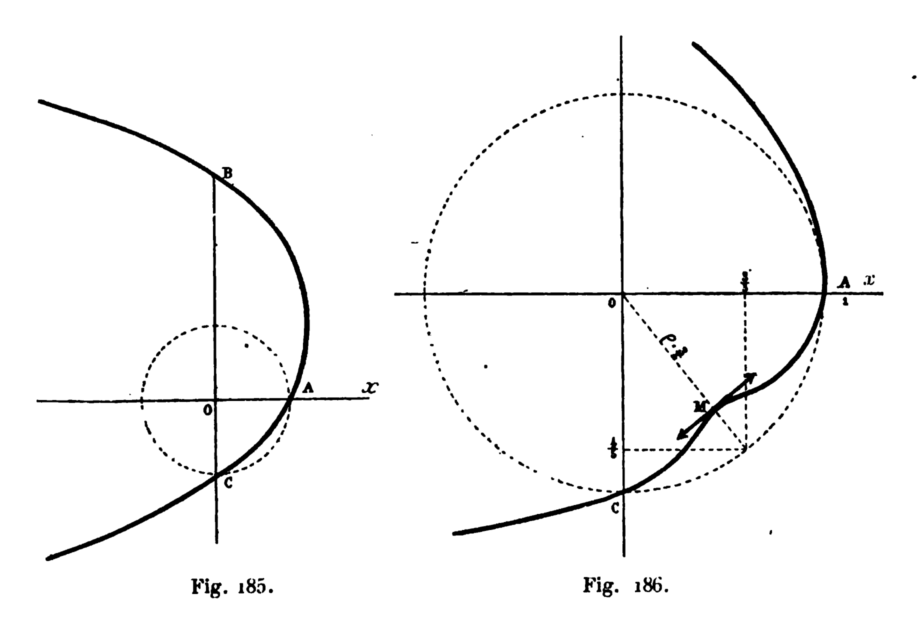


Fig. 185. Fig. 186.

En faisant varier ω, de 0 à 2 π, on voit que la courbe a la forme générale indiquée par la figure (185). Mais on peut étudier plus intimement les sinuosités de cette courbe et montrer que son tracé doit être conforme à celui de la fig. (186), par les considérations suivantes.

Entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π, la valeur de ρ passe par un minimum que nous allons déterminer.

Pour abréger un peu les calculs, remarquons que l'équation (1) peut s'écrire :

$$\rho = \frac{2\left(\sin^2\frac{\omega}{2} + \cos^2\frac{\omega}{2}\right) + 2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2},}{2\cos^2\frac{\omega}{2}}$$

ou,

$$(3)\quad \rho = 1 + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}.$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = t;$$

nous avons

$$\rho = 1 + t + t^2, \quad 2t' = 1 + t^2,$$

et, par suite,

$$\rho' = t'(1 + 2t) = \frac{1}{2}(1 + t^2)(1 + 2t).$$

Prenons la dérivée de ρ', nous obtenons,

$$\rho'' = t''(1 + 2t) + 2t'^2.$$

Au point M, point où nous étudions la forme de la courbe, nous avons,

$$\rho'_1 = 0,$$

par conséquent,

$$t_1 = -\frac{1}{2},$$

et, par suite,

$$\rho_1 = \frac{3}{4}, \quad \rho''_1 = \frac{25}{32}, \cos \omega_1 = \frac{3}{5}, \sin \omega_1 = -\frac{4}{5}.$$

Cherchons si, en ce point M, la courbe tourne sa concavité ou sa convexité vers l'origine. La formule A (§ 430),

$$-\upsilon = \frac{1}{\rho_1} + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)''$$

peut encore s'écrire, en développant le calcul indiqué,

$$\upsilon = \frac{\rho_1 \rho''_1 - 2\rho'^2_1 - \rho^2_1}{\rho^3_1}$$

et, comme ρ'_1 est nul,

$$\upsilon = \frac{\rho''_1 - \rho_1}{\rho^2_1}.$$

D'ailleurs, nous avons

$$\rho''_1 - \rho_1 = \frac{25}{32} - \frac{3}{4} = \frac{1}{32}.$$

Nous pouvons conclure de ce calcul, qu'au point M, la fonction υ étant positive, la courbe tourne sa convexité vers le pôle. Entre les points A et C, le tracé indiqué par la figure (185) doit donc être modifié, et corrigé comme l'indique la figure (186).

441. Remarque I. Lorsque l'équation d'une courbe F est donnée sous la forme,

$$\rho = f(\omega)$$

on peut, par des transformations reposant sur l'identité,

$$f(\omega) = \varphi(\omega) + \psi(\omega) + \ldots,$$

considérer ρ comme étant la somme des rayons vecteurs

u, v,... des courbes qui correspondent, respectivement, aux équations :

$$u = \varphi(\omega), \quad v = \psi(\omega), \dots ;$$

et il résulte souvent de cette remarque une construction très simple de la courbe F, point par point.

C'est ainsi que, dans l'exemple que nous venons de traiter, ayant remarqué que l'équation proposée peut s'écrire

$$(1) \quad \rho = \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega}{2}} + \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}.$$

en considérant les deux courbes qui ont pour équation, l'une,

$$(2) \quad u = \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega}{2}}$$

l'autre,

$$(3) \quad v = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2};$$

on a,

$$\rho = u + v.$$

L'équation (2) représente une parabole ; l'équation (3) une strophoïde ; l'une et l'autre de ces courbes peuvent se construire, point par point, et cette remarque permet de déterminer un point quelconque de la courbe considérée par un procédé très simple.

442. Remarque II. Lorsque l'équation d'une courbe F, se présente sous la forme :

$$\rho = f(\omega),$$

si l'on a,

$$f(\omega) = \varphi(\omega) + \psi(\omega)$$

on pourra construire la courbe, point par point, comme nous

venons de le montrer, en considérant les courbes U et V qui correspondent aux équations :

$$u = \varphi(\omega), \quad v = \psi(\omega) ;$$

nous voulons encore faire remarquer que l'on peut très simplement construire la tangente en un point α de F, si l'on sait tracer les tangentes à ces courbes U et V qu'on pourrait nommer les *auxiliaires* de F.

En effet si l'on considère deux transversales voisines OAA'α, OBB'β, on a

$$A'\alpha = OA, \quad B'\beta = OB ;$$

il résulte de cette remarque que les deux droites RAB, R'A'B', sont deux transversales réciproques du triangle O$\alpha\beta$ et que, par suite, les points R et R' sont symétriques par rapport au point ω, milieu de $\alpha\beta$.

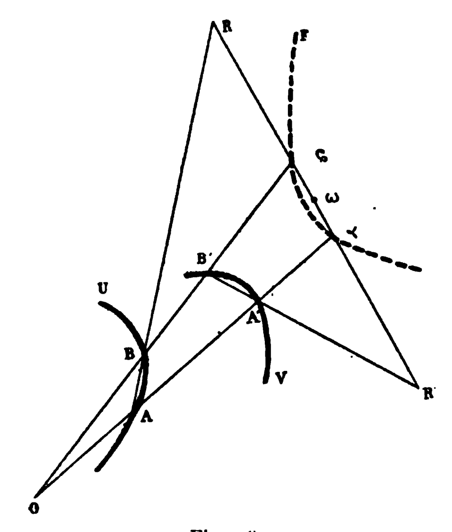


Fig. 187.

La tangente, au point α, s'obtiendra donc en menant, par ce point, une droite qui soit partagée en deux parties égales par les tangentes aux courbes auxiliaires aux points A, A'.

On peut, en particulier, appliquer cette remarque à la courbe à bras paraboliques que nous avons construite tout à l'heure, puisque les courbes auxiliaires sont : une parabole, et une strophoïde droite (V. § 22).

Lorsqu'il y a plus de deux courbes auxiliaires, lorsque l'on a :

$$\rho = f(\omega),$$

et,

$$f(\omega) = \varphi(\omega) + \psi(\omega) + \chi(\omega);$$

on construit d'abord, par la méthode indiquée, la tangente à la courbe qui correspond à l'équation :

$$u = \varphi(\omega) + \psi(\omega);$$

et l'on est ramené au cas précédent.

On peut aussi remarquer que la sous-normale qui correspond au point α, est la somme des sous-normales qui correspondent aux points A, A'.

EXERCICES

1. *Construire la courbe* U *qui correspond à l'équation*

$$\rho^2 \cos^3 \omega - \rho \cos^2 \omega - \sin \omega = 0.$$

Cette courbe est une parabole cubique; on voit pourquoi il suffit de faire varier ω de 0 à π. On étudiera particulièrement la sinuosité de U dans la partie qui est obtenue en faisant varier ω, de α à π, en posant :

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{4}.$$

2. *Tracer la courbe qui correspond aux équations*

$$\rho = \frac{t}{1+t^2}, \quad \cos \omega = \frac{1}{1+t^2};$$

quand t varie de $-\infty$ *à* $+\infty$.

Cette courbe a la forme d'une rosace constituée par quatre foliums.

3. *Vérifier que les équations suivantes réprésentent des coniques:*

1° $\rho = \sqrt{\sec\omega \operatorname{cosec}\omega}$,

2° $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha + \beta \sin 2\omega}}$,

3° $\rho^2 = \dfrac{1}{1 + \sin 2\omega}$ (deux droites),

4° $\rho = \dfrac{\alpha \sin\omega + \beta \cos\omega}{1 + \sin 2\omega}$ (Parabole),

5° $\rho = \dfrac{2\cos\omega}{1 - \cos 2\omega}$ (id.),

6° $\rho^2 - 2\rho\cos\omega + 2 = 0$ (Cercle imaginaire),

7° $\rho = \dfrac{\alpha \sin\omega + \beta \cos\omega}{\alpha' \sin 2\omega + \beta' \cos 2\omega + \gamma}$,

8° $\rho^2 = \operatorname{tg}\omega + \operatorname{cotg}\omega$,

9° $\rho = \dfrac{1 - 2\sin\omega}{3 - 4\cos^2\omega}$.

4. *Autour d'un point* A, *pris sur un cercle* Δ, *de centre* C, *on fait tourner une corde* AB, *et du point* C *on abaisse sur* AB *une perpendiculaire qui rencontre* AB *en* D, *et* Δ *en* E. *Sur* DE *comme diamètre on décrit un cercle* Δ' *et on lui mène une tangente parallèle à* CDE ; *cette tangente rencontre* AB *en un point* I *dont on demande le lieu géométrique.*

On trouve immédiatement, par les coordonnées polaires, l'équation suivante :

$$\rho = R\cos\omega - \frac{R}{2}\sin\omega + \frac{R}{2},$$

le lieu demandé est donc un limaçon de Pascal.

5. *On donne un triangle* ABC ; *trouver le lieu des points d'où l'on voit les côtés* AB, AC, *sous le même angle.*

En posant :

$$AB = c, \quad AC = b, \quad BAC = \theta$$

AB étant l'axe polaire, on trouve :

$$\rho \left\{ a \sin\omega - b \sin(\theta - \omega) \right\} = ab \sin(2\omega - \theta).$$

La courbe qui correspond à cette équation est une strophoïde.

On examinera le cas où les trois points ABC sont la ligne droite et on vérifiera que l'équation précédente donne bien le résultat connu.

6. *On considère un point mobile* A, *sur une parabole* P, *de foyer* F; *la tangente en* A *et la perpendiculaire élevée au milieu de* FA *se coupent en un point* I. *Démontrer que le lieu du point* I *est la courbe qui correspond à l'équation*

$$\frac{p}{\rho} = 4\sin^2\frac{\omega}{3}\cos\frac{\omega}{3}.$$

Vérifier que l'équation cartésienne est

$$y^2 = p\frac{(3x+2p)^2}{4x+3p}.$$

7. *Construire la courbe qui a pour équation*

$$\rho = \frac{\sin\omega + \cos\omega - 1}{\sin\omega + \cos\omega}.$$

Cette équation représente une conchoïde de droite (§ 441).

8. *Vérifier que l'équation*

$$(1)\quad \rho = \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\right)\frac{\alpha+6-(\alpha-6)\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}}{(\alpha^2-6^2)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\right)^2+4\,6^2\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}}$$

représente une conique.

Dans cet exemple, et dans les cas analogues, l'équation proposée comporte des simplifications évidentes et l'on doit, avant de commencer la discussion de la courbe qui correspond à l'équation donnée, simplifier celle-ci autant que possible. On vérifiera facilement que l'équation (1) peut être remplacée par la suivante :

$$\rho = \frac{1}{\alpha - 6\cos\omega}.$$

QUARANTE-TROISIÈME LEÇON

SECTIONS PLANES DU CYLINDRE ET DU CONE CIRCULAIRE DROIT

448. Théorème. *La section plane d'un cylindre circulaire droit est une ellipse.*

Appelons, pour la commodité du langage, *méridien principal* le plan qui passe par l'axe du cône, ou du cylindre, et qui est perpendiculaire au plan de la section Π. Soient ox la trace de Π sur le méridien principal et oy une perpendicu-

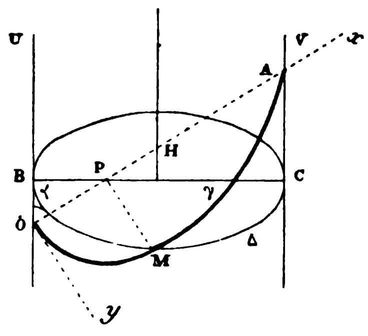


Fig. 188.

laire élevée, au point o, au plan du méridien principal; on peut remarquer que cette dernière droite est située dans le plan sécant et nous allons chercher l'équation de la courbe d'intersection, dans le système d'axes yox.

Soit M un point quelconque de γ; par M, menons un plan

perpendiculaire à l'axe du cylindre, et soit Δ le cercle ainsi obtenu. Nous avons

$$\overline{\mathrm{MP}} = \mathrm{BP}.\mathrm{CP}.$$

D'autre part, en désignant par α l'inclinaison du plan sécant sur l'axe du cylindre, et par R le rayon du cylindre, nous pouvons écrire

$$\mathrm{BP} = x \sin\alpha, \quad \mathrm{CP} = (\mathrm{OA} - x)\sin\alpha = \left(\frac{2\mathrm{R}}{\sin\alpha} - x\right)\sin\alpha.$$

L'équation de γ est donc :

$$y^2 = x\sin\alpha\,(2\mathrm{R} - x\sin\alpha),$$

ou,

$$y^2 + x^2\sin^2\alpha = 2\,\mathrm{R}x\sin\alpha.$$

ou encore,

$$y^2 + (x\sin\alpha - \mathrm{R})^2 = \mathrm{R}^2.$$

La courbe qui correspond à cette équation est une ellipse ; le centre de cette ellipse est situé au point dont les coordonnées sont : R cosec α, et o ; c'est-à-dire au point H milieu de OA. Les axes de la courbe sont : 2 R et $\dfrac{2\mathrm{R}}{\sin\alpha}$.

Il résulte de ces remarques diverses, que toute ellipse γ' peut être considérée comme ayant été obtenue par la section plane d'un cylindre circulaire droit ; il suffit de prendre un cylindre circulaire droit dont le rayon soit égal au petit axe de γ' et de le couper par un plan Π perpendiculaire à un méridien de la surface, la trace de Π sur ce méridien étant tellement choisie, que la partie interceptée par les deux génératrices principales U et V, soit égale au grand axe de γ'.

444. Section Cylindrique. — Méthode Géométrique. Le résultat précédent peut encore s'établir, par des considérations géométriques très simples (1).

1. Cette élégante méthode que nous appliquons aussi, un peu plus loin, au cas de la section plane du cône droit, est due à *Quetelet* et à *Dandelin*.

Inscrivons, comme l'indique la figure ci-dessous, deux cercles tangents à AA′ et aux génératrices principales, HH′GG′. Si nous faisons tourner la figure autour de OO′ (à l'exception de la droite AA′) nous engendrons ainsi : 1° le cylindre proposé, 2° deux sphères qui sont tangentes à cette surface, respectivement, le long des cercles HG, H′G′. D'ailleurs, le plan Π étant perpendiculaire au méridien principal, la droite OF, qui est perpendiculaire sur AA′, est aussi normale sur Π ; ce plan est donc tangent aux sphères O et O′.

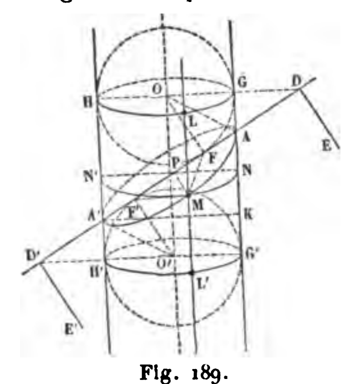


Fig. 189.

Ceci posé, les tangentes issues d'un point à une sphère étant égales, on a :

$$MF = ML, \quad MF' = ML',$$

et, par conséquent,

$$MF + MF' = LL' = HH'.$$

Le lieu décrit par le point M est donc une ellipse ayant pour foyers les points F et F′.

445. Remarque. Si l'on prolonge AA′ et HG, ces droites se coupent en un point D et la distance qui correspond au foyer F est une droite DE, passant pour D, et perpendiculaire au méridien principal.

Remarquons d'abord que nous avons :

$$\frac{DG}{DH} = \frac{DA}{DA'} = \frac{AG}{A'H} ;$$

d'autre part, $AF = AG$, et $A'H = A'F$; et nous voyons ainsi que

$$\frac{DA}{DA'} = \frac{FA}{FA'}.$$

le point D est, d'après cela, le conjugué harmonique de F par rapport aux sommets A, A'. La directrice passe donc par le point D ; comme elle est située dans le plan Π et qu'elle est perpendiculaire sur AA', cette directrice est bien la droite DE.

448. Théorème. *La section plane d'un cône circulaire droit est une ellipse, quand le plan sécant rencontre les deux génératrices principales* SU *et* SV, *en deux points qui déterminent un segment de droite contenant un point* G *de l'axe.*

Lorsque ce point G *est extérieur au segment, la section est une hyperbole.*

Enfin, la section est une parabole lorsque la trace du plan sécant est parallèle à l'une des génératrices principales.

En raisonnant comme nous l'avons fait tout à l'heure nous avons d'abord,

$$y^2 = BP . CP.$$

D'autre part les triangles OBP_1 ACP, donnent :

$$\frac{BP}{\sin \alpha} = \frac{x}{\cos \theta}, \quad \text{et} \quad \frac{PC}{\sin(\alpha + 2\theta)} = \frac{OA - x}{\cos \theta}.$$

Si nous posons $OS = d$ nous avons aussi,

$$\frac{OA}{\sin 2\theta} = \frac{d}{\sin(\alpha + 2\theta)},$$

et nous trouvons, finalement,

$$(1) \quad y^2 \cos^2 \theta = x \sin \alpha \left\{ d \sin 2\theta - x \sin(\alpha + 2\theta) \right\}.$$

L'angle α est compris entre 0 et π ; par suite $\sin \alpha$ est positif et le genre de la conique qui correspond à (1) dépend seulement de $\sin(\alpha + 2\theta)$. La section est une ellipse, une hyperbole, ou une parabole, suivant que l'on a :

$$\alpha + 2\theta < \pi, \quad \alpha + 2\theta > \pi, \quad \alpha + 2\theta = \pi.$$

En cherchant une interprétation géométrique de ces conditions on reconnaît l'exactitude de la proposition énoncée.

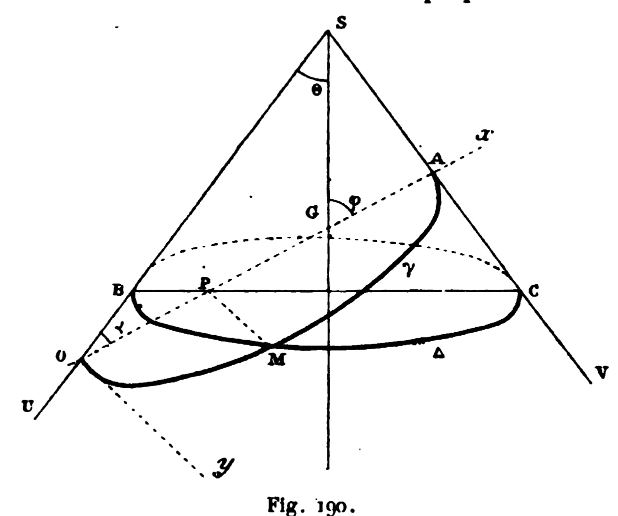


Fig. 190.

Dans le cas de l'ellipse, en identifiant l'équation (1) avec la suivante :

$$(2)\quad y^2 = -\frac{b^2}{a^2}x^2 + 2\frac{b^2}{a}x,$$

on trouve, par un calcul simple,

$$(3)\quad a = d\frac{\sin 2\theta}{2\sin(\alpha + 2\theta)},\quad b^2 = d^2\frac{\sin\alpha\sin^2\theta}{\sin(\alpha + 2\theta)}.$$

447. Problème. *Placer une conique donnée, sur un cône circulaire droit donné.*

Ce problème peut être considéré comme le problème inverse du précédent.

Nous supposons que a, b, et θ sont des quantités données, et nous nous proposons de déterminer les inconnues d et α.

Prenons d'abord le cas de l'ellipse. L'identification des équations (1) et (2) conduit à l'égalité

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin\alpha\sin(\alpha + 2\theta)}{\cos^2\theta}.$$

Cette relation donne :

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{\cos^2\theta - \sin\alpha \sin(\alpha + 2\theta)}{\cos^2\theta}.$$

D'autre part, on peut remarquer que l'on a

$$\cos^2\theta - \sin\alpha\sin(\alpha + 2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\alpha\cos 2\theta \\ - \sin\alpha\cos\alpha\sin 2\theta.$$

ou,

$$\cos^2\theta - \sin\alpha\sin(\alpha + 2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\alpha(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ - \sin\alpha\cos\alpha\sin 2\theta,$$

c'est-à-dire,

$$\cos^2\theta - \sin\alpha\sin(\alpha + 2\theta) = \cos^2\theta\cos^2\alpha + \sin^2\theta\sin^2\alpha \\ - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\theta\cos\theta,$$

ou, enfin,

$$\cos^2\theta - \sin\alpha\sin(\alpha + 2\theta) = \cos^2(\theta + \alpha).$$

D'après ce calcul, on a donc

$$(4) \quad \frac{c}{a} = \pm \frac{\cos(\alpha + \theta)}{\cos\theta}.$$

L'angle $\alpha + \theta$ est égal à l'angle φ qui mesure l'inclinaison du plan sécant sur l'axe du cône, et la formule précédente permet de calculer φ ; puisque l'on a $c < a$ et, *a fortiori*, $c < a\cos\theta$.

Lorsque φ est connu, la formule

$$d = \frac{2a\sin(\theta + \varphi)}{\sin 2\theta},$$

permet de calculer d. Ainsi : *on peut toujours placer une ellipse donnée sur un cône circulaire droit donné.*

On peut encore remarquer, d'après la formule (4), que le problème en question comporte deux solutions. Les plans

qui correspondent à ces solutions sont symétriques par rapport à l'axe du cône; ce dernier fait est évident *a priori*.

448. Le même calcul, appliqué au cas de l'hyperbole, conduit à une conséquence semblable; il y a pourtant une différence importante à signaler, et l'on trouve que *l'on ne peut placer une hyperbole donnée, sur un cône circulaire droit donné, que si l'angle qui renferme les branches de l'hyperbole est plus petit que l'angle* 2θ, *formé par les deux semi-génératrices principales qui renferment l'axe du cône.*

449. Enfin, on voit aussi très facilement *que l'on peut toujours placer une parabole sur un cône circulaire droit donné.* Mais nous n'insistons pas davantage sur ces problèmes pour lesquels nous indiquerons d'ailleurs, tout à l'heure, une solution géométrique.

450. Sections coniques. — Méthode géométrique. Soit SAA′ la section principale par rapport au plan sécant Π. Considérons le triangle SAA′, le cercle inscrit O, et le cercle

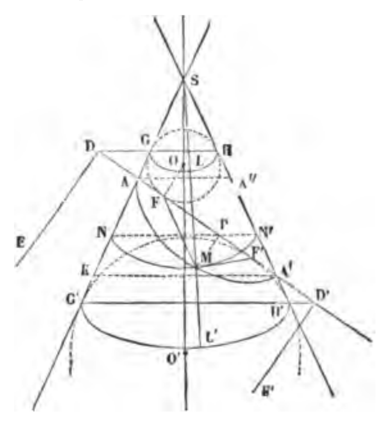


Fig. 191.

exinscrit O′, qui correspond au côté AA′. Les considérations précédemment employées (§ 444), étant appliquées à la figure ci-dessus, donnent :

$$MF = ML, \quad MF' = ML',$$

et, par suite,

$$MF + MF' = LL'.$$

Le lieu du point M est donc une ellipse ayant pour foyers les points F et F'. Le grand axe de cette ellipse a une longueur égale à LL', et l'on reconnaît sans peine que l'on a

$$LL' = GG' = AA'.$$

Les points A et A' sont donc les sommets de l'ellipse, ce résultat est évident *a priori*, les foyers étant situés sur AA', et les points A et A', faisant évidemment partie du lieu.

La figure (192) correspond au cas de la section hyperbolique. On a :

$$MF' = ML', \quad MF = ML,$$

et, par suite,

$$MF' - MF = LL' = GG' = AA'.$$

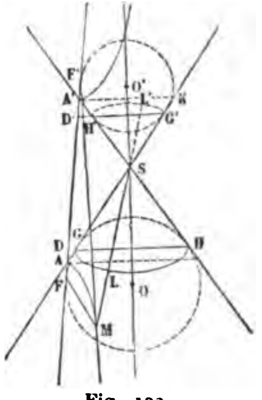


Fig. 192.

Dans l'un et l'autre cas les points D et D' représentent la trace des directrices sur le méridien principal. En effet le triangle SAA' et la transversale DGH donnent :

$$\frac{SG}{AG} \cdot \frac{A'H}{SH} \cdot \frac{DA}{DA'} = 1.$$

Mais on a :

$$SG = SH, \quad AG = AF, \quad A'H = A'F;$$

et l'on peut écrire :

$$\frac{DA}{DA'} = \frac{FA}{FA'}.$$

Le point D est donc conjugué de F, par rapport au segment AA'. On conclut de cette observation que la directrice qui correspond au foyer F est une perpendiculaire au méridien principal ayant pour trace, sur ce plan, le point D.

451. Le cas de la parabole exige quelques considérations particulières.

Soit AA' la trace du plan sécant sur le méridien qui lui est perpendiculaire; droite qui est, par hypothèse, parallèle à SH. Traçons le cercle tangent aux droites AA', SG, SH, et soit D le point de concours des droites GH, AA'. Élevons au point D une perpendiculaire DE au plan du méridien principal; au plan SGH, par conséquent; nous allons montrer que la courbe de section a tous ses points également éloignés de F et de DE.

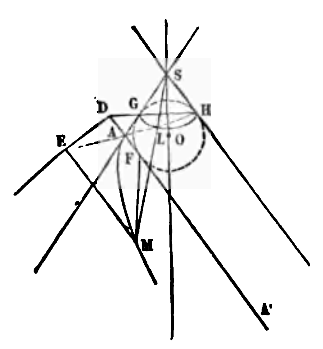


Fig. 193.

Soit M un point quelconque de cette section ; SM rencontre le cercle de contact GH au point L, et si par M on mène ME parallèle à AA' on voit que cette droite, étant située dans le plan sécant, rencontre DE au point E. D'ailleurs les droites ME et SH étant parallèles, les trois points E, L, H sont en ligne droite car ils peuvent être considérés comme des points communs à deux plans, savoir : 1° le plan des droites SH, ME ; 2° le plan de contact GLH, de la sphère et du cône.

Ces remarques étant faites, on peut observer que le triangle LSH étant isocèle, le triangle semblable EML est, lui aussi, isocèle. On a donc

$$ME = ML.$$

Enfin les droites ML et MF sont égales comme étant deux tangentes issues du même point M, à la sphère O. On a donc, finalement,

$$MF = ME,$$

égalité qui prouve que la section considérée est une parabole ayant pour foyer F et pour directrice la droite DE.

452. Problème. *Placer une ellipse, une hyperbole, ou une parabole sur un cône circulaire droit donné.* (**Solution géométrique**.)

Prenons le cas de l'ellipse. Si du point A (fig. 191) on abaisse une perpendiculaire AA″ sur l'axe du cône on reconnait, par des considérations élémentaires que A′A″ = FF′. D'ailleurs l'angle AA″A′ est connu, il est égal à $\frac{\pi}{2} + O'SA'$. La détermination du triangle AA′A″ se trouve ramenée, par cette remarque, au problème suivant : *construire un triangle connaissant le plus grand côté* AA′, *l'angle opposé, et un autre côté* A′A″. L'angle opposé au plus grand côté étant obtus, on sait que ce problème ne comporte alors qu'une solution, et que cette solution existe toujours.

Le cas de l'hyperbole se traite par des considérations analogues. On considère (fig. 191) le triangle AA′K et l'on reconnait d'abord, que AK = FF′. On est encore conduit à construire un triangle avec les données *du cas douteux ;* mais l'angle aigu connu étant opposé au plus petit des deux côtés donnés, on sait que ce problème n'est pas toujours possible et la discussion élémentaire qu'il comporte conduit au résultat déjà signalé, *l'hyperbole ne peut être placée sur le cône donné que si l'angle des asymptotes est plus petit que l'angle du cône.*

Enfin, si la courbe proposée est une parabole, en prenant $SP = SQ = \frac{p}{2}$, p désignant le paramètre de la parabole proposée, et en faisant la construction qu'indique la figure ; la droite Δ, droite parallèle à SG′, est la trace, sur le méridien principal, du plan sécant cherché.

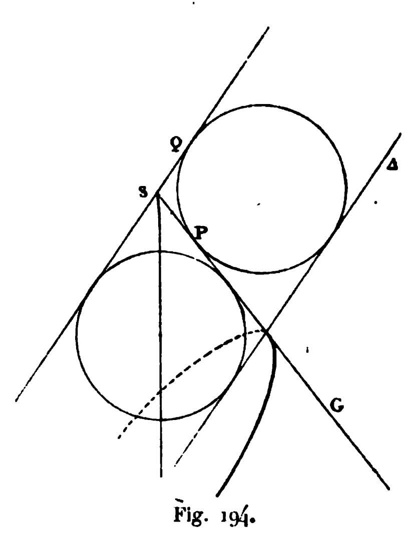


Fig. 194.

453. Cône circulaire oblique. — Sections antiparallèles. La surface engendrée par une droite mobile passant constamment par un point fixe S, et s'appuyant sur un cercle C, est un cône circulaire oblique, quand le point S se projette sur le plan de C en un point H qui n'est pas le centre O de ce cercle. Le plan ASB qui passe par la droite SH et par le point O est le *plan principal du cône*, et nous retrouverons cette expression dans la géométrie analytique à trois dimensions pour exprimer une propriété qui appartient à la figure que nous considérons : *toutes les cordes du cône qui sont perpendiculaires au plan* ASB *étant partagées, par la surface, en deux parties égales.*

Le cône circulaire oblique admet d'autres sections circulaires que celles qui sont fournies par le plan ACB et par les

plans parallèles. Menons en effet dans le plan principal, une droite A'B', anti-parallèle de AB, et coupons le cône par un plan A'C'B' perpendiculaire au plan principal; nous allons montrer que la section ainsi obtenue est un cercle.

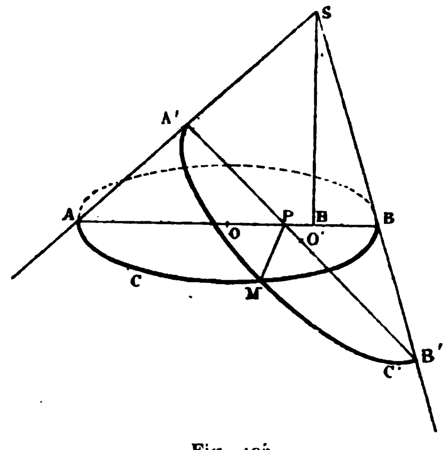


Fig. 195.

On a, en effet,

$$\overline{MP}^2 = PA.PB, \text{ et } PA.PB = PA'.PB';$$

par suite,

$$\overline{MP}^2 = PA'.PB'.$$

Comme le raisonnement précédent s'applique à un point quelconque de la courbe A'C'B', il est donc démontré que l'angle A'MB' est droit, quel que soit le point de cette courbe; celle-ci est donc une circonférence.

454. Cônes du second ordre. — Transformation par la perspective. Cette étude des sections planes des cônes à base circulaire conduit très naturellement à chercher la nature et le genre des sections planes des cônes qui ont pour base une courbe du second ordre. Mais nous touchons ici à des considérations qui trouveront mieux leur développement dans la troisième partie de ce cours, et que nous ne pourrions produire, en ce moment, qu'en nous appuyant sur

des principes géométriques qui ne doivent pas être présentés ici. Nous voulons seulement dire un mot de la méthode de *transformation par perspective*, que **Poncelet** a découverte, et qu'il a exposée dans son *Traité des propriétés projectives.*

Imaginons une courbe U, dans un plan P; soit S un point, pris en dehors de P, et que nous nommerons le *point de vue.* Considérons maintenant un plan P′ et désignons par Δ la droite d'intersection de P et de P′.

A un point A du plan P correspond sur P′ un point A′, intersection de ce plan et de la droite SA.

A une droite ABC, correspond une droite A′B′C′, intersection du plan P′ et du plan S, ABC; et ces deux droites correspondantes se coupent, au point M, sur Δ.

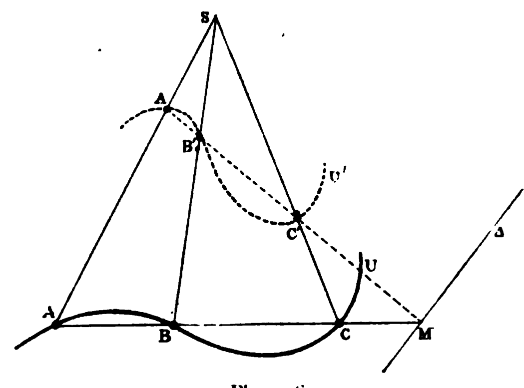


Fig. 196.

En général, à une courbe U correspond une courbe U′: les deux courbes U,U′, coupent Δ aux mêmes points, et non seulement elles sont du même ordre et de la même classe, mais elles ont des points multiples en même nombre; ces points, correspondants deux à deux, offrant les mêmes singularités.

En particulier, à une courbe du second degré correspond une courbe qui est aussi du second degré; en d'autres termes *les sections planes des cônes du second ordre sont des ellipses, des hyperboles, ou des paraboles.*

Nous reviendrons d'ailleurs bientôt sur ce dernier point, dans la troisième partie de ce cours, quand nous chercherons par la méthode analytique le genre des sections planes des surfaces du second ordre.

Cette transformation des figures planes, par la perspective, constitue une des réalisations géométriques de la transformation homographique : à quatre points en ligne droite A,B,C,D, correspondent quatre points A′,B′,C′,D′, également en ligne droite, et les rapports enharmoniques de ces deux couples de points sont égaux.

EXERCICES

1. *Démontrer, géométriquement, que deux sections antiparallèles donnent deux cercles qui appartiennent à la même sphère.*

Soient O, O′ les centres des deux sections, on voit immédiatement que les perpendiculaires élevées, en ces points, au plan des sections, se coupent en un point ω qui est à la même distance des points de Δ et de Δ′, puisqu'il représente le centre du cercle qui passe par les points A, B ; A′, B′.

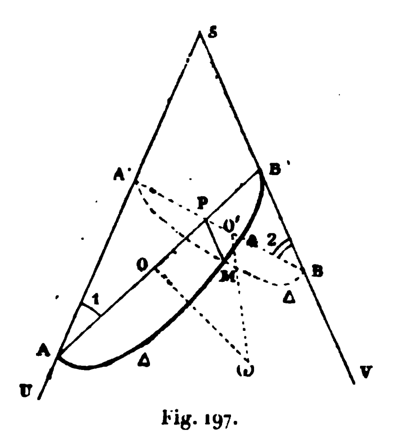


Fig. 197.

2. *Une sphère est tangente au plan horizontal* P, *trouver l'ombre portée par cette sphère, sur ce plan, par un flambeau perpendiculaire à* P *et de hauteur h.*

Pour faire cette épure on appliquera le théorème de Dandelin.

3. *Le lieu des sommets des cônes de révolution qui passent par une ellipse donnée est une hyperbole située dans le plan qui passe par le grand axe de cette ellipse, perpendiculairement au plan de cette courbe.*

On applique la remarque faite plus haut et d'après laquelle $A'A'' = FF'$ (fig. 191).

4. *On coupe un cône circulaire droit par un plan* P *et l'on projette la section obtenue sur un plan* Q *passant par le sommet* S, *du cône donné, perpendiculairement à l'axe de ce cône. Démontrer que cette projection* U *a pour foyer* S *et pour directrice la droite d'intersection* Δ, *des plans* P *et* Q.

Cette proposition s'établit très simplement par des considérations géométriques ; on fait voir que le rapport des distances, d'un point de U, à S et à Δ, *est constant et égal à* $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta$; α étant l'angle d'inclinaison des plans P et Q, et 2θ désignant l'angle au sommet du cône.

5. *Démontrer que le petit axe de la section est une moyenne géométrique entre les rayons des sections faites dans le cône, par les plans qui passent par les extrémités du grand axe.*

6. *Que l'on mène un plan parallèle à la base du cône circulaire droit, et situé à la même distance de son sommet que le plan de la section conique proposée : ce plan coupera le cône suivant un cercle, dont le diamètre sera le paramètre de la conique.*

(Théorème de Jacques Bernoulli.)

NOTE

CONSTRUCTION GRAPHIQUE DES RACINES D'UNE ÉQUATION

Parmi les applications de la géométrie analytique à l'algèbre, nous signalerons *la construction graphique des racines d'une équation donnée.* Nous indiquerons d'abord le principe de la méthode, puis nous appliquerons celle-ci à quelques exemples.

1. Principe. *Soit* $f(x)$ *le résultant des deux formes :* $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$; *si l'on construit les deux courbes* U, V, *qui correspondent aux équations*

$$\varphi(x,y) = 0, \quad \psi(x,y) = 0,$$

l'abcisse x' *d'un point* M' *commun à* U *et à* V, *est une des racines de l'équation* $f(x) = 0$.

En effet, appelons y' l'ordonnée du point M'; les deux équations

$$\varphi(x,y') = 0, \quad \psi(x,y') = 0$$

admettent une racine commune x'; le résultant $f(x)$ s'annule donc pour $x = x'$, et l'on a

$$f(x') = 0.$$

La réciproque n'a pas toujours lieu et il peut arriver que U et V n'aient aucun point commun, réel, l'équation $f = 0$, admettant, malgré cela, des racines réelles. Il suffit, pour

citer un cas évident de cette singularité, que U et V aient deux points imaginaires conjugués situés sur une parallèle à l'axe des y.

Par exemple, l'équation

$$x^8 - \alpha^4 x^4 + x^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 0$$

peut être considérée comme résultant de l'élimination de y entre les deux formes :

$$y^2 - x^2 + \alpha^2 + \beta^2, \quad y^2 + x^8 - \alpha^4 x^4.$$

Dans cet exemple, la courbe U est une hyperbole équilatère dont les sommets sont sur l'axe ox à une distance $\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, de l'origine ; V est une courbe en forme d'ovale, comprise entre les droites qui correspondent aux équations : $x = \alpha$, $x = -\alpha$. Dans ces conditions U et V ne peuvent avoir aucun point commun, réel, et pourtant l'équation proposée a, au moins, deux racines réelles.

Dans la pratique, on peut éviter cette difficulté en posant

$$(1) \quad f(x) = \lambda(x) - \mu(x),$$

et en construisant les courbes qui ont pour équation, respectivement,

$$y = \lambda(x), \quad y = \mu(x).$$

Dans d'autres cas, on pose $y = \nu(x)$, et l'on fait, avec cette relation et l'équation proposée $f(x) = 0$, diverses combinaisons qui aboutissent à une équation $F(x,y) = 0$. On cherche alors les abcisses des points communs aux courbes qui correspondent aux équations

$$y - \nu(x) = 0, \quad F(x,y) = 0.$$

Mais cette méthode peut introduire des solutions étrangères.

Lorsqu'on fait usage de l'identité (1) on doit remarquer que cette identité pouvant être établie d'une infinité de façons différentes, on doit choisir naturellement, parmi ces iden-

tités diverses, celle qui donne lieu à des courbes connues, ou à des courbes dont le tracé peut être obtenu facilement et avec une certaine précision.

2. Application au second degré. Soit

$$x^2 + px + q = 0.$$

l'équation proposée. En posant

$$y = x^2, \quad \text{et} \quad y + px + q = 0,$$

on a une première construction au moyen d'une droite et d'une parabole P qui est la même pour toutes les équations que nous allons considérer.

On peut aussi résoudre la question en écrivant l'équation proposée sous la forme :

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = y^2 + \frac{p^2}{4} - q.$$

En construisant le cercle Δ qui a pour équation

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{4} - q, \quad \left(\frac{p^2}{4} - q > 0\right)$$

les abcisses des points communs à Δ et à l'axe des x, sont les racines cherchées.

3. Remarque. Avant d'aborder l'équation du troisième degré nous ferons une remarque générale, remarque ayant pour but de montrer comment on obtient l'équation du cercle passant par les trois points communs à deux coniques Γ, γ, qui ont seulement une direction asymptotique commune.

Prenons l'axe ox parallèle à cette direction et soient

$$(\Gamma) \quad A'y^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + A'' = 0,$$
$$(\gamma) \quad a'y^2 + 2b''xy + 2cx + 2c'y + a'' = 0,$$

les équations des coniques considérées. Nous en déduisons :

$$y(A'y + 2B''x + 2C') = -(2Cx + A''),$$
$$y(a'y + 2b''y + 2c') = -(2cx + a'')$$

et, par combinaison, en supposant $y \neq 0$,

$$\frac{A'y + 2B''x + 2C'}{a'y + 2b''x + 2c'} = \frac{2Cx + A''}{2cx + a''}.$$

Cette équation, mise sous la forme entière, donne

$$(1) \quad \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma x + \delta y + \varepsilon = 0,$$

en posant

$$\alpha = 4(B''c - Cb'').$$

On doit observer d'ailleurs que α n'est pas nul, car si l'on avait

$$B''c = Cb'',$$

les coniques considérées auraient une asymptote commune. savoir la droite qui correspond à l'une ou à l'autre des équations suivantes :

$$B''y + C = 0, \quad b''y + c = 0.$$

Multiplions les équations (Γ), (γ), et (1), respectivement, par λ, μ, et $+1$; après addition, nous obtenons le résultat suivant :

$$(2) \quad (\lambda A' + \mu a')y^2 + \alpha x^2 + 2(B''\lambda + b''\mu + \beta)xy + U = 0,$$

U désignant une forme linéaire d'x et d'y. Si nous posons

$$(3) \quad \lambda A' + \mu a' - \alpha = 0, \quad B''\lambda + b''\mu + \beta = 0,$$

ces équations donnent pour λ et μ des valeurs finies et bien déterminées. En effet, le déterminant des inconnues :

$$\begin{vmatrix} A' & a' \\ B'' & b'' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, si, comme nous le supposons, les deux coniques considérées ont une seule direction asymptotique commune. L'équation (2) représente donc le cercle passant par les trois points communs, situés à distance finie, des coniques (Γ) et (γ).

4. Équation du troisième degré. Considérons maintenant l'équation

$$(1) \quad x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

et posons, comme plus haut,

$$(P) \quad y = x^2.$$

Nous avons, d'abord,

$$(3) \quad xy + py + qx + r = 0,$$

puis, en appliquant la méthode que nous venons d'exposer,

$$y^2 + pxy + qy + rx = 0,$$

et, finalement,

$$(\Delta) \quad x^2 + y^2 + y(q - p^2 - 1) + x(r - pq) - pr = 0.$$

En construisant 1° le cercle qui correspond à cette équation, 2° la parabole P; les racines cherchées sont des abcisses des points communs. Le cercle Δ et la parabole P, ayant quatre points communs, nous avons donc introduit une solution étrangère. Cette solution est $x = p$.

5. Équation du quatrième degré. Prenons enfin le cas de l'équation du quatrième degré, et supposons qu'elle ait été débarrassée du terme en x^3; soit

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

cette équation. Posons encore,

$$y = x^2.$$

et nous avons

$$y^2 + py + qx + r = 0.$$

Ces deux dernières égalités donnent, par combinaison,

$$x^2 + y^2 + (p - 1)y + qx + r = 0.$$

Le cercle Δ′ qui correspond à cette équation et la parabole P, ont quatre points communs dont les abcisses sont les racines cherchées.

6. Application aux équations transcendantes. La construction graphique des racines d'une équation donnée s'applique très heureusement à la séparation des racines d'une équation donnée et notamment à celle des racines des équations transcendantes.

Si

$$(1)\quad f(x) = 0,$$

représente l'équation proposée et si l'on a

$$f(x) = \lambda(x) - \mu(x),$$

après avoir construit, comme nous l'avons déjà dit, les courbes qui correspondent aux équations

$$y = \lambda(x), \quad y = \mu(x).$$

Si l'on prouve, par ce tracé, qu'il existe un seul point M commun à ces courbes entre deux parallèles à l'axe des y ($x = \alpha$, $x = \beta$); il sera par cela même démontré que l'équation (1) admet une seule racine dans l'intervalle (α, β).

Après avoir ainsi séparé une racine, on pourra calculer, par les méthodes connues (*Alg.* lec. 38), des valeurs de plus en plus approchées de cette racine.

Dans quelques cas, il pourra être avantageux de transformer, avant tout calcul, l'équation donnée.

7. Exemple. *Résoudre l'équation* [1]

$$(1)\quad x^x = 100.$$

Prenons les logarithmes des deux membres dans le système vulgaire, nous avons

$$x \log x = 2.$$

1. Cette équation a été considérée par Euler. (*Bulletin des sciences*, par Férussac, 1829.)

Changeons de variable et posons

$$x = \frac{1}{X},$$

l'équation proposée devient

$$(2) \quad 2X + \log X = 0,$$

et nous allons considérer les deux équations

$$y + 2X = 0, \quad y = \log X.$$

La première représente une droite qui passe par l'origine et par le point $(1, -2)$; l'autre est la logarithmique dont la forme est bien connue (V. *Alg.*, § 266).

Nous déduisons de là que l'équation (2) a une seule racine réelle, comprise entre 0 et 1.

On peut resserrer cet intervalle et reconnaître, immédiatement, que cette racine est comprise entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$.

En partant de ces limites, et en appliquant la méthode de Newton, on trouve

$$X = 0{,}277994,$$

et, par suite,

$$x = 3{,}59728 \ldots .$$

FIN

QUESTIONS D'EXAMENS (1883)

ÉCOLE CENTRALE

PREMIÈRE SESSION (1883). — On donne deux axes Ox, Oy, un point A sur Ox, un point B sur Oy :

1° Former l'équation générale des paraboles telles que, pour chacun d'elles, Oy soit la corde des contacts des tangentes menées du point A, et Ox la corde des contacts des tangentes menées du point B.

2° Trouver le lieu des points de rencontre de chacune de ces paraboles avec celui de ses diamètres qui passe par un point H donné sur Ox.

On déterminera un nombre de conditions géométriques suffisant pour pouvoir tracer le lieu et on cherchera comment doit être placé le point H, pour que ce lieu se réduise à des droites.

3° Déterminer le paramètre variable que renferme l'équation générale du n° 1, de façon qu'elle représente une parabole passant par un point donné P, et chercher dans quelles régions du plan doit se trouver le point P, pour que le problème soit possible.

2e SESSION (1883). — On donne, dans un plan, un rectangle ABCD et un point quelconque P ; par ce point, on mène une droite de direction arbitraire PR ; des quatre sommets du rectangle on abaisse des perpendiculaires AA′, BB′, CC′, DD′ sur cette droite.

Ceci posé, on demande de démontrer :

1° Que, parmi toutes les droites PR, issues du point P, il en existe une, PR′, pour laquelle la somme r^2 des carrés des distances des quatre sommets du rectangle à cette droite est maxima, et une autre, PR″, pour laquelle cette somme est minima ;

2° Que les deux droites PR′ et PR″ sont rectangulaires ;

3° Que le lieu des points P, pour lesquels le maximum de r^2 conserve une valeur donnée μ^2, est une conique, et que la tangente à cette conique au point P est la droite PR′. — Que, de même, le lieu des points P, pour lesquels le minimum de r^2 conserve une valeur donnée λ^2, est une conique, et que la tangente à cette conique au point P est la droite PR″ ;

4° Que ces deux coniques sont homofocales et que leurs foyers communs sont indépendants des valeurs attribuées aux deux paramètres μ^2, λ^2. Donner la position de ces foyers et examiner en particulier le cas où l'une des deux dimensions du rectangle s'annulerait.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Composition du 25 juin 1883. — On donne la cissoïde qui, rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires, a pour équation

$$(x^2 + y^2)x = ay^2.$$

Soient x', y' les coordonnées d'un point M du plan. On propose de former : 1° l'équation du troisième degré qui a pour racines les coefficients angulaires des droites qui joignent le point O aux points de contact des trois tangentes à la cissoïde issues du point M ; 2° l'équation du cercle qui passe par ces points de contact.

Montrer que, si les trois tangentes sont réelles, le point M est intérieur au cercle.

On considère l'ensemble des cercles (C_m) dont chacun jouit de cette propriété que les tangentes à la cissoïde en trois des quatre points où il la rencontre concourent en un même point : Soit M ce point de concours pour le cercle C_m.

On demande le lieu des centres des cercles C_m qui passent par un point donné P du plan, ainsi que le lieu des points M relatifs à ces cercles. On examinera en particulier le cas où le point P est situé sur la cissoïde et ne fait pas partie des trois points communs au cercle C_m et à la cissoïde pour lesquels les tangentes concourent.

Combien passe-t-il de cercles C_m par deux points donnés P, Q du plan ? Peut-on disposer de ces deux points de façon qu'ils appartiennent à une infinité de cercles C_m ?

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

20 juin 1883. — On donne une parabole P et une droite D. On demande le lieu des points tels que les tangentes menées de ce point à la parabole forment avec la droite D un triangle de surface donnée.

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES

CONCOURS DE 1883

Mathématiques élémentaires.

Trouver la hauteur AB et les bases AD, BC d'un trapèze rectangle ABCD, connaissant la longueur l du côté oblique CD l'aire a^2 du trapèze, et le volume $\frac{3}{4}\pi b^3$ engendré par la révolution de la figure autour de CD.

Discuter des formules trouvées, et déterminer le minimum de b^2. On examinera les cas particuliers suivants :

$$l = a; \quad l = 3a.$$

Mathématiques spéciales.

D'un point donné P on mène des normales à un ellipsoïde donné.

1° Démontrer que par les pieds de ses six normales, on peut faire passer une infinité de surfaces du second ordre S concentriques à l'ellipsoïde;

2° Trouver le lieu que doit décrire le point P pour que les surfaces S soient de révolution;

3° Déterminer le cône lieu des axes de révolution des surfaces S;

4° Sur la section de ce cône par un plan perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde, indiquer les points par lesquels passe l'axe de révolution quand la surface S est un ellipsoïde, un hyperboloïde à une ou à deux nappes, un cône, un cylindre, ou un système de deux plans parallèles.

Composition sur le programme de licence.

Théorie. — On donne un corps quelconque, dont les diverses parties sont douées d'un pouvoir attractif suivant la loi de Newton, et on admet, comme préalablement démontré, que les composantes de l'attraction exercée sur un point M, ayant pour coordonnées x, y, z, sont représentées, à un facteur constant près, par les dérivées $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$ du potentiel V, relatif au point M. Prouver qu'on a toujours

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\varepsilon,$$

ε étant la densité de la masse attirante au point de cette masse qui coïncide avec le point M.

Démontrer que toute fonction U qui, mise à la place de V dans l'équation précédente, satisfait à cette équation, ne diffère pas du potentiel V; si elle remplit en outre les conditions suivantes : 1° la fonction U est continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre; 2° les produits

$$Ux, Uy, Uz, \quad x^2\frac{dU}{dx}, y^2\frac{dU}{dy}, z^2\frac{dU}{dz}$$

restent finis quand une ou plusieurs des variables x, y, z deviennent infinies, la masse attirante étant limitée.

Application. — Étant donné un ellipsoïde E, on sait qu'en chaque point de l'espace se coupent trois surfaces du second degré homofocales à E; désignons par λ, μ, ν, les demi-axes de ces surfaces parallèles au grand axe de l'ellipsoïde E. On considère une masse indéfinie douée d'un pouvoir attractif suivant la loi de Newton, et dont la densité en chaque point est exprimée par une fonction de λ, μ, ν. On demande quelle doit être la forme la plus générale de cette fonction pour que les surfaces de niveau soient des ellipsoïdes homofocaux à E. Cette forme étant trouvée, calculer l'attraction de la masse sur un point quelconque.

ANGERS, IMPRIMERIE BURDIN ET Cie, RUE GARNIER, 4.

